ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXV

1877-78

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME II.

DISPENSA PRIMA

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1878

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXV

1877-78

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME II.

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1878

Intorno alle condizioni idrauliche del Danubio a Buda-Pest dopo i lavori di rettificazione del 1872.

Nota dell' ing. PAULO FAMBRI

letta nella seduta del 6 maggio 1877.

Sul principio del 1876, precisamente in febbraio e marzo, una terribile inondazione del Danubio richiamò vivamente gli studî dell' ingegnere I. I. Revy intorno ad alcune recenti operazioni alle quali era stato sottoposto il gran fiume immediatamente a valle di Buda-Pest.

Egli impiegò lungamente tutto il suo tempo e il suo specialissimo ingegno a mettere bene in chiaro ogni aspetto dell' inatteso fenomeno ed ogni fatto ad esso prossimamente anteriore che potesse comunque illustrarlo. La quale cosa, necessaria sempre, diventa più che mai tale quando esistano persone e corpi morali ai cui errori possa venire in qualche modo attribuito un sinistro e cui prema per conseguenza di abbuiare notizie, sviare argomenti, e arruffare a un modo o ad un altro la matassa attraversando la infesta ricerca della verità scientifica.

Il Danubio però non poteva certamente serbare dei segreti di fronte ad un ingegnere idraulico come il Revy il quale aveva saputo, un dieci anni prima, strapparne tanti al Paranà, all' Uraguay e al Plata medesimo. Laonde non andò guari che il paziente quanto acuto indagatore fu non solo in possesso della verità, ma in grado di dimostrarla, come fece in una importantissima relazione mandata il 30 giugno 1876 al conte Andrassy il quale, come è non meno naturale che debito in lui, professa un interesse al tutto speciale per quanto risguardi il nobile fiume che costituisce la massima arteria della Monarchia. E in ciò l'opinione pubblica sta tutta dietro a lui, pronta, ov' egli si arrestasse, anche a sospingerlo.

La notizia dell'inondazione del 1876 aveva profondamente costernato l'Ungheria. I cittadini di Buda-Pest si chiedevano angosciosamente se gli ingegneri imperiali non avessero fatto per avventura il bel lavoro di cambiare per essi in un pericoloso nemico quel fiume che era stato sin allora l' ornamento e la fortuna del loro bel paese.

Le osservazioni sulle quali avrò l' onore di intrattenere questo illustre consesso si limiteranno ad un cento chilometri di corso sopra e sotto al punto obbiettivo, Buda-Pest. In questo tratto verranno considerate le oscillazioni altimetriche comparative della sua superficie prima e dopo i grandi lavori, dai quali (se in bene o in male si vedrà poi) dovevano a ogni modo immancabilmente venire importanti modificazioni al regime del fiume.

Gioverà intanto prendere dalla Memoria dell' autore e, dove è possibile, condensare come si trattasse d'un imballaggio, le notizie indispensabili all' intelligenza dei fatti e all'apprezzamento dei giudizî.

Il fiume. — Da Esztergom a Duna-Foldvar il canale del Danubio andò per lo passato assai poco soggetto ad alterazioni.

Sopra e sotto Gönyö esso riceve parecchi tributarî i quali all'occasione influiscono sul suo livello. Però tra Komorn e Buda-Pest essi possono riguardarsi come assai poca cosa in rapporto all'ordinario volume delle acque.

A Visegrad il fiume esce d'in frà una catena di montagne per entrare nelle grandi pianure ungheresi.

Quivi il ramo principale si biforca. Le sue due lunghe braccia corrono pressochè parallelamente a 33 chilometri di distanza, convergendo poi e formando l'isola di sant'Andrea bella di parecchi villaggi. Di là si uniscono ricostituendo un corso unico di circa 15 chilometri, salvo, qua e là qualche breve isola, ma ritenendo fin sotto a Buda-Pest il carattere di ramo unico. Ivi, dopo le strette di Gellert, si rifa, come a Visegrad, una grande biforcazione, e ciascuno dei due rami forma un grande canale secondario sparso di isolette come il principale. Sotto Gellert, il Soroksar e il Promontor, che così si chiamano questi due rami, continuano ciascuno il proprio corso per 57 chilometri formando l'isola di Csepel, larga cinque, bella anch' essa di molti villaggi. Tornano poi a unirsi e fondersi in canale primario per lunghissimo tratto, oltre al quale il soggetto della presente Memoria non ha che vedere. L'andamento del Danubio dunque, fra Esztergom e Duna-Foldvar, è questo che, a parte le brevi isole che ne sono gli accidenti minori, e' si biforca due volte, cioè sotto Visegrad e sotto il colle di Gellert.

E se così faceva non era davvero per desiderio che avesse di abbracciare Csepel o di imprigionare sant'Andrea ma, come il Revy assiomaticamente afferma, per delle *profonde ragioni idrauliche* le quali non possono non avere a poco a poco *determinato il suo regime,* in virtù e in funzione del quale esso ha per lo passato mantenuto l'*equilibrio* fra le innumerevoli ragioni fisico-meccaniche le quali ne hanno costituito le dimensioni, la forma, le altezze e la direzione.

Di coteste ragioni egli non accenna che a talune principali: il volume di acqua, a cagion d'esempio, durante le piene, e la formazione geologica del terreno sul quale si è formato il canale e la pendenza.

Era ben sicuro che, tagliando fuori un braccio come quello di Soroksar, cotesto equilibrio, già stabilito, non poteva non essere perturbato, sebbene a nessuno fosse dato prevedere fino a dove si sarebbero spinte le conseguenze di tale rottura, la quale doveva necessariamente modificare il regime delle acque. Anche prescindendo da peregrine considerazioni, non bisognava dimenticarsi che si trattava di un ramo vitale, che in tempo di piena rappresenta un terzo della potenza e della massa. Avrebbe, secondo il Revy, dovuto bastare questa sola cifra *ad impensierire seriamente coloro alle cure dei quali il fiume era affidato e a distorli da un passo che, quanto a gravità di conseguenze, non ha uguale in nessuno dei fiumi conosciuti, e non avrebbe dovuto mai essere approvato.*

Intorno alla grande operazione, egli narra essere stato chiesto il voto di un chiaro ingegnere d'un paese amico, ma che ciò venne fatto soltanto quando il taglio era cominciato, e questi per conseguenza avrebbe messo sossopra ogni cosa, suscettività e interessi, se avesse provocata una sospensione dei lavori. Non osò farlo ed è naturalissimo. I consultori, se vogliasi averne un coscenzioso parere, bisogna interrogarli a tempo,

e nella maggiore possibile serenità dei loro spiriti, e non quando riguardi d'ogni natura debbono incepparli e, soprattutto, quando, lasciando correre le cose, non incontrino che una responsabilità suddivisa e riversabile sempre su coloro che le hanno, senza loro partecipazione, iniziate — mentre, interrompendone il corso, vadano incontro ad una tutta personale e di impossibile giustificazione pratica. È certo infatti che, se i disastri rimangono impediti dal voto di un consultore, il costui *voto* non può rimanere legittimato agli occhi dei più da fatti che non accadono; mentre esso può venire e viene, non foss'altro che per necessità di difesa, impugnato da tutti coloro i quali vedono per esso attraversati gli imaginarî vantaggi che promettevano e sentono moltiplicarsi contro dai proprî amministrati l'accusa delle prodigate spese e delle frustrate speranze.

Ci vorrebbero degli arbitri singolarmente belligeri per metterli a simili prove. Non si ottiene pertanto lo scopo pressochè mai, quando si propongono loro questioni di troppo pregiudicate.

Bisogna mettere i giudici, per quanto rispettabili, in condizioni tali che la verità del giudizio non sia loro per costare eccessivamente, e la reticenza nulla. Al famoso bivio ha esitato lo stesso Ercole, e non è davvero il caso di metterci la gente mezzana.

Registrazione idrometrica. — Il regime d'un fiume non si scopre certamente *a priori*. Esso non può essere indotto e conosciuto che per successive e costanti osservazioni idrometriche coscienziosamente ed immancabilmente deposte in giornalieri registri, i quali dovrebbero essere avuti in conto di sacri come le leggi del paese. Al Danubio cotesti debitissimi riguardi non furono usati mai. Il Revy si trovò di fronte al dubbio o all'ignoto quando si diede a tutt'uomo a voler mettere insieme un accertato parallelo del passato col presente regime del fiume, nei due periodi che hanno, l'uno per punto di arrivo e l'altro di partenza il giorno dell'interramento del Soroksar.

Egli visitò le varie stazioni sopra e sotto Buda-Pest per ispezionare i registri idrometrici. Trovò le osservazioni di certe stazioni pubblicate dai giornali. Ma non erano, è tosto obbligato ad aggiungere, dei dati presi regolarmente. Al contrario, e proprio nei paesi i quali dovevano maggiormente subire gli effetti della rettificazione, essi erano deficientissimi e ricavati e coordinati nella più strana forma. Ad Ercsény, per esempio, a mezzo circa il ramo Promontor, il registro idrometrico era saltuario e non comprendeva che alcuni anni. La staza, levata e portata via dai ghiacci del 24 febbraio 1876, non era stata più rimessa per due mesi, e così mancavano le più importanti osservazioni, cioè precisamente quelle sul livello della piena.

A Duna-Foldvar, importante città e stazione della compagnia di navigazione del Danubio, i registri idrometrici durante gli ultimi 19 anni erano stati tenuti da un veterano.

Durante cotesti 19 anni, il buon uomo non aveva messo giù neanche una misura diretta (no quite at all) nel suo diario dei livelli, ma soltanto registrate delle differenze di elevazione del pelo senza riferimento ad alcun punto fisso, salvo il caso di qualche singolare fenomeno. Allora soltanto gli balenava la felice idea di mettere nel suo diario una nota come per esempio la seguente: « Addì 26 febb. 1876, a mezzogiorno il Danubio era due centimetri più basso che il 31 dec. 1875, nel qual giorno arrivò a due pollici sotto la chiave del ponte vicino all'angolo di Langer ».

È così che il Revy ebbe, ma soltanto a larghi intervalli, qualche lume sul regime del suo Danubio.

Non è se non da due anni che si ordinò al soldato di scrivere nel suo registro delle *letture* anzichè delle *differenze* giornaliere di alzata o discesa. Ma, aggiunge l'autore, sebbene ciò davvero occorresse, egli è un povero diavolo, mal pagato, sfornito di strumenti e non può in nessun modo cavarsene.

Nel dicembre del 1875 egli ebbe una reprimenda perchè scrisse che l'acqua era alta, senza poter dire quanto sopra lo zero, non ci avendo l'asta graduata.

Allora egli fece un' istanza all' autorità municipale perchè lo volesse in qualche modo aiutare a porvela, e questa gli prestò trenta fiorini austriaci coi quali egli fece fare due idrometri, uno per le alte e l'altro per le basse acque. Eseguito il primo, egli lo mise a posto da sè, fissando di suo capo a 6 metri il livello del 1876, senza che nessun ingegnere del dipartimento idraulico lo istruisse o sorvegliasse comunque in così delicata operazione.

Tornato in giugno, il Revy trovò messo a posto anche l' altro idrometro per le basse acque, ma questa seconda volta pure il buon veterano s'era dovuto ingegnare da sè! E così si potrà dire che nel mese di gennaio del 1876 a Duna-Foldvar, vale a dire a 11 miglia e mezzo dalla capitale dell'Ungheria, fu messo giù nel Danubio, e determinatone lo zero, il primo idrometro, e in quello di marzo il secondo per mano di un disgraziato invalido del terzo reggimento...... pazienza del Genio o dell'Artiglieria, ma degli Usseri!

Esso Revy, nel citato rapporto al conte Andrassy, entra nei più minuti particolari in proposito, e fa benissimo. Senza di ciò non sarebbe stata creduta una così deplorabile noncuranza degli interessi idraulici di un paese, la produttività e sicurezza del quale dipendono principalmente dal regime di coteste non punto studiate acque.

Egli del resto trovò le stesse difficoltà anche negli altri posti. Fu anzi il governo che gli dichiarò netto che dei dati poteva fornirgliene a piacere, ma che egli però si guardasse dal farci troppo a fidanza.

Entrato oramai in cotesto impiccio, bisognava bene che egli a qualche parte si volgesse, e a qualche uscio picchiasse. Picchiò da ultimo, e per sua gran ventura, a quello del sig. Cassian, direttore generale della compagnia per la navigazione del Danubio, e n'ebbe tutte le note idrometriche delle diverse stazioni lungo il corso del fiume. Tali note davano, giorno per giorno, le altezze del fiume alle principali stazioni, per un periodo di 15 anni, vale a dire delle migliaia di numeri, che sarebbero però riusciti impossibili a maneggiarsi senza lo spediente delle rappresentazioni geometriche. Allora egli vi mise subito mano. Costruiti i diagrammi, si cominciò a formare una idea del valore assoluto e dei rapporti delle cifre raccolte.

Col mezzo di essi, dice, si cominciò finalmente a poter vedere ed apprezzare il valore di tutti cotesti dati, che le sole e disgiunte cifre non sarebbero mai riuscite a mostrarci. Si potè inoltre convincersi che nella scelta dei posti e dei momenti pei confronti dei varî livelli del fiume era necessaria la massima precauzione, essendo molte le cause perturbatrici (gli influenti per primi), che disturbavano l'armonia che sarebbe altrimenti emersa dai diagrammi delle diverse stazioni.

Gli fu pertanto giuocoforza limitare i proprî riscontri ai diagrammi di quei periodi nei quali l'azione di tali cause perturbatrici essendo nessuna o poca, il fenomeno veniva ad informarsi soltanto a leggi generali, necessarie e perciò essenzialmente costitutive del regime idraulico del fiume.

I diagrammi dei periodi più soggetti all'azione d'influenza, di rigurgito, vorticosità od altro non avrebbero potuto che aggiungere qualche filo di traverso all'arruffìo delle tante incomposte opinioni esistenti.

Egli ricusò il saltuario e contingente ribelle ad ogni riscontro, e presentò il normale il quale, lucidamente coordinandosi di per sè, può dirsi non solo che offra ma che a dirittura si imponga ai riscontri.

Quella pertanto del Revy non fu la scelta di uno scienziato partigiano il quale ricusi di prendere in considerazione i dati che militano contro alla sua tesi, ma l'intelligente e necessario rifiuto di tutto il materiale di sua natura refrattario all'analisi e all'induzione, e l'allontanamento di quelle complicazioni, sotto l'informe rete delle quali si sarebbero perdute di vista le semplici e grandi linee della legge scientifica.

Il preciso dovere di un ingegnere è per l'appunto quello di rimuovere con sapiente critica le contingenze, e rappresentare le cose nella maggiore normalità e semplicità possibile, mettendo in grado la gente di cogliere col ragionamento, e possibilmente anzi coll'occhio, la verità non accidentale nella più schietta ed evidente delle sue forme.

I DIAGRAMMI. — Essi rappresentano le oscillazioni del Danubio a Buda-Pest durante due periodi.

Il 1° quello che precedette l'interramento del Soroksar. — È la rappresentazione del vecchio regime.

Il 2° quello immediatamente posteriore, cioè dal 1872 al 1876.— È il nuovo.

Nel 1° il Danubio corre biforcato tra Soroksar e Promontor.

Nel 2° è confinato in un ramo solo, il Promontor.

I sei dispari rappresentano il primo periodo, i sei pari il secondo.

Le serie sono accostate a due a due; una linea verticale le divide. Le cifre del vecchio regime sono a sinistra, quest'altre a destra.

I diagrammi sono tutti costruiti allo stesso modo. L'orizzontale è lo zero dell'idrometro, le verticali rappresentano i giorni del mese. — In esse, secondo una scala a piacere, è segnata l'altezza in piedi e pollici alle 8 del mattino. I diversi punti congiunti con una linea rappresentano graficamente le vicende idrometriche durante il dato periodo.

Il diagramma n. 3, per esempio, rappresenta l'agosto 1870; la linea di Buda-Pest sta sopra, quella di Komorn sotto.

È singolare l'armonia fra le due linee spezzate BB e KK. — Se a Komorn il livello si eleva, a Buda-Pest fa il medesimo; così se cala. Vi è nesso, quasi parallelismo. Ciò accusa dipendenza, funzione, come in matematica si dice.

Quante volte noi troviamo che il nesso anzi l'armonia, che tale realmente appare, non è disturbata, possiamo francamente dire *che è in quistione il Danubio solo,* il Danubio *sincero,* diremo così, e che le cifre non esprimono che il suo regime in ordine alle sue altezze.

Un'altra cosa è da notare, un'altra vera armonia. È a un dipresso con 24 ore di ritardo che a Buda-Pest segue l'alzata o la scesa delle acque.

Ciò non è disturbato che dai tributarî o dai ghiacci, nei quali casi la dipendenza fra le due stazioni è talvolta esagerata, tal'altra attenuata, obliterata e perfino invertita.

C'è il caso, per esempio, che un influente, la Waag, tanto per nominarne uno, sia in piena mentre il Danubio si trova basso.

Una tale circostanza sarà ad un punto rilevata dai livelli di Gönyö, di Komorn e di Buda-Pest, perchè in tal caso non solo mancherà il notato parallelismo, ma si avrà talvolta niente meno che una inversione di andamento nella linea, prova evidente che l'acqua del Danubio, la quale passa a Pozsony o a Gönyö, non è sempre la sola a determinare i livelli di Buda-Pest.

Il ghiaccio fa ancora peggio talvolta, perchè produce elevazioni o depressioni improvvise.

Non è da dire che anche i diagrammi dei periodi influenzati da cotesti fenomeni non potessero tornare anch'essi istruttivi e fors'anco preziosi quando che sia, ma la moltiplicità e complicazione dei fattori ne allontana per ora gli studiosi, i quali hanno più vitali e sopratutto più razionali problemi coi quali misurare le loro forze induttive.

Oggi la parte seria dell'idraulico è la ricerca della legge delle velocità, delle portate e dei rapporti di livello fra le diverse stazioni *quando il fiume è sincero.*

Le perturbazioni possono dar lume in appresso, ma bisogna cominciare dal conoscere e formulare la normalità.

« Io ho omesso, dice l'autore nell'ultima parte del suo capitolo intitolato *Diagrams,* tutti i diagrammi invernali per non aver che fare con tutte le perturbazioni prodotte sia dagli influenti che dai ghiacci ; e tra le migliaia di cifre ho scelto quelle che si riferivano a periodi o non punto disturbati, o pochissimo ».

E quantunque di queste schiette dichiarazioni possano giovarsi gli avversarî, la buona fede impone di riconoscere che soltanto seguendo un tale sistema era possibile giungere a quelle nette conclusioni induttive le quali, come si vedrà in appresso, conducono con evidenza irresistibile ad una rigorosa valutazione degli effetti idraulici degli ultimi lavori.

L'Analisi dei diagrammi. — Il diagramma n. 1 si riferisce all'anno 1871, anteriore all'interramento del Soroksar. Durante questo, dal 22 ottobre al 6 novembre, il livello a Komorn decresceva da 2,5 a 1,8.

È segnato con un doppio cerchio il periodo durante il quale il Danubio rimase costante a 2′ 1″ 0‴ dal 27 al 30 ottobre.

A questo periodo ne corrisponde un altro a Buda-Pest, anch'esso racchiuso fra doppî cerchi, durante il quale il livello fu costante a 3′ 4″ 6‴ e precisamente col ritardo di un giorno, cioè dal 28 al 31 ottobre.

La differenza fra Komorn e Buda per questi periodi è 1′ 3″ 6‴; e il livello di Komorn è 1′ 3″ 6‴ sotto quello di Buda.

Il diagramma n. 2 rappresenta il 1873, posteriore all'interramento del Soroksar. Abbiamo a Komorn egualmente un lento ed uniforme decrescere da 2′ 5″ 0‴ il 9 novembre a 1′ 1″ 0‴ il 24 novembre, e a Buda da 4′ 4″ 0‴ a 3′ 4″ 0‴.

Sono segnati con doppio cerchio a Komorn dal 13 al 19 novembre, durante il quale il livello varia di poco, e a Buda dal 14 al 18.

La differenza fra i due livelli è 1′ 9″ 9‴.

Paragonando i diagrammi n. 1 e n. 2 per quasi identiche acque misuranti 2′ 0″ 10‴ sull'idrometro, si vede che il livello a Buda è cresciuto di 6″ 3‴, come risulta dal confronto dei due diagrammi.

Il diagramma n. 3 rappresenta le variazioni di livello nell'agosto del 1870.

A Komorn, dal 2 al 7 agosto, livello quasi identico cioè 6′ 4″ 10‴ e a Buda dal 3 all'8 livello pure identico cioè 5′ 9″ 9‴.

Qui la differenza è 7″ 1‴ e questa volta è la linea di Komorn che sta sopra a quella di Buda.

Nel diagramma n. 4 vi è una differenza di 2′ 3″ 5‴, della quale il livello di Buda si è alzato su quello del 1870.

Nel diagramma n. 5 del 1870 in novembre e dicembre Komorn torna sopra Buda di 9″ 5′.

Nel n. 6 (luglio 1875) Buda è di 1′ 3″ 2‴ sopra Komorn.

Egualmente dunque con una media di acque a Komorn di 8′ 8″ 5‴ abbiamo a Buda fra la media del 1870 e quella del 1875 un aumento di 2′ 5″ 7‴.

Così il confronto fra il diagramma n. 7 e n. 8 ci dà che, a parità di acque nel Danubio cioè 10′ 8″ 11‴ a Komorn nel 1871 e nel 1873, il livello di Buda nel 1873 è cresciuto di 2′ 9″ 2‴.

Nel diagramma n. 7 il Revy introduce un'altra linea di variazioni, quella di Pozsony.

Si hanno così nel diagramma tre linee le quali si seguitano in perfetta armonia.

Una elevazione od una depressione di livello a Pozsony si verifica dopo 24 ore a Komorn e dopo 48 a Buda.

Inoltre, cotesta terza linea corre parallela alle altre. A prima vista sembra una complicazione di intersezioni, ma a guardarci bene si trova che le oscillazioni armonizzano.

Infatti, a ciascun punto del livello di Pozsony risponde nell'ordinata successiva quello di Komorn e quello di Buda nell'altra appresso. Le linee di collegamento pigliano direzioni pressochè identiche.

Qui l'autore richiama lo studio sulla relativa posizione della linea per Pozsony e per Buda la quale, nei periodi già indicati sul diagramma n. 7, colloca il medio livello di Buda di 2″ 3‴ sopra quello di Pozsony pel 1868.

Egli osserva che le due linee mantengono la loro posizione rispettiva fino a non sgarrare d'un quarto di pollice, sebbene ci sieno di mezzo tre anni: l'una essendo del 1871, l'altra del 1868.

Egli insiste giustamente a richiamare l'attenzione su questi riscontri, perchè amendue le date si riferiscono all'antico regime danubiano, quando cioè il fiume correva pei suoi due rami naturali.

Ciò premesso, egli viene a dare le ragioni per le quali nel diagramma n. 7 introdusse la linea della stazione di Pozsony.

L'esame di numerosi diagrammi gli aveva dimostrato che quando il livello di Buda si eleva di tre piedi, il livello del Danubio se ne risente fin su a Gönyö, e che per

conseguenza il riferimento a Komorn, aumentato alla sua volta, viene a diminuire della propria aliquota di elevazione l'effettivo della differenza del livello di Buda. — Gli è perciò che nei diagrammi da 9 a 12 è preso Pozsony in luogo di Komorn. Essendo conosciute le graduazioni delle stazioni intermedie, l'influenza dei tributarî che passano Pozsony può al tutto trascurarsi.

Nel diagramma n. 9 del maggio e giugno 1868 abbiamo a Pozsony 12′ 0″ 4‴ e a Buda 12′ 3″ 0‴, cioè una differenza di 2″ 8‴.

Nel diagramma n. 10 del marzo e aprile 1876 abbiamo a Pozsony 12′ 0″ 0‴ e a Buda 16′ 10″ 9‴, cioè una differenza di 4′ 10″ 9‴.

Osserviamo. Nel 1868 il livello a Buda era soltanto di 2″ 8‴ più alto che Pozsony e nel 1876, con un'identica quantità d'acqua passante da Pozsony, a Buda esso era più elevato di 4′ 10″ 9‴.

È dunque cresciuta la differenza di 4′ 8″ 1‴.

Andiamo innanzi.

I diagrammi n. 11 e n. 12 rappresentano le due grandi piene del 1862 e del 1876.

Abbiamo quivi i profili delle due piene in entrambe coteste città.

Sono per di più segnati i più alti livelli anche a Duna-Foldvar.

Qui ci abbiamo un fatto capitale.

La piena del 1862 a Pozsony fu più grossa che quella del 1876.

E non basta. Nel 1862 inoltre il ghiaccio faceva barra e muoveva poi innanzi fra l'1 e il 2 febbraio producendo grandi oscillazioni di livello per 24 ore, dopo di che venne la grande piena e il livello del fiume crebbe gradatamente il 7 febbraio fino a 22 piedi, calando poi fino al 21.

Nel 1876 il ghiaccio non produsse oscillazioni che durante una giornata. La piena avrebbe dovuto dunque essere minore di quella del 1862 come quella che era preceduta da minori accumulazioni [1].

Ebbene, a Duna-Foldvar la piena del 1862 passò quella del 1876 di 6″ 3‴.

Le quote di Orsoon provano la stessa cosa.

Ora invece se noi consideriamo le due piene del 1862 e del 1876 a Buda troviamo che il più alto livello del 1862 fu 16′ 4″ 6‴ e nel 1876 fu 24′ 6″ 7‴.

Il Danubio a Buda-Pest risulta cresciuto di 8′ 2″ 1‴.

Ma siccome la piena del 1862 superò quella del 1876 di 6″ 3‴, il totale aumento di quota del Danubio a Buda-Pest risulta di 8′ 8″ 4‴.

Confrontando invece i punti di permanenza anzichè i colmi delle piene risulta sempre che la differenza è di più che 8 piedi, differenza la quale può, anche senza

[1] Si guardi egualmente a Duna-Foldvar nel 1862 e nel 1876 ed egualmente si trova quest'ultima piena minore della prima.

Il Revy fa anche giustamente notare come Duna-Foldvar fornisca la diretta ed assoluta misura della relativa importanza delle due piene, sia perchè tutta l'acqua che la tocca deve passare da Buda-Pest, sia perchè essa non ebbe a risentire effetto alcuno dalla chiusura del ramo di Soroksar, poichè sta circa quattro miglia sotto la antica e soppressa biforcazione. Aggiungasi inoltre che non vi era piena la quale inondasse un tratto di paese a Duna-Foldvar la quale potesse avere distrutta una massa anche grossa d'acqua del Danubio esercitando l'influenza di scemare la durata della prima.

Le quote di Pozsony come quelle di Duna-Foldvar provano che la piena del 1862 fu maggiore di quella del 1876.

computi, graficamente cogliersi sui diagrammi, misurando senz'altro con un compasso le distanze fra i livelli medî dei rispettivi periodi.

Tale indiscutibile analisi è seguita da un

Sommario dei diagrammi. — Nell'analisi dei diagrammi il Revy li considerò sempre a due a due, uno anteriore e l'altro posteriore alla rettificazione del 1872 e da ciascuno dei paralleli emerse questo fatto capitale che il livello del Danubio si elevò in seguito a cotesto da lui deplorato lavoro.

Tali risultamenti sono graficamente rappresentati nella figura sommaria n. 13 che li raccoglie tutti.

Sono sei paia di diagrammi che determinano come risultamenti sei punti i quali vengono rappresentati nel seguente modo.

Sopra la orizzontale OX si marcano delle distanze uguali che, rappresentando dei piedi, vanno da 0 a 18.

I numeri rappresentano le profondità a Buda-Pest durante il vecchio regime del fiume, cioè prima del 1872.

S'è veduto che i diagrammi n. 1 e n. 2 hanno determinato che il livello del fiume a Buda crebbe di 6″ 3‴ sopra una profondità di 3′ 4″ 4‴ di acque prima del 1872.

Ebbene, sulla OX alla distanza di 3′ 4″ 4‴ dallo zero si innalza una verticale e su questa si prende una lunghezza eguale a 6″ 3‴, e si ottiene il punto A.

Con un simile processo si ottengono B, C, D, E ed F del diagramma sommario n. 13.

La curva che passa per questi punti rappresenta la legge che ha regolato l'aumento di livello del Danubio a Buda-Pest in seguito alla rettificazione del 1872.

Il Revy confessa di avere trovato altri punti parecchi collo stesso metodo e che alcuni di questi avrebbero fatto alquanto cambiare direzione alla curva.

Ad ogni modo, e con una onesta approssimazione, la AF rappresenta incontestabilmente la legge effettiva sotto la quale il livello del Danubio nelle varie profondità ebbe ad elevarsi dopo l'interramento del Soroksar.

Essa presenta i seguenti fatti:

Quando l'idrometro segna da zero a due piedi, gli è come se il Soroksar non fosse stato interrato. Il livello non se ne risente.

Come siamo a tre, il Danubio comincia a turbarsi per la perdita di cotesto braccio, ed il suo livello si eleva di un 3 pollici per compensarne la mancanza.

Da tre a cinque piedi, sopra lo zero dell'idrometro, la chiusura del Soroksar influisce maggiormente e il livello deve alzarsi di 2′ 1″.

Quando si monta tra i 5 e i 10, il Danubio accusa ognora più la necessità del Soroksar, ma il livello non sorge di molto, perchè il Promontor è ancora abbastanza largo perchè un aumento di 2′ 6″ sul livello di prima basti a contenere tutto quel maggior volume di acque che prima erano convogliate dall'altro braccio.

Ma al di sopra dei 10 piedi non c'è più nè compensi nè temperamenti che valgano e la linea monta uniformemente colla direzione di circa 45°.

Dai 10 piedi in su, la mancanza del Soroksar è così terribilmente sentita, che quelle acque le quali prima del 1872 a Buda-Pest avrebbero avuto un'altezza di 18 piedi, la superano di 10′ 6″ montando a 28 $^1/_2$!!!

Il dilemma. — È bene che lo studioso possa intanto vedere a colpo d' occhio e confrontare successivamente, e in ordine ai diversi stadî idrometrici del fiume, gli effetti dell'antico e del nuovo regime sul livello delle acque a Buda-Pest.

Tutte le cose pari, vale a dire con una identica quantità di acqua passante per l'ora unico canale (*for identical water passing*, dice l'autore) si hanno oggi delle formidabili differenze.

Eccone la tavola comparativa nella quale non occorre dire come la posizione dello zero ai varî idrometrici di Pozsony, Komorn e Buda rimanga al tutto senza importanza, essendochè i diagrammi marchino le differenze indipendentemente dalle altezze assolute. È però coscienzioso nuovamente avvertire che i dodici diagrammi presentati vennero scelti fra ventiquattro, come quelli le cui circostanze si presentavano più favorevoli a far risaltare le differenze con precisione maggiore. Del resto, si fossero anche presi quegli altri, la variazione non avrebbe oltrepassato un paio di pollici.

Antico regime — Altezze idrometriche a Buda-Pest prima del 1872			**Nuovo regime** — Altezze idrometriche a Buda-Pest dopo il 1872			**Elevazione** del livello del Danubio a Buda-Pest dopo il 1872		
piedi	pollici	linee	piedi	pollici	linee	piedi	pollici	linee
0	0	0	0	0	0	Impercettibile		
1	0	0	1	0	0	id.		
2	0	0	2	0	0	id.		
3	0	0	3	3	0	0	3	0
4	0	0	5	3	0	1	3	0
5	0	0	7	1	0	2	1	0
6	0	0	8	4	0	2	4	0
7	0	0	9	4	6	2	4	6
8	0	0	10	5	6	2	5	6
9	0	0	11	6	6	2	6	6
10	0	0	12	8	6	2	8	6
11	0	0	14	5	6	3	5	6
12	0	0	16	5	6	4	5	6
13	0	0	18	5	6	5	5	6
14	0	0	20	6	0	6	6	0
15	0	0	22	6	0	7	6	0
16	0	0	24	6	0	8	6	0
17	0	0	26	6	0	9	6	0
18	0	0	28	6	0	10	6	0

Questa tavola la quale ricapitola ogni cosa e conchiude da sè, non si può dire lavoro della mente del Revy ma della sua mano. Essa è scritta, per così dire, sotto la dettatura del fiume e ne contiene le confessioni.

Il dilemma è netto oramai.

O vanno negate le cifre o va ammessa la conclusione, che l' ultima disastrosa piena non è stata che una protesta della natura troppo leggermente contrariata dalla passione dei rettifili, e che i lavori del 1872 creano un grave e costante pericolo alla capitale dell'Ungheria, pericolo che naturalmente risale a non poche tra

le più importanti città danubiane, è ciò in una proporzione la quale viene attenuata dalle distanze assai meno di quanto generalmente si pensa.

Una digressione. — E qui mette conto di fare una digressione, se tale può chiamarsi il discorrere d'altre acque ma in ordine a questioni tutt'altro che diverse.

Che ogni elevarsi del livello prodotto da sezioni ristrette, cioè da erogazioni soppresse, faccia risalire a monte la propria intumescenza è cosa, non solo razionale, ma intuitiva e non è chi possa dubitarne.

Però se è generale l'idea del fatto, è tutt'altro che generalmente nota la misura di esso, laonde vediamo troppo spesso le preoccupazioni d'idraulici distinti limitarsi alle sole stazioni più prossime alle sezioni pericolosamente ristrette.

Invece la verità è che nei fenomeni di rigurgito la testa di una intumescenza marcia pressochè così rapida e diritta come l'onda solitaria.

Del resto se c'è fenomeno al quale un tal fatto sia meno disanalogo esso è quello del risalimento della marea su dalla foce d'un fiume.

L'onda di lieve tumescenza più che una injezione può dirsi un versamento e fornisce non disprezzabili criterî di paragone.

Eccone un elemento, per esempio:

Un'ondicella del Rio della Plata alta 16 pollici porta l'alta marea a Buenos-Ayres e risale su da Buenos-Ayres altre 88 miglia la più gran parte delle quali (cioè sessantaquattro) su pel Palmas, che è un ramo del Paranà. Essa viene ancora a riprodursi, sebbene molto sensibilmente ridotta alla sezione superiore riportata nell'*Hydraulic of great rivers*, cioè tocca press'a poco il centinaio. L'onda mantiene la medesima lunghezza orizzontale dal suo primo apparire al suo terminare. Dal Plata alla detta sezione del Palmas non è ridotta che al quarto della sua altezza.

Le leggi, secondo le quali vengono scemando le ordinate dell'onda, differiscono caso per caso, onda per onda, e sembra che dipendano dalla loro altezza e dal livello a cui si trova il Plata nel momento della loro formazione. Mentre il Revy prende un'onda E e la trova riprodotta alla sezione di Palmas con una metà della sua dimensione verticale, le altre variano le loro proporzioni fra una metà e un quarto di tale altezza.

Ora se dal Plata si risale con sì piccola onda ad una così alta sezione del Palmas, chi potrà dubitare che le piene di Buda non debbano elevare assai considerevolmente il livello di Komorn e di Gönyö? L'onda, giova ripeterlo, è nella sua normalità un versamento non una injezione. — La cacciata è il rincaro alla spinta, non la sua cagione o il suo inizio. Quindi dal rigurgito viene l'onda fluviale analoga alla marittima.

Però non bastano affatto i diagrammi dati dal Revy di paragone fra Buda e Komorn. Non bastano nemmeno quelli di Buda con Poksony. Bisogna rimontare a Strasburgo, sottrarsi alle influenze del rigurgito, avere le cifre assolute oltrecchè le relative, e poter ragionare proprio sulle altezze, anzichè limitarsi a farlo sulle differenze.

È vero che cotesto lavoro di confronti viene poi alla sua volta perturbato dall'influire dei corsi tributarî, ma a chi conosca le sezioni e i volumi singoli non sarà impossibile fare la loro parte a cotesti incidenti, e dare alle sue induzioni tutta

quella forza della quale il sapiente lavoro del Revy lascia certamente ancora qualche desiderio.

Le presenti considerazioni non vengono certamente dettate da alcun partito preso contro i rettifili i quali, nei tronchi inferiori, possono venire sovente praticati con reale vantaggio. Esse non sono nemmeno ispirate da alcuna reminiscenza delle desolanti teoriche (come giustamente le chiama l'ing.re Maganzini nella sua notabile relazione intorno ai lavori idraulici dei Paesi Bassi testè pubblicata dal Ministero dei lavori pubblici) del Prony e del Cuvier. Dopo le importanti osservazioni dell' illustre Lombardini sul Po, luminosamente confermate dai posteriori rilievi, le conclusioni di quei due valentissimi fisici appaiono ciò che effettivamente furono, vale a dire frettolose e dottrinarie.

Risulta al tutto smentito (meno il caso della protrazione delle ghiaie, possibile nei soli tronchi superiori) che il fondo dei fiumi più o meno rettificati e arginati si venga successivamente elevando, e che il loro avvenire consista in una allarmante pensilità rovinosa a mantenersi e più rovinosa a trascurarsi.

Conclusione questa dalla quale basterebbe a ragionevolmente distorne il considerare, che anche qualora il fatto della elevazione del fondo risultasse reale, non potrebbe a ogni modo supporsi indefinitamente progressivo dovendo esso in ogni peggiore ipotesi trovare il proprio immancabile limite nella graduale soppressione della pendenza.

Maturatasi questa, o la spinta delle acque superiori dovrebbe riportar via ciò che si fosse fin allora cacciato innanzi e riscavare il letto, o conquistarne un nuovo essendo contrario ad ogni legge sia teorica come sperimentale, ed alla stessa razionale intuizione, la indefinita marcia di un grave in contropendenza.

Nè il Revy medesimo, per quanto preoccupato dai suoi precedenti scientifici e dal suo affetto alle contrade minacciate, e perciò stesso tentato a rincarare sulle minaccie del nuovo regime danubiano, tenne, come si è veduto, parola ed insinuò timore alcuno di sollevazioni del fondo, fenomeno forse non impossibile nel caso attuale, per le condizioni poco favorevoli del tronco immediatamente successivo. Forte di fatti la cui rappresentazione e coordinazione servivano abbastanza alla sua tesi, egli non pensò a cercarle conforto di teoriche le quali ancora conservano autorevoli fautori e ritraggono lustro da nomi a ogni modo gloriosi negli annali della scienza.

Quei fenomeni rappresentati in una forma grafica sono assai facilmente traducibili in formula analitica, la quale mancherà certamente di universalità, ma, rispondendo ad una particolare serie di veri, rappresenta una legge che ha la forza di una legittima profezia della scienza.

L'idraulica, la cui materia d'osservazione presenta analogie e riscontri ma pressochè mai identità di fenomeni, non può rigorosamente coordinare nè coscienziosamente generalizzare, e deve nelle sue astrazioni starsi contenta alla enunciazione di massime anzichè di formule. Però di queste pure viene la volta. Ciascun fiume è un individuo da studiare a sè — ha la propria e ben determinata individualità dal largo ma costante complesso di condizioni della sua origine, del suo bacino e della media dei fenomeni atmosferici della sua plaga; è infine un ente le cui varietà possono ridursi a unità e concretare in forme grafiche od analitiche tutto ciò che potrebbe chiamarsi il suo temperamento.

L'idraulica individuale di ciascun corso d'acqua può e deve cercare delle formule quanto la generale deve esserne per ora parca anzi avara. — Ebbene cotesta induzione speciale del regime danubiano non si è creduto, pare dagli autori del combattuto progetto, che mettesse abbastanza conto di raccapezzarla per mezzo di studî e di pazienti osservazioni.

S'è già troppo veduto nella prima parte della presente Memoria come al progetto della regolazione del Promontor e della soppressione del Soroksar non sia andata innanzi nessuna coscienziosa ricerca intorno alle velocità, alle portate, ai livelli, a tutto infine il complesso dei fenomeni costituenti un regime idraulico, sebbene il nuovo lavoro avesse il duplice scopo non solo di modificare la direzione del corso ma altresì di limitare la capacità dell'alveo. Nulla più evidente della necessità di fare a se medesimi parecchie interrogazioni prima di proporre un taglio qualsiasi. La prima è la seguente: la tortuosità del tratto di letto che si vorrebbe rettificare, viene essa dalla reale tendenza del fiume a distribuire sopra una più lunga linea la propria pendenza? In altre parole, codesta deviazione dalla linea di massima pendenza è essa dovuta alla necessità di mantenere quelle condizioni di direzione e di velocità le quali sono la risultante di tutte le forze o l'obbedienza a tutte le leggi alle quali il fiume ha sottomesso se medesimo durante tutto il suo corso precedente? Ove tutte le considerazioni meccaniche e geologiche ci assicurino che i giri apparentemente viziosi furono determinati dalla opportunità di distribuire le pendenze o da quella di obbedire al principio naturale della ricerca della linea la quale presenti le minime resistenze, nulla vi può essere di più contrario alla natura che venire aumentando arbitrariamente le cadute e pigliare di fronte quelle difficoltà che la corrente aveva preferito di girare.

La linea retta è il più breve cammino in geometria, non altrove.

In pratica la linea più breve non è già la più corta ma quella che può essere percorsa in meno tempo e con meno sforzo. La natura è anzi tutto economica. Tale è il principio costante e sovrano al quale essa ha informato le sue leggi del moto; il cammino di un corpo in libero movimento è il più breve nel solo caso che questo sia anche il più agevole. Tra il percorrere più spazio e l'esercitare uno sforzo sproporzionatamente maggiore, la natura si appiglia sempre al primo partito. Nè la potenza, di qualsiasi spinta iniziale, aiutata da qualsiasi prepotenza di forza acceleratrice basta a mettere d'accordo la fisica colla geometria, e far percorrere al corpo, per quanto sollecitato, la linea retta. Il projettile stesso non gira l'ostacolo assai più spesso che non lo fori? C'è nulla al mondo di più frettoloso e strapotente del fulmine? Certo no. Eppure esso è la negazione della linea retta e trova che, fisicamente parlando, la strada può essere più lunga nello spazio e più breve nel tempo.

La dimensione è una cosa e la percorribilità una tutt'altra.

Ora perchè la retta dovrebbe essere in tutti i casi l'aspirazione, diremo così, delle masse acquee se non è nemmeno quella delle elettriche sebbene smisuratamente più impazienti di scaricarsi?

Un tronco rettificato in tutt'altro senso da quello della linea delle minime resistenze viene da ultimo a trovarsi in una idraulica contraddizione coi suoi tronchi superiori; esso trova alterati i rapporti e rotti i nessi già stabiliti tra le forze, il

volume, le velocità e le pendenze che pure furono gli elementi in funzione dei quali esso si era trovato l'assetto e costituito il regime. Non ci sarebbe disastro il quale non fosse meritato da chi andasse deliberatamente contro alle leggi naturali.

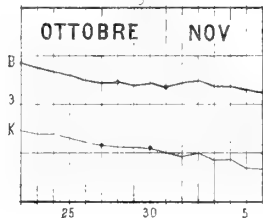
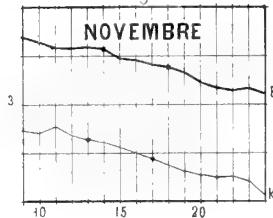
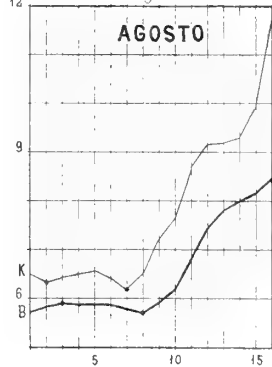
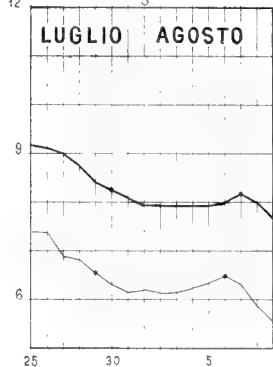
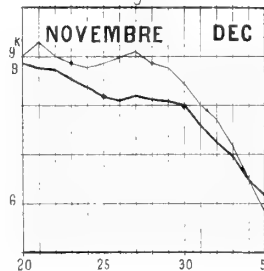
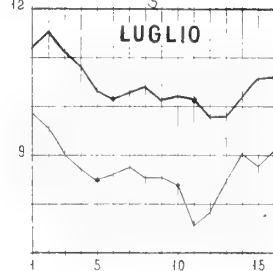
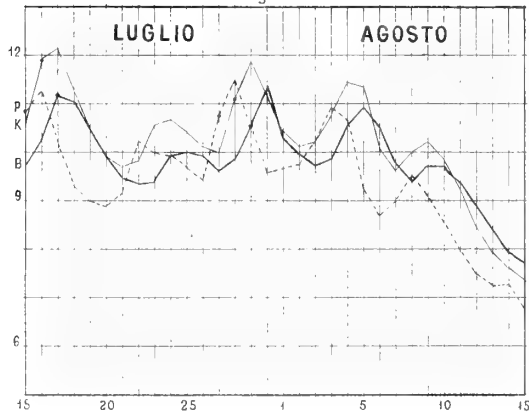
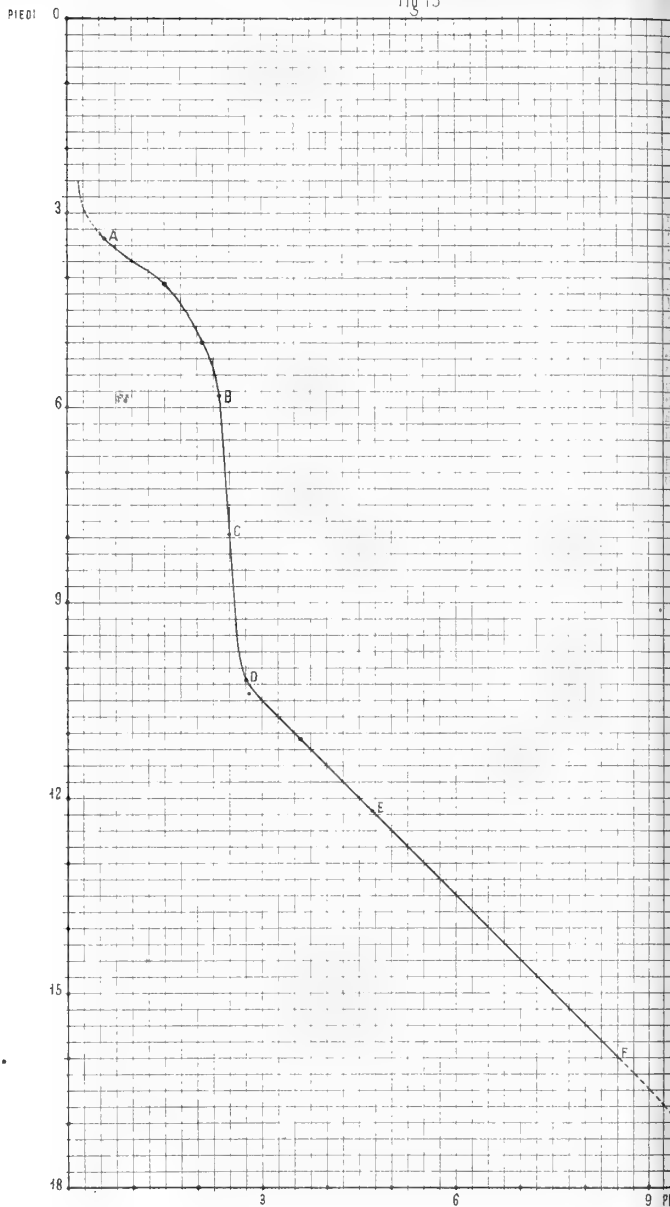
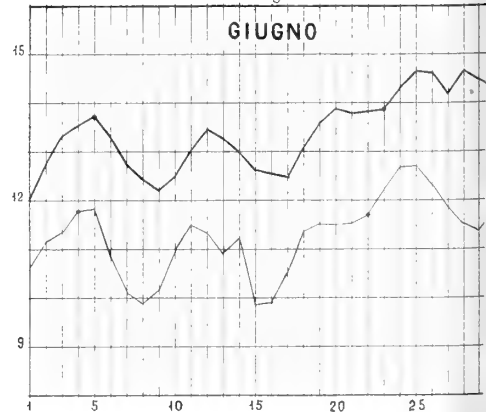
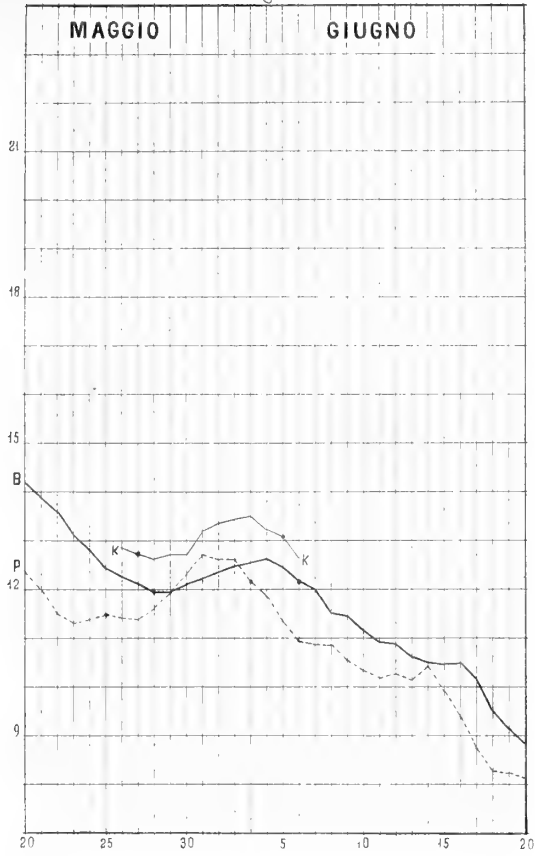
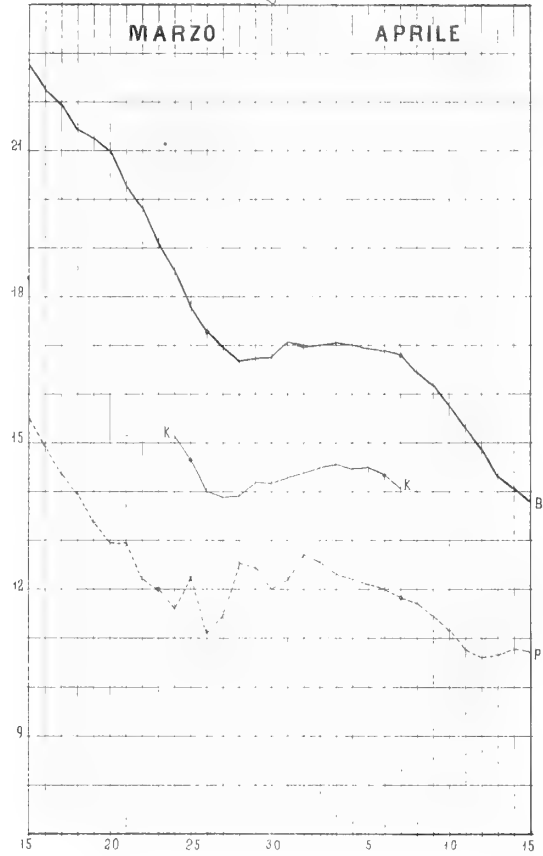
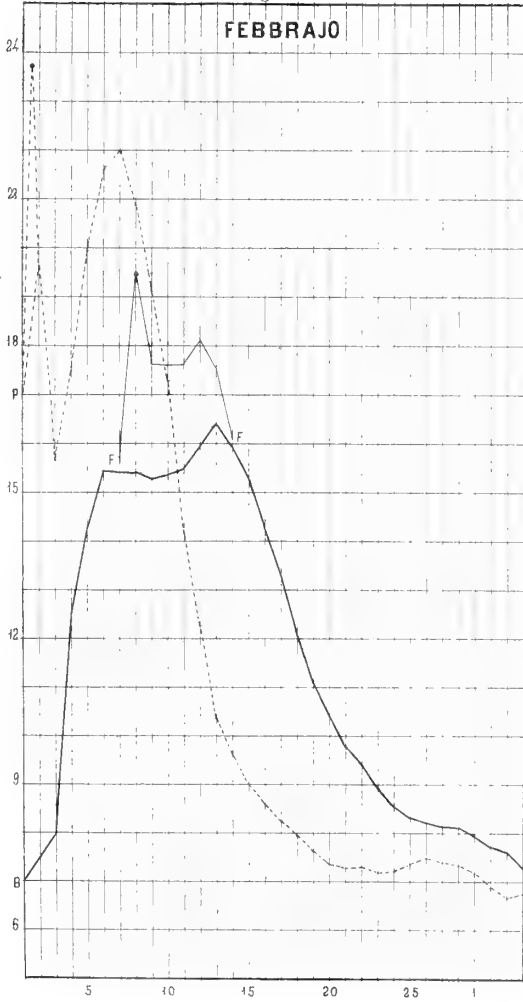
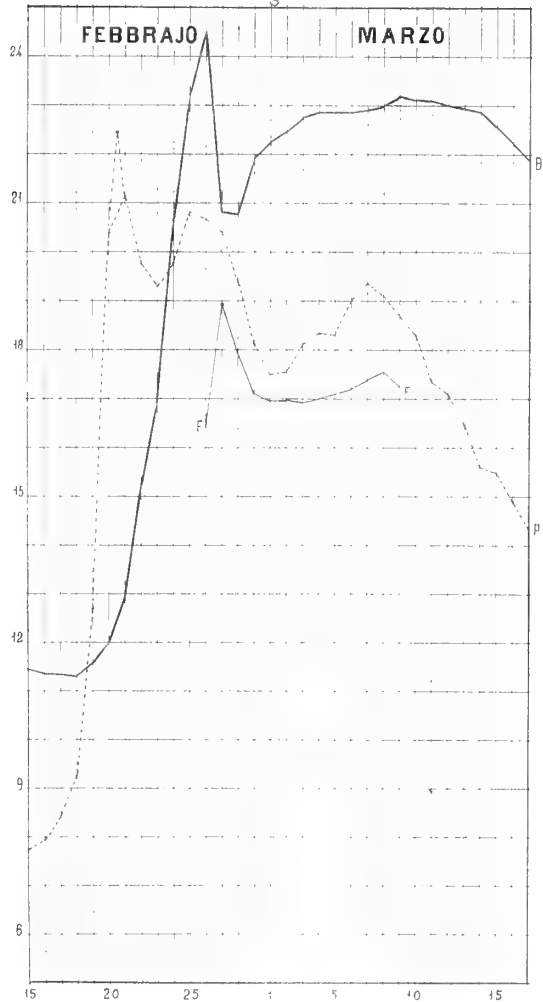
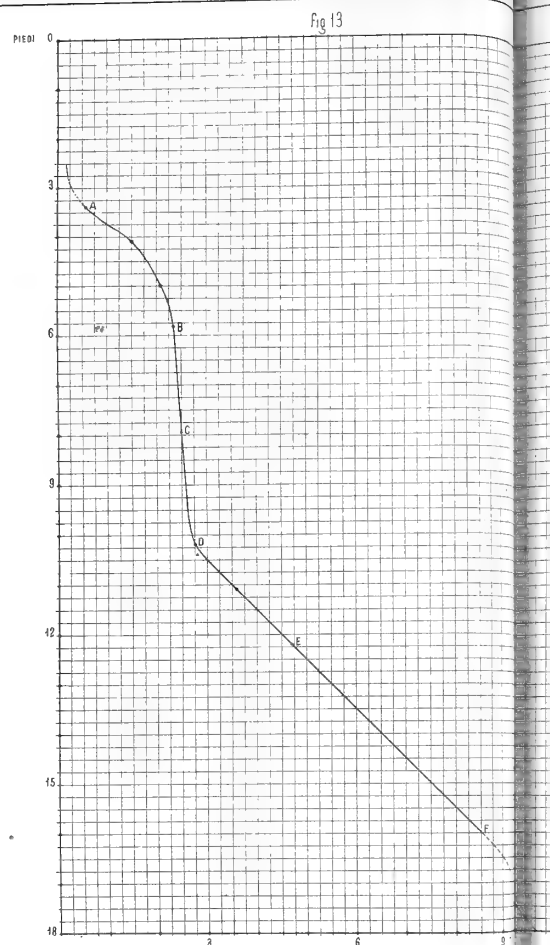
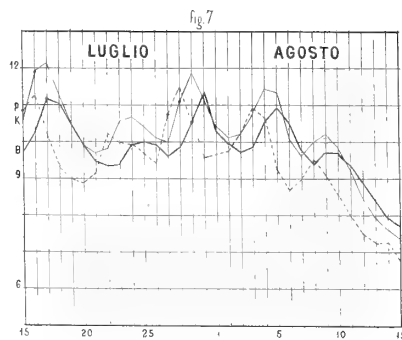
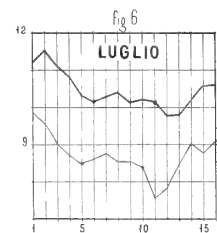
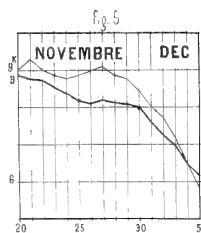
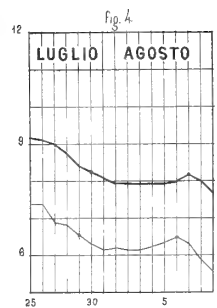
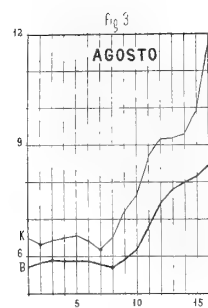
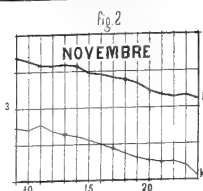
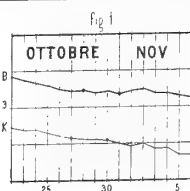
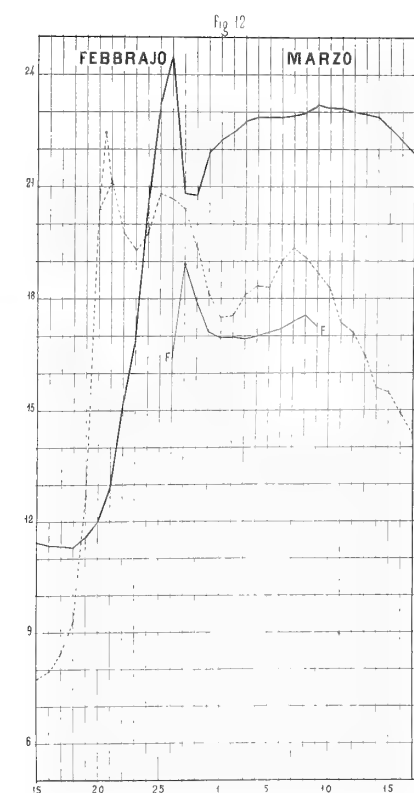
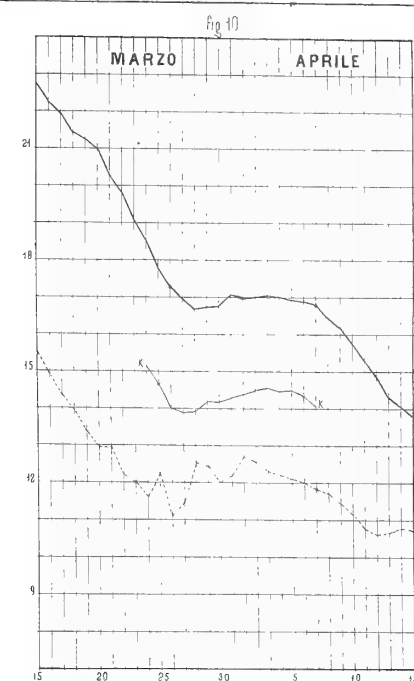
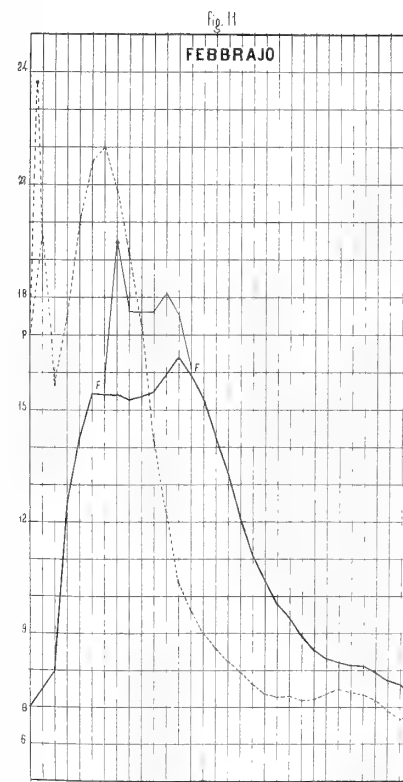
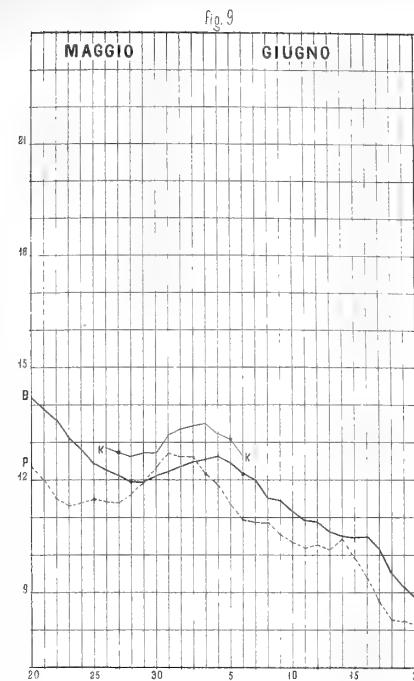
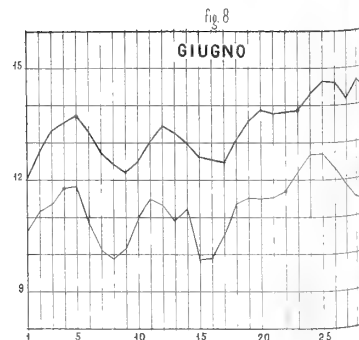
Se poi invece che per supremo motivo di distribuire la pendenza e temperare le velocità, il fiume siasi fatto altra volta tortuoso solo in conseguenza di qualche accidente topografico al quale abbia dovuto in certa guisa rassegnarsi contraddicendo al proprio indirizzo e solo per seguire la linea delle minime resistenze, o per primitiva necessità di depositare le proprie ghiaie sopra una maggiore sviluppata; se il gomito non si presenti eccessivamente risentito; se sopratutto la capacità del nuovo alveo possa (seguendo un tracciato il cui asse si trovi approssimativamente sul prolungamento del filone) equivalere nella erogazione delle acque, e ciò con un temperato aumento di velocità al quale nessun prossimo successivo restringimento di sezione possa mettere ostacolo e dare rigurgito; se tutte queste condizioni, diciamo, si verificano, un rettifilo diventa realmente un servigio reso alla natura e viene immancabilmente compensato dai suoi favori.

Tale è stato il caso per es. della rettificazione del fiume Lek a Wisk-bij Duurstede, del quale noi vediamo a pag. 100 della citata relazione sulle opere idrauliche dei Paesi Bassi, che il regime non rimase sensibilmente mutato, o se rimase, fu piuttosto a vantaggio.

Bisogna essere lealmente sperimentali ed accettare la statistica sia per lodare il rettifilo del Lek che per deplorare profondamente quello del Danubio, il quale del resto, anche ragionando *a priori* e partendo dal solo dato delle masse acquee, sarebbe parso subito quel che risultò, cioè funesto, a chi non avesse mancato di farsi l'ultima delle domande testè enumerate. L'equivalenza per l'erogazione tra il nuovo alveo e l'antico si annunziava tosto come affatto insperabile, non potendo il solo Promontor leggermente modificato riuscire eguale a se stesso più al Soroksar, nè potendosi avere un aumento di velocità capace di compensare la insufficienza dell'alveo, essendochè il colle di Gellert limitavagli la sezione immediatamente a valle.

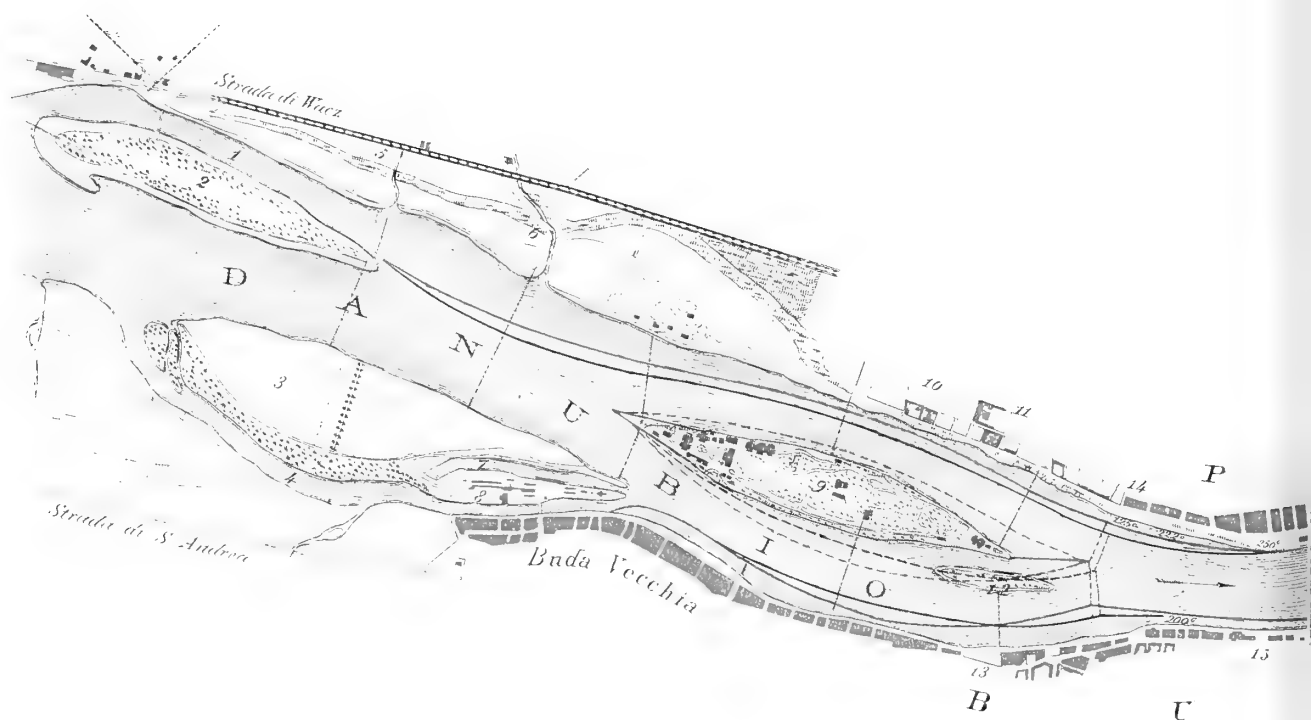
Ma prescindendo da tutti gli argomenti *a priori*, se tali possono chiamarsi questi rimane ora ai non fortunati costruttori da piegare il capo, non già agli avversarî, ma alla natura, e propugnare essi medesimi la riapertura del tronco otturato.

Tutto ciò, s'intende, *si vera sunt exposita,* vale a dire, se i registri della società di navigazione che il signor Revy ha incarnato ne' suoi diagrammi sono, come il reciproco riscontro e l'armonia del diagramma sommario indurrebbero a credere, perfettamente attendibili.

Se invece i fatti per avventura risultassero dubbî o diversi, è del più grande interesse di tutti che il mondo scientifico ne venga prontamente ed esattamente informato.

Lit. Mantelli Roma

SGUARDO TO

INTORNO AI LAVORI DELLA RE

Spiegazione de

—— La linea originaria
—— La linea modificat

1 Porto di Pest nuovo
2 Spiaggia di Pest
3 Grande Spiaggia
4 Braccio del Danubio di Buda Vecchia
5 Canale di Kovzori
6 Braccio di Rakos Palota
7 Porto di Buda Vecchia
8 Fabbrica di Bastimenti

9 Spiaggia di Margherita
10 Molino a Vapore cosidetto Vittoria
11 Molino a Vapore, cosidetto Pannoni
12 Spiaggia di Kus
13 Stabilim.to di sdazio cosidetto Imper
14 Empiatura cosidetta Tüköry
15 Piazza cosidetta della Bomba
16 Piazza Francesco Giuseppe

RAFICO

ZIONE DEL DANUBIO

regolazione

17 Gran ponte di ferro
18 Piazza della Parrocchia
19 Palude Palatina
20 Edifizio della Dogana
21 Monte di S. Gerardo
22 Molino a Vapore cosidetto Concordia
23 Ospedale Militare
24 Ponte di Macello
25 Spiaggia di Kopasz
26 Ponte della Strada Ferrata
27 Orto Palatinale
28 Magazzini militari per ferro
29 Empiatura della chiusura
30 Empiatura fibbiale
31 Diga
32 Locanda al confine di Soroksar

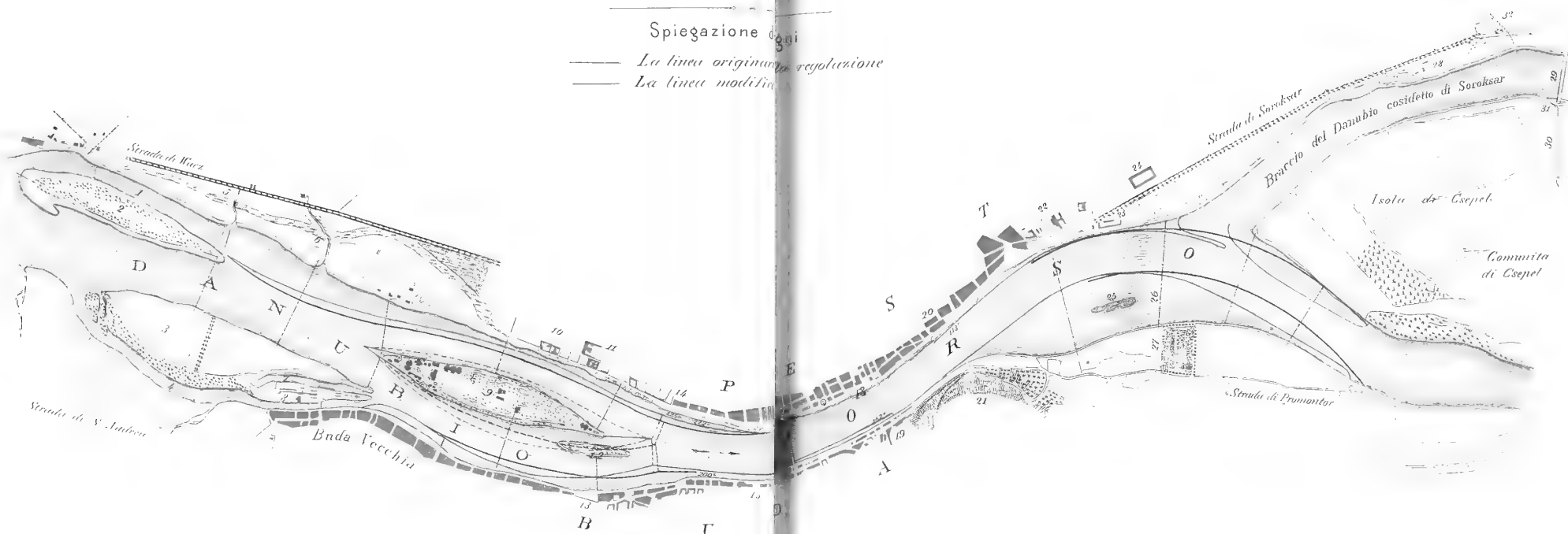
Lit. Martelli Roma

SGUARDO TO RAFICO

INTORNO AI LAVORI DELLA R AZIONE DEL DANUBIO

Spiegazione d gni

La linea originar regolazione

La linea modific

1 Porto di Pest nuovo
2 Spiaggia di Pest
3 Grande Spiaggia
4 Braccio del Danubio di Buda Vecchia
5 Canale di Korzoru
6 Braccio di Rakos Palota
7 Porto di Buda Vecchia
8 Fabbrica di Bastimenti
9 Spiaggia di Margherita
10 Molino a Vapore cosidetto Vittoria
11 Molino a Vapore, cosidetto Pannoni
12 Spiaggia di Kus
13 Stabilim.to di sdazio cosidetto Impe
14 Empiatura cosidetta Tükory
15 Piazza cosidetta della Bomba
16 Piazza Francesco Giuseppe
17 Gran ponte di ferro
18 Piazza della Parrocchia
19 Palude Palatina
20 Edifizio della Dogana
21 Monte di S. Gerardo
22 Molino a Vapore cosidetto Concordia
23 Ospedale Militare
24 Ponte di Macello
25 Spiaggia di Kopusz
26 Ponte della Strada Ferrata
27 Orto Palatinale
28 Magazzini militari per ferro
29 Empiatura della chiusura
30 Empiatura Fibbiale
31 Diga
32 Locanda al confine di Soroksar

Lit. Martelli Roma

Sulle tracce attribuite all'uomo pliocenico nel Senese.

Nota di CARLO DE STEFANI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 dicembre 1877.

Il chiarissimo prof. Capellini, nel 1876, ha pubblicato la descrizione e la figura di alcuni tagli segnati sopra ossa di cetacei trovati fossili ne' terreni pliocenici di Toscana, e particolarmente in quelli del Poggiarone presso Siena (¹). In quelle incisioni, egli ha creduto trovare una prova evidente della presenza dell' uomo durante l'epoca pliocenica, e, come suole accadere, molti hanno prestato fede senz'altro alle sue affermazioni, altri ne hanno dubitato, facendo della cosa una questione di principî, piuttosto che una questione di critica spassionata ed imparziale.

Tosto che udii attribuire all' uomo i tagli nelle ossa di *Balaenotus* del Poggiarone, sorsero dei dubbî in me che conoscevo alquanto i dintorni di Siena, e che avevo vedute parecchie conchiglie raccolte dal prof. Pantanelli nello stesso terreno del *Balaenotus*, in una escursione fattavi col Capellini. Manifestai taluni dubbî fin da principio allo stesso prof. Capellini, e li esposi più tardi altrove (²). Recentemente andai sul posto medesimo nel quale è stato trovato il cetaceo, e feci la gita col geologo Theodor Fuchs, col cav. Z. Bosniacki, e col prof. dott. Pantanelli: ora appunto mi propongo d' esporre i risultati delle mie osservazioni fatte e per l'innanzi, ed in quella occasione; intendendo con questo unicamente di recare qualche contribuzione nell'importante questione sollevata dall'illustre professore.

Chi si parta da Siena e prenda sempre la strada grande che va direttamente ad Arezzo, passa le Taverne d'Arbia ed il ponte sull'Arbia; seguitando entra in Val di Biena, e rimanendo ognora a poca distanza dalla strada ferrata, passa oltre il poggio nel quale è un foro della ferrovia, poi lascia addietro una piccola osteriuccia sulla strada. Poche centinaia di metri più su di questa, sui poggetti che sono a destra della Biena, ma a sinistra della strada per chi viene da Siena, si vede la casa colonica del podere detto il Poggiarone, nel quale furono trovati i resti del *Balaenotus*. Tutti i bassi colli di quei luoghi costituiti dal terreno pliocenico, sono per lo più rotondeggianti, e disposti presso le cime a guisa di piccoli coni ordinati in serie, e solcati dalle acque, come si vede nello stesso terreno alla base dell'Apennino

(¹) G. Capellini, *L'uomo pliocenico in Toscana.* Resoconto dell' Accademia delle scienze di Bologna, 25 novembre 1873. — *L'uomo pliocenico in Toscana.* R. Accademia dei Lincei p. 3 t. II, 1876.

(²) Rassegna semestrale delle scienze fisico-naturali in Italia p. 162. Firenze, 1876.— Stazioni preistoriche nella Garfagnana (Archivio per la Antropologia e la Etnologia vol. VI) 1877.

dell'Emilia. Il terreno è quasi esclusivamente argilloso, perciò incolto, spopolato e presso che deserto. Solo qua e colà si vede qualche piccolo banco di sabbia gialliccia; l'argilla all'esterno è cenerina, ma quando non sia ancora esposta all'aria è scura assai come il Crag di Anversa, per causa della grande quantità di sostanze organiche e di carburi d'idrogeno che essa contiene e che appunto quando rimangano all'aria ed al sole svaniscono e lasciano la roccia scolorita. I fossili non si trovano limitati a taluni banchi, come spesso avviene, ma quasi si possono dire diffusi in tutta la massa, con molta uniformità di specie, la qual cosa può mostrare la poca variabilità del fondo nel quale viveano.

Nei dintorni del Poggiarone gli strati hanno una piccola ma pur sensibile inclinazione verso SE. Dalla direzione della casa colonica scende un poggetto, sulla sinistra del quale si presentano le testate più alte degli strati, spoglie affatto di vegetazione, talchè vi si può vedere benissimo tutta la serie loro, e si può scegliere quella via per salire al luogo nel quale giaceva il *Balaenotus*. Per fissare meglio le idee riprodurrò la successione degli strati nello spaccato seguente, che ora passerò a descrivere.

I. Argille a *Natica lineata* Lck. (zona coralligena) metri 21.
II. Sabbie con bivalvi (zona delle laminarie) metri 9.
III. Argille a *Natica millepunctata* Lck. (zona coralligena) metri 9.
IV. Come III, metri 11.
V. Come III e IV. *Balaenotus*
VI. Conchiglie della zona delle laminarie.
VII. Come III, IV e V.

I. Immediatamente sopra al livello della strada è una serie di argille, alta circa 21 metri, nella quale sono i fossili seguenti (1):

**Corbula gibba* Ol. - L. C. A. — **Cytherea multilamella* Lck. - C. A. — **Cardium aculeatum* L. - L. — **Arca diluvii* Lck.- C.— **Nassa semistriata* Broc. - C. A.— *N. serrata* Broc. — *N. serraticosta* Bronn. — *Terebra Basteroti* Nyst. — *Ranella marginata* Brong. — *Murex torularius* Lck. — **Fusus rostratus* Ol. - L. C. — *Pleurotoma Mortilleti* May. — *P. intermedia* Bronn. — *P. turricula* Broc. — *P. cataphracta* Broc. — *P. Coquandi* Bell. — *Drillia sigmoidea* Bronn. — **Chenopus pespelecani* L. - L. C. A. — **Ringicula buccinea* Broc. L. - C. — **Pyramidella plicosa* Bronn.- A. — *Natica lineata* Lck. (*N. propinqua* Pecch.) — **N. millepunctata* Lck. - Lt. L. C. — *Solarium simplex* Bronn. — **Turritella subangulata* Broc. - C. — *Turritella communis* L. (L. C.?). — *Vermetus intortus* Lck. — *Dentalium fossile* L. — *D. elephantinum* L.

Sul pendio del poggio, insieme con questi fossili si trovano pure dei grossissimi *Pectuncoli* che si potrebbe credere derivassero dai medesimi strati, ma invece provengono da strati superiori che or ora vedremo. Negli strati esaminati, intanto, è

(1) Per questo strato, come pel successivo, accennerò con asterisco le specie viventi nel Mediterraneo, indicando poi con A. le specie le quali vivono nella zona che i malacologi dicono degli abissi, con C. quelle della zona coralligena, con L. quelle della zona delle laminarie e con Lt. quelle della zona litorale. Non ripeterò le indicazioni pegli strati successivi, perchè non si trova in essi alcuna specie vivente che non sia indicata anche nei due primi.

molto abbondante un fossile caratteristico pei dintorni di Siena, che è la *Natica lineata* Lck., mentre vi è piuttosto rara la *Natica millepunctata* Lck. La *Natica lineata* segna un orizzonte costante negli strati sedimentati a varia profondità, ed appartiene ad uno dei piani meno recenti del pliocene senese. Infatti, nei sedimenti litorali, sotto le sabbie turchine a *Natica lineata*, sono strati alquanto salmastri a *Nassa pulchra* D'Anc., *Columbella curta* Bell., *Pollia exacuta* Bell., ecc., e strati d'acqua dolce o d'estuario con *Neochilus simplex* Fuchs, *Stalioa acuta* De Stefani, *Cerithium nodoso-plicatum* Hörn., ecc.

II. Sopra al banco con *Natica lineata*, si trova uno strato di sabbia non grossolana, gialliccia, alto circa 9 metri, nella cui parte superiore sono i seguenti fossili:

Corbula Deshayesii Sism. — **Venus fasciata* Da Costa. - L. C. — **V. ovata* Pen. (minor). - L. C. A. — *V. excentrica* Ag. — **Pectunculus glycimeris* L. (*P. polyodontus* Broc.). - L. C. — **Pecten varius* L. - Lt. L. — *P. flabelliformis* Broc. — *P. dubius* Broc. — *P. latissimus* Broc. — **Ostrea lamellosa* Broc. - Lt. L. — *Ranella marginata* Brong. — **Cancellaria cancellata* L. - C. — *Solarium simplex* Bronn. — **Natica millepunctata* Lck. - Lt. L. C. — **N. Josephinia* Risso. - Lt. L. — *Turritella Brocchii* Bronn.

Insieme con questi fossili è anche qualche cristallo di selenite: talora essi scendono a confondersi coi fossili dello strato sottostante, ma per il modo di conservazione e pella roccia che sta loro aderente si possono distinguere. Cotale strato contiene conchiglie più litorali degli altri, come lo mostrerebbe per esempio, di per sè, la sostituzione della *Corbula Deshayesii* alla *C. gibba*; però mentre i fossili degli altri strati rimasero sul posto medesimo nel quale morirono, le conchiglie dello strato che ora abbiamo considerato sono alquanto ruzzolate e rotte, per cui nella loro presente distribuzione dovettero influire i movimenti del mare. Questo è probabilmente lo strato medesimo, il quale, continuando a settentrione verso il litorale, ed abbassandosi, pella sua inclinazione, al livello della Biena, sopra Monte Aperto, contiene un numero grande di svariate e ben conservate conchiglie, che non istarò a nominare, per non uscire di troppo dal seminato.

III. Tornano poi gli strati argillosi colla fauna già in gran parte accennata, salvo che vi manca la *Natica lineata*, sostituita affatto dalla abbondantissima *Natica millepunctata*. Il primo banco argilloso che si trova è alto circa 9 metri, e specialmente nella sua parte inferiore, sopra al banco fossilifero delle sabbie, raccolsi le conchiglie qui accennate.

Corbula gibba Ol. — *Cytherea multilamella* Lck. — *Cardium aculeatum* L. — *Arca diluvii* Lck. — *Mitra fusiformis* Broc. — *Nassa semistriata* Broc. — *Murex torularius* Lck. — *Pleurotoma Mortilleti* May. — *P. turricula* Broc. — *P. Coquandi* Bell. — *Natica millepunctata* Lck. — *Dentalium fossile* L.

IV. Sopra il citato strato argilloso è un altro banco di conchiglie fitte, sopra al quale sono circa 11 metri delle solite argille, fossilifere come il solito. Nel banco delle conchiglie più fitte ho trovate le seguenti specie:

Venus islandicoides Lck. — *Cytherea multilamella* Lck. — *Pecten dubius* Broc. — *Nassa semistriata* Broc. — *Triton Doderleini* D'Anc. — *Strombus coronatus* Defr. — *Pleurotoma Mortilleti* May. — *P. turricula* Broc. — *P. Coquandi*

Bell. — *P. cataphracta* Broc. — *Chenopus pespelecani* L. — *Cancellaria varicosa* Broc. — *Natica millepunctata* Lck. — *Turritella subangulata* Broc. — *T. tornata* Broc. — *T. Brocchii* Bronn. — *Vermetus intortus* Lck. — *Xenophora infundibulum* Broc. — *Dentalium fossile* L. — *D. sexangulum* L.

V. Al di sopra dello strato mentovato passava il *Balaenotus*, che il Capellini crede riferire al *B. insignis* Van Beneden, e sulle costole, come pure sopra alcune vertebre di esso, furono scoperte le intaccature ed i tagli che vennero attribuiti all' opera dell' uomo. I contadini del podere avevano tuttora una vertebra ed alcuni frammenti d'ossa che diedero al cav. Bosniacki, ed un buon numero di pezzetti d'ossa indicano lo strato preciso dal quale il cetaceo fu tolto. Giunti colà io mi diedi a raccogliere conchiglie le quali proprio si potessero dire provenienti dallo strato stesso, e trovai varie specie delle solite, che enumererò distintamente da quelle degli strati adiacenti.

**Cytherea multilamella* Lck. — **Arca diluvii* Lck. — *Pleurotoma turricula* Broc. — *P. Coquandi* Bell. — **Ringicula buccinea* Broc. — **Natica millepunctata* Lck. — **Turritella subangulata* Broc. — *Dentalium elephantinum* L.

Nello stesso strato, a distanza di circa due metri dal *Balaenotus*, i signori Bosniacki e Pantanelli, presente me pure, trovarono un dente di *Carcharodon* ed un altro dente di *Galeocerdo*. Quei due denti sono rimasti in proprietà ai rispettivi raccoglitori, ma del resto si trovano frequentemente là, come dovunque, nei terreni pliocenici argillosi, non litorali, tanto è vero che dalla famiglia del colono ne avemmo una quindicina, che erano stati trovati nel podere. Sopra il piano del *Balaenotus* è una serie alta circa 3 o 4 metri della solita argilla nella quale a volte si trovano dei grumi calcarei derivati dall' indurimento della roccia.

VI. Succede un piccolo filare di fossili non bene conservati d'aspetto diverso, alquanto simili a quelli dello strato sabbioso del n. II. Notai le seguenti specie:

Pectunculus glycimeris L. — *Terebra Basteroti* Nyst. — *Cerithium crenatum* Broc. — *Cancellaria cancellata* L. — *Natica millepunctata* Lck.

Talune di queste specie, al solito, portate dalle acque, si mescolano con quelle degli strati sottostanti.

VII. Eccettuato questo filaretto di semplici fossili, seguono fino al vertice di quei poggi circa 7 od 8 metri delle solite argille e dei soliti fossili più volte accennati nei varî strati, ài quali si possono aggiungere la *Ficula intermedia* Sism., e l'*Adeorbis Woodi* Hörnes.

Avevo già fatta menzione altrove (loc. cit.) delle conchiglie che il prof. Pantanelli aveva raccolte al Poggiarone; ma vi erano insieme specie di straterelli diversi, oltre di che talune fra quelle indicate, come l'*Ostrea cochlear* Poli, e la *Natica helicina* Broc., non vi si trovano.

Geologicamente, gli strati del *Balaenotus* sono un poco più recenti degli strati sabbiosi litorali soprastanti alle marne turchine del ponte della Madonnina rossa, nei quali trovai una mandibola di *Bos etruscus* Falc., come pure sono alquanto più recenti di quelli sabbiosi della Buca in Val di Pugna lungo la ferrovia, presso il casotto n. 247 dai quali provengono il *Rhinoceros etruscus* Falc., ed il *Felsinotherium Gervaisii* Cap.; i quali ultimi strati sono soprastanti di varî metri a quelli con

Natica lineata. Rispondono all' incirca a quelli del *Balaenotus* gli strati a *Limopsis aurita* Broc., della Coroncina, e la diversità della fauna, e della stessa roccia, deriva dalla diversità della zona marina in cui quelle si formavano; ragione per cui molti, tratti in equivoco, hanno attribuito quei terreni ad epoche geologiche differenti fra loro.

Chi sia pratico nella malacologia dei terreni pliocenici italiani, dai fossili degli strati argillosi che sono venuto via via mentovando, avrà compreso che non si tratta affatto di specie vissute presso i litorali, nè meno di quelle che abitarono le grandi profondità; bensì di molluschi che abitarono una zona intermedia fra quella che oggi dicono coralligena, e quella delle laminarie, e più prossima a quella che a questa.

Tralasciando di parlare delle specie esclusivamente fossili ed oggidì estinte, a proposito delle quali si correrebbe certo il rischio di dir cose non molto note a tutti, accennerò a quelle ancor viventi o molto analoghe ad altre viventi, le cui circostanze di vita possono essere verificate tuttora, e la cui storia è nota ad una parte almeno di quelli che si occupano delle conchiglie odierne. Le recenti spedizioni del *Challenger* e di altri bastimenti inglesi, e gli studî del Jeffreys e di altri malacologi fra cui è anche il nostro Seguenza, hanno portata molta luce in tale questione, e possibilità di molto giovamento eziandio alla geologia. Delle 11 specie viventi da me citate nelle argille degli strati I, III, IV, V, VII, oltre alle 39 scomparse, per quanto si crede, dal Mediterraneo, considerandole complessivamente, una specie si trova anche nella zona litorale, 6 sono nella zona delle laminarie, 8 in quella coralligena, 5 in quella degli abissi (1): rimane adunque chiaramente escluso che i sedimenti argillosi sieno litorali, ed anzi viene riconosciuto che si formarono nella zona coralligena. Delle 8 specie trovate in particolare nello strato del *Balaenotus*, 5, segnate con un asterisco, vivono ancora nel Mediterraneo, con caratteri identici o quasi, e di queste, una si trova anche nella zona litorale, 2 anche in quella delle laminarie, una pure in quella degli abissi, e tutte 5 abitano la zona coralligena, od in modo esclusivo, od insieme con altre zone (2). Gli strati del n. II e VI sono più litorali, come lo dimostra la natura stessa del sedimento sabbioso che li forma: delle 7 specie ivi indicate, appetto alle 17 scomparse, ve ne hanno 4 che abitano, ma non esclusivamente, la zona litorale, 7 che abitano la zona delle laminarie, 4 indicate anche nella zona coralligena, ed una pure in quella degli abissi, che è la *Venus ovata*; la forma di questa specie che si trova negli strati in discorso non è però quella delle zone profonde. Da ciò apparisce che quegli strati si formavano nella zona laminare, ma neppure essi in quella propriamente litorale. Del resto il maggiore interesse per noi l'hanno gli strati argillosi, e questi, come ho detto, mostrano di essersi depositati ad una profondità non minore di 150 metri, e

(1) March. di Monterosato, *Nuova rivista delle conchiglie mediterranee*. Atti dell'Accademia palermitana di scienze, lettere ed arti, vol. V sez. 2.ª.

(2) Scrissi all' illustre malacologo J. Gwyn Jeffreys, per chiedere la sua opinione sui limiti della profondità di una zona sottomarina nella quale si trovassero insieme le cinque specie di molluschi, da me raccolte nello strato del *Balaenotus*. Il Jeffreys mi replicò « I regard all these as southern and shallow-water species: I believe that the normal or usual range of depth would be from 20 to 50 fathoms » (5 maggio 1877).

mai messa a scoperto nemmeno nelle basse maree. La lontananza dal lido è palesata del resto dalla natura stessa del tenuissimo sedimento. Perciò, a meno di ricorrere al soprannaturale è impossibile attribuire alla presenza dell' uomo pliocenico in quel posto, le tracce trovate sulle ossa del *Balaenotus* [1].

Della profondità del mare, e della lontananza dal lido pliocenico si sarebbe giudicato a occhio, dopo avere esaminata la geologia dei dintorni. Gli strati più prossimi del solido alberese cretaceo superiore, il quale costituisce la parte maggiore della più prossima serie montuosa, cioè del Chianti, affiorano nel fondo dei botri e dei torrentelli, appena a Castelnuovo Berardenga ed a S. Giovanni, ad una distanza non minore di 6 chilometri. Ma per trovare la spiaggia pliocenica bisogna andare ancora più lontano. Infatti durante quell'epoca la massima parte delle pendici toscane laterali all'Apennino era sommersa o sporgeva dal mare a guisa di piccoli scogli o di isolotti; si persuade di ciò chiunque studii a modo la geologia toscana, e chiunque esamini le tracce dei terreni pliocenici in cima ai poggi di Radicondoli, di Chiusdino, e d'altrove, e presso le non alte sommità della Montagnola Senese, dei Poggi di S. Gemignano e di altri. Per limitarci a parlare della regione senese di cui abbiamo discorso infino ad ora, il Chianti sporgeva con assai minore estensione di quella che ora abbia la roccia cretacea od eocenica messa allo scoperto, e la Montagnola era quasi affatto nascosta dal mare, tanto è vero che tutti i ciottoli e le ghiaie ruzzolate che si trovano nel pliocene, checchè siasi creduto nel passato, derivano esclusivamente dal Chianti, fin quelle che fanno parte degli strati ricoprenti direttamente le antiche rocce triassiche ed infraliassiche dei colli di Jano, di S. Gemignano, e della Montagnola. Dalle rocce di questi luoghi, non sono derivati che massi sconnessi franati ed accumulati irregolarmente dall' opera delle forze sottomarine. Nel Chianti adunque poteano vivere e viveano quei mammiferi terrestri che ora troviamo fossili nei terreni pliocenici marini; ma niun d'essi poteasi recare là dove rimase sepolto il *Balaenotus* del Poggiarone.

Per ischiarire viè meglio l'argomento aggiungerò delle osservazioni ad alcune parole del Capellini, le quali, almeno per quanto mi sembra, non sono molto chiare, e potrebbero trarre qualcuno in inganno, come di fatti credo sia accaduto: ripeterò così quello che ho detto altrove (Arch. per la Ant. ecc.). Nello scritto del Capellini, si trovano, fra le altre, le seguenti frasi: « ho raccolto nel giacimento stesso delle ossa, parecchi coltellini ed altri strumenti di selce ». « Nelle marne che occupano il posto degli *strati a Congerie*, insieme alle ossa di cetacei e agli altri fossili, si trovano abbastanza frequentemente alcune scheggie di diaspro rosso manganesifero, e di selce bigia e bionda che, ridotte a coltellini, seghe e cuspidi di freccie, io non saprei distinguere da quelle che si trovano nelle caverne della Toscana e della Liguria .... Nelle marne superiori degli strati a Congeria della Farsica e di Pane e Vino raccolsi coltelli e rozze cuspidi di freccie » (R. Acc. dei Lincei pag. 8). Se alcuno

[1] Mi sembra poi non potersi credere che il *Balaenotus*, gettato alla spiaggia, fosse toccato e scarnito dagli uomini, quindi ripreso dalle acque e gettato là dove fu trovato. Ciò mi parrebbe contrario alle leggi le quali regolano i movimenti del mare; e d'altra parte occorre rammentare che lo scheletro si trovava nella sua integrità, non sfasciato, nè disperso.

deducesse da queste parole, che i manufatti di selce furono trovati negli stessi strati dei cetacei, potrebbe su questo fondamento ritenere senz' altro provata la presenza dell' uomo in quei tempi ed i quei luoghi. Ma questo non sarebbe se non un equivoco perchè in tutta la Toscana ed anche nel Senese, si trovano cotali selci, spesso frequentissime ; ma si rinvengono alla superficie del suolo, e non hanno perciò l'epoca dei terreni, qualunque essi siano, sui quali stanno. Infatti nelle argille del Poggiarone, e nelle marne di Pane e Vino e degli altri luoghi, gli arnesi lavorati dall'uomo non potrebbero essere pervenuti se non ruzzolati ed a guisa di ciottoli, come i frammenti di roccia che si trovano in qualche banco: per lo più poi, e per es. al Poggiarone, nei sedimenti teneri, quali sono per solito quelli che racchiudono dei cetacei, non si trovano nemmeno ghiaie, nè frammenti di qualsisia qualità.

Contribuzione all'anatomia ed alla fisiologia delle antenne degli Afanitteri.

Nota del dott. F. BERTÈ, presentata dal Socio F. TODARO

nella seduta del 6 gennaio 1878.

(Ricerche fatte nel laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma. II).

L'antenna delle pulci venne riconosciuta la prima volta nel 1832 da Dugès [1] sopra il *Pulex irritans*. Egli determinò con esattezza la posizione di quest' organo dietro l'occhio nella cavità dell'antenna, ne descrisse la forma, le tre articolazioni e la diversa maniera di muoversi nel vivente. Secondo lui « la prima giuntura è corta; la seconda lunga e spessa, armata d' una grande apofisi e d'un pennacchio di peli; la terza è più alta, appiattita a forma di paletta e divisa in istrisce o digitazioni, che divengono più corte dallo avanti all'indietro ».

Nel 1866 Landois [2] descrisse nell'antenna del *Pulex canis* quattro segmenti invece di tre, e contradisse in qualche punto il Dugès. La concisa descrizione del Landois potrebbe riuscir monca, se tentassi di riassumerla; onde mi veggo costretto a riportarla per intiero, traducendola letteralmente (l. c. pag. 5).

« Il segmento basale è il più piccolo; col tratto suo più assottigliato s'intromette nella testa, coll'estremità imbutiforme s'articola col secondo segmento. Questo porta una sporgenza sferica volta indietro, provvista di quattro robuste setole, che si dirigono in alto. Il terzo segmento ha del pari una sporgenza indietro, sulla cui porzione più prominente sta, in linea parallela all'articolazione del secondo col terzo segmento, una serie di forti setole ancora più lunghe. Sul margine anteriore del terzo segmento veggonsi tre spine più piccole, una di sotto, due di sopra. Il tegumento del terzo segmento è diviso in quadrilateri allungati, che somigliano a squame.

« L'articolazione del terzo segmento col quarto trovasi alla sua estremità superiore, sopra una parte rilevata. La cavità articolare del terzo segmento risulta d'un'apertura rotonda, contornata d'un orlo spesso di chitina; in essa fin dalla porzione più esterna dell'orlo sporgono sottili e corti peli volti a raggi verso l'interno. In siffatta apertura penetra l'apofisi articolare del segmento terminale, la quale alla sua estremità inferiore ha un margine arrovesciato, e addosso a questo spingonsi i peli dell'apertura articolare. Da questo punto la sua forma comincia a farsi simile a quella d'un collo di bottiglia. Attorno all'apofisi sono otto giri di peluzzi diretti alquanto in sopra. Internamente è scavata da un canale piuttosto stretto, attraverso il quale il nervo antennale passa nel segmento terminale. Questo segmento è gonfio, a forma di

(1) *Recherches sur les caractères zoologiques du genre Pulex* etc. Annales des scienc. nat. T. 27. 1832. p. 145.

(2) *Anatomie des Hundeflohes* etc. Dresden, 1866.

clava, un po' compresso lateralmente e porta nove liste come i denti d' un pettine, rivolte indietro. Le cinque superiori, che, prese insieme, compongono la metà esterna del segmento terminale, son distinte l'una dall'altra da solchi netti, che girano intorno al segmento. La 5ª, 6ª, 7ª e 8ª portano alle loro estremità certe piccole spine, forse coni specifici, a simiglianza di due brevi e cilindriche eminenze sporgenti dalla prima dentatura. La prima, terza e quarta dentatura sono le più piccole e più brevi, le loro punte arrotondite. La seconda è la più lunga e divisa in compartimenti da linee longitudinali. Altre spine più brevi stanno sulla superficie; e in numero di tre sopra una speciale eminenza alla base della seconda dentatura; e due altre presso al margine anteriore della quinta e sesta. Meritano special menzione alcuni apparecchi peculiari, che hanno evidentemente a considerarsi come organi di senso. Stanno sul margine anteriore dell' antenna, coperti dalle estremità libere delle dentature e consistono di fossette ovali o rotonde, con orlo rilevato di chitina e con tenera membranella sovr'esse distesa, nel cui mezzo o vi è una piccola apertura, ovvero un bottoncino, cosa che non potei discernere coll'obb. Hartnack 10 e ocul. 4 ».

Secondo Landois queste parti costituiscono l'organo dell'udito della pulce.

Fin dal 1838 L. W. Clarke (1) aveva descritto nella base delle antenne del *Carabus nemoralis* un apparecchio uditivo, composto d'un' auricola, di un condotto uditivo interno ed esterno, d'un timpano e un labirinto; di ciò Siebold (2) dice non esistere traccia alcuna. Anche Treviranus (3) aveva descritto come organi uditivi le due macchie bianche e convesse, che si trovano nella base delle antenne della *Blatta orientalis* e che Burmeister (4) invece ha descritto come due occhi accessorî rudimentali.

Newport (5) e Goureau (6) avevano ammesso che le antenne servono allo stesso tempo al tatto e all'udito.

Intanto nelle achetidi e nelle locustidi Siebold (7) ha descritto un organo acustico situato nelle gambe anteriori immediatamente al disotto dell' articolazione colla coscia, che poi Leydig ha trovato nelle ali dei coleotteri, nei bilancieri dei ditteri e nelle larve di altri insetti.

Hensen (8) ha studiato quest'organo nella gamba anteriore della *Locusta viridissima*, e H. Landois (9) in quella del cervo volante. Nelle acridie Burmeister (l. c.) descrive come organo dell'udito due fossette circondate da un anello corneo, saliente, al fondo delle quali è tesa una membrana in forma di timpano. Nella faccia interna di questa membrana descrive due prolungamenti cornei, ai quali è annessa una vescicola delicatissima (labirinto membranoso) contenente un fluido trasparente, che è in rapporto col nervo acustico, proveniente dal terzo ganglio toracico, il quale si termina in vicinanza immediata della vescicola in bastoncelli uniformi.

(1) Citato da Siebold e Stannius, *Anatomie comparée* II.
(2) Anat. comp. — (3) Anat. comp.
(4) *Handbuch der Entomologie* Bd. II. p. 673.
(5) Transact. of the Ent. Soc. II p. 229.
(6) Annal. de la Soc. Ent. X p. 10.
(7) *Ueber das Stimm- und Gehörorgan der Orthopteren.* Arch. f. Naturgeschichte 1844.
(8) *Ueber das Gehörorgan von Locusta.* Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. XVI p. 190.
(9) *Gehörorgan des Hirschkäfers.* Arch. f. micr. Anat. 1868.

Ranke [1] sostiene che tanto nelle acridie, quanto nelle locustidi tutti questi organi sono transitorî o comuni (Uebergangsorgane) cioè inservienti al tempo stesso al tatto, all'udito, all'odorato e al gusto.

Da questo breve cenno storico emerge, che le nostre conoscenze sopra l'organo dell'udito degli insetti, i quali ci danno prove non dubbie della sensazione uditiva distinta, non sono ancora molto avanzate; e per conseguenza lo studio di quest'organo richiede molte e scrupolose ricerche.

Io ho fatto una serie di ricerche sopra le antenne del *P. irritans* sotto la direzione del prof. Todaro, a cui rende grazie dell'aiuto che mi ha prestato in questo difficilissimo studio. Queste ricerche mi lusingo che non lasceranno dubbio sopra la funzione uditiva delle antenne della pulce, come nel seguito di questa Memoria verrà provato.

Per vedere le antenne nella pulce in tutte le loro parti, è mestieri di fare tagli della testa nel senso della lunghezza del corpo dell'animale e quindi aiutarsi colla leggera compressione a muoverle e a distenderle, qualora sieno raccolte. Fu così infatti che sopra alcuni tagli ben riusciti, Dugès, avvicendando la compressione e spingendola fino allo schiacciamento, ha potuto scoprire che, il corpicciuolo, visto prima di lui da altri osservatori in quel sito, era una vera antenna. Però il metodo dei tagli, di cui si son serviti tanto Dugès, quanto Landois per studiare le antenne, non era ancora a quel grado di perfezione, nel quale oggi è pervenuto, e per conseguenza i sopracitati autori, se hanno tagliato la testa e con essa la cavità antennale, non sono riusciti ad ottenere tagli dell'antenna e dei suoi segmenti. Quindi il Landois medesimo che ha spinto l'analisi molto più innanzi di quello, che avesse fatto Dugès, non ha potuto vedere che nell'ultimo pezzo dell'antenna, il più importante, come sotto vedremo, esiste una larga cavità (cavità labirintica o timpanica). E se ha descritto la cavità articolare del penultimo segmento, e l'apofisi dell'ultimo in essa contenuta, ciò l'ha potuto fare, perchè, come si vede dalla sua figura 7 della Tav. II op. cit., questo si era distaccato dall'altro.

Infatti per studiare bene questi organi si richiedono due specie di tagli, cioè, alcuni più grossi altri più sottili. I primi servono ad apprestare tutto l'insieme dell'antenna e la maniera di stare nella fossa, che la ricetta. I secondi servono allo studio più minuto delle varie parti, che compongono l'antenna.

Dopo d'aver indurito o nell'alcool o nell'acido cromico le pulci, io le ho chiuse nella mistura d'olio e cera di Stricker, e così ho potuto ottenere tagli di varia spessezza. Debbo però avvertire che per avere antenne intere, i tagli debbono esser fatti nel senso antero-posteriore o longitudinale dell'animale, e così anco per studiare le varie parti riescono più utili i tagli diretti in questo senso, anzichè quelli verticali, perchè allora, non solo si ha nel taglio una parte dell'antenna e non tutta, ma questo cade sempre alla parte più ristretta e specialmente dell'ultimo segmento appiattito d'alto in basso. Nei tagli così fatti io ho potuto studiare tutte le particolarità, che m'accingo ad esporre.

L'antenna del *P. irritans* si trova rannicchiata in una fossetta, sita ai lati della testa, dietro e sotto l'occhio (Fig. 1 *a*). Tal fossetta, molto larga e di forma ovale, s'apre

[1] *Das Gehörorgan der Acridier* etc. Zeitsch. f. wiss. Zool. Bd. XX 5. 1875.

all' esterno con una fessura trasversale, provvista all' intorno d' un ciuffo di setole, innanzi alla quale sta una specie d' opercolo fisso al canto esterno dell' orbita e molleggiante. L' antenna è formata di tre segmenti (Fig. 5), come aveva detto Dugès. Il *segmento basale* o *interno* (Fig. 3 *sb*) ha la forma trapezoide ed è fatto d' una membrana chitinosa, che chiude circolarmente uno spazio riempito di molle tessuto congiuntivo. Porta da un canto una lunga apofisi (Fig. 5 *ar*), articolata colla testa dell' animale, sulla quale s' impianta un largo fascio di fibre muscolari, disposte a ventaglio; dall' altro presenta un lungo orlo circolare e sporgente indietro a punta, legato al secondo segmento mercè d' una membranella connettivale. All' intorno dell' orlo esiste una serie di setole dirette all' esterno.

Il *secondo segmento* o *medio* (Fig. 3 *sm*) è più grande ed ha la forma d' un cubo irregolare, con indietro una grossa sporgenza arrotondita. È formato del pari di membrana chitinosa, che chiude uno spazio riempito di molle tessuto congiuntivo. La porzione interna di questa membrana ha un orlo circolare che, come abbiam detto, s'unisce all' orlo circolare esterno del primo segmento. Nella parte esterna del segmento medio trovasi una vera cavità articolare, piccola e circolare (Fig. 3, 4, 6 *ca*), la quale riceve l' apofisi del terzo segmento e con essa forma un' articolazione trocoidale. Su questo segmento medio le setole sono più lunghe e più forti ancora, e, tranne alcune che si trovano nella sporgenza posteriore, le altre stanno all' intorno dell' articolazione suddetta. Si notano inoltre sulla faccia anteriore di questo segmento, qua e là, piccoli prolungamenti che per distinzione diconsi *spine*.

Il *terzo segmento* (Fig. 2, 5, 7 *st*) ha forma di fiasca, con un corpo ed un collo. Il *collo* non è altro che l' apofisi articolare, la quale, terminandosi con un orlo arrovesciato, precisamente come il collo d' una bottiglia, s' articola con la cavità sopra descritta del segmento medio. Il *corpo* è un po' schiacciato d' alto in basso, e vi si distingue una faccia superiore, una inferiore, una anteriore ed un' altra posteriore. Finalmente nella parte opposta al collo abbiamo l' estremità libera arrotondita, o il fondo della fiasca.

Il fatto importante è che il segmento terminale, a differenza degli altri due, presenta una grande cavità (Fig. 8, 9 *cl*), chiusa da una membranella connettivale amorfa, che rappresenta una vescicola labirintica.

All' esterno la vescicola labirintica è circondata da una serie di 7 cerchi o anelli di sostanza chitinosa. Ciascuno degli anelli è fatto da due pezzi o semicerchi, cioè l'uno anteriore e l'altro posteriore, che si riuniscono con le loro estremità nella faccia superiore e nella inferiore di questo segmento. I semicerchi posteriori (Fig. 2 *sp*) portano sopra ciascuna estremità una grossa spina, impiantata in una fossetta, ed un' altra più lunga e più sottile nella parte media. Per conseguenza sopra questi semicerchi si notano tre serie di spine, cioè una serie sulla faccia superiore, un'altra sulla faccia posteriore, ed un' altra sulla faccia anteriore del segmento.

Sopra i semicerchi anteriori (Fig. 2 *sa*) si notano ugualmente due serie di spine, ma molto piccole, che si veggono una nella faccia superiore e una nella inferiore.

I semicerchi anteriori sono più larghi, molto sottili e coi loro margini regolari vengono a connettersi mutuamente senza lasciare interstizî fra loro.

I semicerchi posteriori invece sono più spessi e più stretti e lasciano tra loro delle fenditure trasversali, nelle quali si trovano poste cellule fusiformi (Fig 7 *cf*) con lunghi

prolungamenti (Stiftzellen) che ricordano le cellule fusiformi di Deiters dell' organo di Corti della coclea dei mammiferi. Landois, avendoli guardati di lato solamente e non di fronte non solo non ha visto le cellule fusiformi, ma descrisse e figurò nella faccia posteriore un corpo dentato, con nove denti, cioè le due alette e i sette cerchi da lui erroneamente presi per denti.

Fra il primo semicerchio posteriore e il primo anteriore, che sta alla base del collo, resta un' apertura circolare (finestra rotonda) che rappresenta un largo orificio della vescicola labirintica. Se quest' orificio sia o no chiuso da una membrana incastrata nel primo anello, come quella del timpano degli animali superiori, non si è potuto mettere in chiaro con nessun mezzo. Intanto sopra quest' orificio si notano due alette lanceolate, una per lato, che, fisse con un' estremità all' intorno della base del collo, da esse abbracciato a modo di cravatta, sono libere in tutto il resto e quindi mobili. Queste alette potrebbero far l' ufficio d' organi collettori o modificatori delle onde sonore, qualora, come pare, quest' organo sia inserviente all' audizione.

L' antenna riceve un sol nervo, il quale nasce dal ganglio cerebrale o più probabilmente fra questo e il primo ganglio toracico. Si vede chiaramente come questo nervo, dopo aver traversato l' asse del primo e del secondo segmento, penetra nel segmento terminale, passando attraverso il foro centrale del collo o dell' apofisi articolare, e si porta fino all' estremità libera o al fondo del segmento terminale, ove si termina in un grande rigonfiamento ganglionare, che sta fra la vescicola labirintica e gli ultimi due anelli chitinosi. I rapporti fra questo ganglio e le cellule fusiformi che stanno fra i semicerchi anteriori non poterono esser posti in chiaro. Però nello stato attuale della scienza ci è lecito ammettere l' ipotesi della connessione di questi elementi con il ganglio, e dai fatti sopra esposti possiamo esser autorizzati a credere che l' ufficio delle antenne nelle pulci sia in relazione coi fenomeni acustici.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

FIG. 1. Taglio frontale della testa *t* e del protorace *pt* d'una pulce umana femmina, l'una e l'altro limitati all'esterno da spesso e forte involucro chitinoso. Al punto maggiormente ristretto della testa veggonsi d'ambo i lati le fosse antennali *ca*, che contengono l'antenna *a*, e sono in fuori chiuse dall'opercolo *op*, salvo ad un punto, ove si vede la fenditura antennale *fa*. La fossa antennale è in avanti limitata dall'occhio *oc*; dietro a questo è l'articolazione craniana del segmento basale dell'antenna. Dentro alla testa, oltre ad una grande quantità di fibre muscolari, che servono a muovere l'apparecchio boccale dell'insetto, sta in mezzo ed in avanti una sezione del faringe *f*, il quale, attraversando il ganglio faringeo *gf* o cervello, esce restringendosi nell'esofago *e*, che scende innanzi alla prima commissura ed al ganglio protoracico. Ai lati del faringe e del ganglio faringeo, avvolto da connettivo, stanno trachee *tt* e i primi gomitoli del così detto Fettkörper.

FIG. 2. Segmento terminale dell'antenna coll'apofisi articolare *ar* o collo, e con il corpo che presenta le due alette *al*, i semicerchi anteriori *sa*, ed i posteriori *sp*. Sotto delle alette si scorge una fenditura, che è la finestra ovale veduta un poco obbliquamente; qua e là stanno le spine specifiche del segmento terminale.

FIG. 3. Sezione longitudinale del primo segmento o basale *sb* attaccato al secondo o medio *sm*; sul margine inferiore di questo apparisce in sezione la cavità articolare *ca*.

FIG. 4 Articolazione del segmento medio col terminale dell'antenna. La cavità articolare *ca* si vede di prospetto con la corona di peli sottilissimi, che fanno in certo modo ostacolo all'uscita dell'apofisi articolare. Il segmento terminale si è incurvato sul collo ed è alquanto schiacciato, onde presenta con maggior distinzione la finestra ovale *fo*.

FIG. 5. Antenna intera con i suoi tre segmenti, il basale *sb*, il medio *sm* ed il terminale *st*. Al segmento basale s'attaccano i muscoli *m* motori di tutto l'appendice. L'articolazione sua craniana è rinforzata in avanti da un ispessimento di chitina in forma di lista oscura, che, attraversando la testa della pulce, si reca da un lato all'altro; di sopra da un'altra lista più stretta, che forma il limite interno della fossa antennale.

FIG. 6. Sezione del primo *sb* e del secondo *sm* segmento dell'antenna in sito entro la cavità antennale largamente aperta; *ca* cavità articolare; *na* nervo dell'antenna; *oc* sezione dell'occhio sinistro.

FIG. 7. Segmento terminale strappato dalla sua articolazione e veduto dalla faccia inferiore. *cf*. Cellule fusiformi degli interstizi degli archi chitinosi *ar* in numero di 7; *fo* finestra ovale; *al* alette; *ga* ganglio antennale; *na* nervo antennale.

FIG. 8. Il segmento terminale in questa figura mostra una grande apertura, cagionata dall'avere il rasojo portato via buon tratto della parete chitinosa, che chiude la cavità del medesimo, o cavità labirintica *cl*.

FIG. 9. Sezione longitudinale dell'antenna. Si vede con molta chiarezza il modo d'articolarsi del terzo col secondo segmento, mediante l'orlo arrovesciato del collo, che s'incastra nelle pareti della cavità articolare. Vedesi ancora parte della cavità del terzo segmento in *cl*.

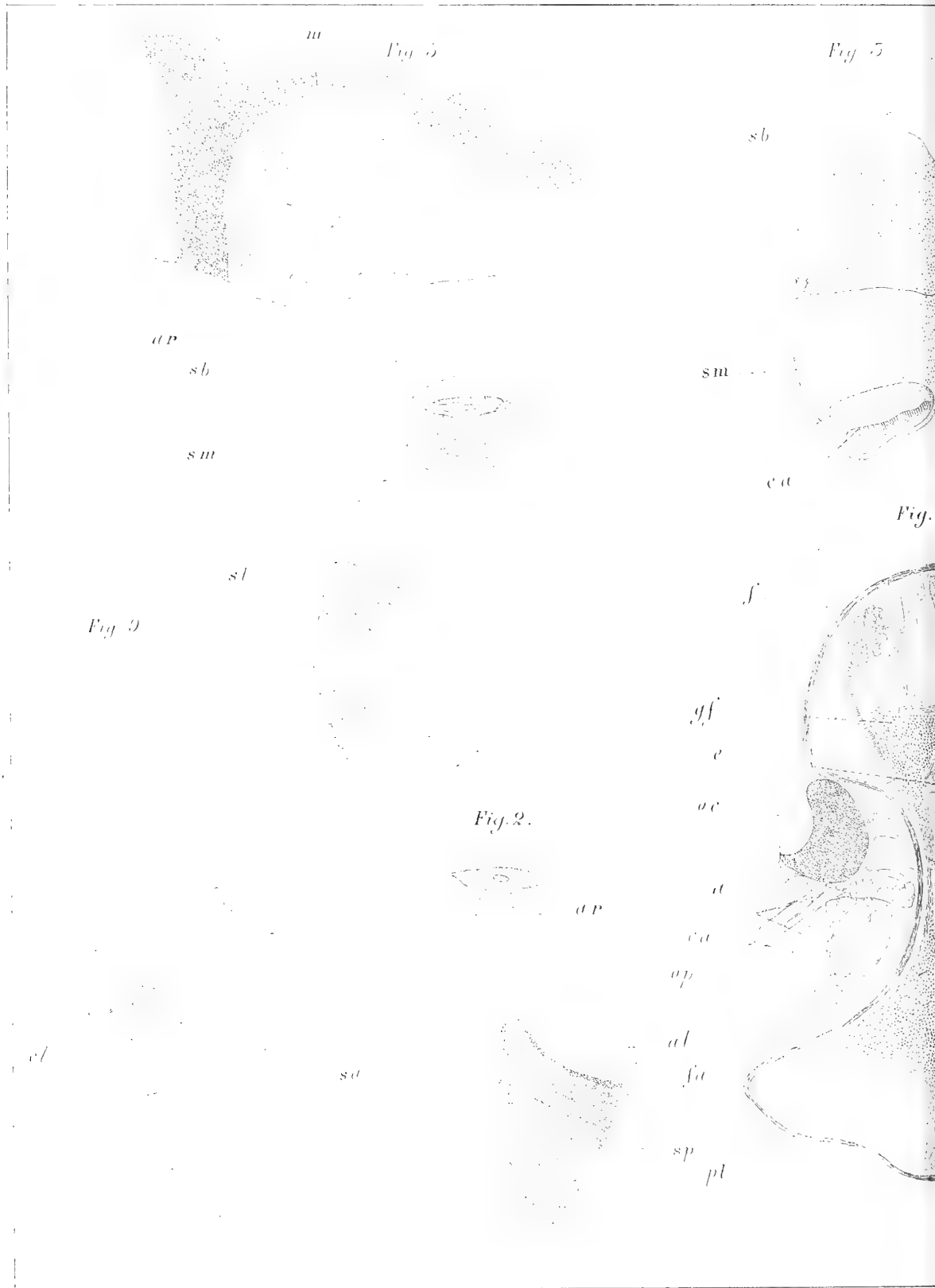
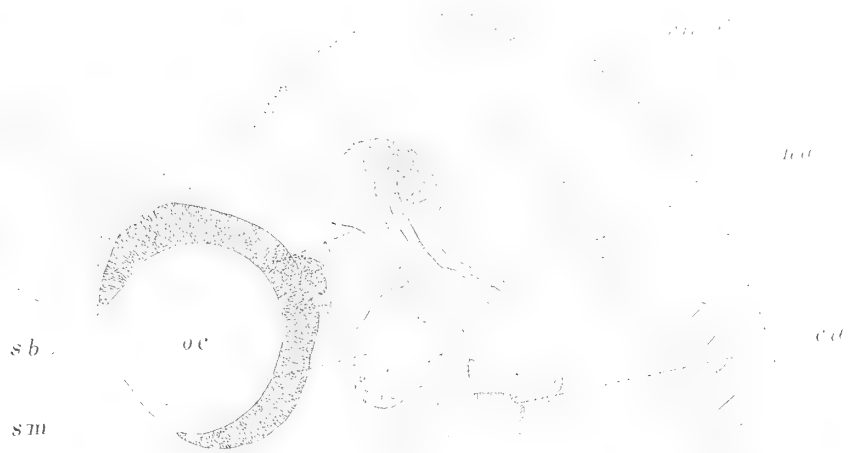
Tutte queste figure furono prese da altrettanti preparati colla camera lucida sulla lente obb. N. 7 Hartnack, salvo la fig. 1 che si ebbe coll'obb. N. 4.

m
Fig. 5
Fig. 3
sb
ar
sb
sm
sm
ca
Fig.
st
f
Fig. 9
gf
e
oc
Fig. 2.
a
ar
ca
op
al
el
sa
fa
sp
pl

Fig 8

Fig 3

Fig 7.

Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9
oc
sb
sm
ca
al
ar
sp
pl
fo
na
cf
ga
cg
cl
gf

La trasformazione piana doppia di secondo ordine, e la sua applicazione alla geometria non euclidea.

Memoria del dott. R. DE PAOLIS presentata dal Socio CREMONA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 dicembre 1877.

In un precedente studio (¹) ho stabilito la teoria generale delle trasformazioni piane doppie ed ho accennato il caso della trasformazione di secondo ordine.

In ciò che segue intendo di svolgere le proprietà di questa trasformazione, e specialmente in un caso che ha una applicazione alla geometria non euclidea.

§ 1. Formole per la corrispondenza fra P e P' - Costruzioni.

1. In un piano P' prendiamo una conica

$$\Omega_{x'x'} \equiv a_{11}x'^2_1 + a_{22}x'^2_2 + a_{33}x'^2_3 + 2a_{12}x'_1x'_2 + 2a_{23}x'_2x'_3 + 2a_{31}x'_3x'_1 = 0$$

ed un punto I' di coordinate

$$y'_1 = y_1 \quad y'_2 = y_2 \quad y'_3 = y_3\,;$$

la polare di I' rispetto alla conica $\Omega_{x'x'}$ ha per equazione

$$\Omega_{x'y'} \equiv a_{11}x'_1y'_1 + a_{22}x'_2y'_2 + a_{33}x'_3y'_3 + a_{12}(x'_1y'_2 + x'_2y'_1) + a_{23}(x'_2y'_3 + x'_3y'_2) + \\ + a_{31}(x'_3y'_1 + x'_1y'_3) = 0\,.$$

Se poniamo

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = y'_1\Omega_{x'x'} - 2x'_1\Omega_{x'y'} : y'_2\Omega_{x'x'} - 2x'_2\Omega_{x'y'} : y'_3\Omega_{x'x'} - 2x'_3\Omega_{x'y'}\,,$$

dove le x sono le coordinate di un punto d'un altro piano P, ad un punto x' di P' corrisponde un solo punto x di P, ed alle rette di questo piano corrisponde una rete di coniche che passano per i punti $J_1'J_2'$ comuni alla conica $\Omega_{x'x'}$ ed alla retta $\Omega_{x'y'}$ polare del punto I'. Da ciò segue che le formole (1) stabiliscono una trasformazione doppia di secondo ordine tra il piano doppio P ed il piano semplice P' (²).

L'equazione della conica corrispondente alla retta

$$U \equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

si può mettere sotto la forma

$$U_{y'}\,\Omega_{x'x'} - 2U_{x'}\,\Omega_{x'y'} = 0\,.$$

La Jacobiana è formata dalla conica doppia

$$\Omega_{x'x'} = 0$$

e dalla retta fondamentale

$$\Omega_{x'y'} = 0 \ (^3).$$

(¹) *Le trasformazioni piane doppie.* Atti dell'Accademia dei Lincei serie 3ª vol. 1.°

(²) L. c. n. 22.

(³) L. c. n. 22; n. 11, I.

Le formole (1) ci danno i punti del piano doppio corrispondenti a punti presi nel piano semplice, per avere le formole inverse, che devono esprimere le x' in funzione delle x, fissiamo in P' una retta

$$U' \equiv u'_1 x'_1 + u'_2 x'_2 + u'_3 x'_3 = 0$$

e cerchiamo di scrivere l'equazione della conica corrispondente in P. Dalle (1) abbiamo

$$\rho x_1 = y'_1 \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y'}} - 2x'_1$$

$$\rho x_2 = y'_2 \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y'}} - 2x'_2$$

$$\rho x_3 = y'_3 \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y'}} - 2x'_3$$

che moltiplicate per $u'_1\ u'_2\ u'_3$, e sommate tenendo conto della relazione $U'=0$, danno

$$\rho \frac{U'_x}{U'_y} = \frac{\Omega_{x'x'}}{\Omega_{x'y}}, \tag{2}$$

e quindi si possono scrivere sotto la forma

$$2x'_1 = \frac{\rho}{U'_y}(U'_x y_1 - U'_y x_1)$$

$$2x'_2 = \frac{\rho}{U'_y}(U'_x y_2 - U'_y x_2)$$

$$2x'_3 = \frac{\rho}{U'_y}(U'_x y_3 - U'_y x_3)\ ;$$

sostituendo questi valori delle x' nella (2) abbiamo

$$U'^2_x\, \Omega_{yy} - U'^2_y\, \Omega_{xx} = 0, \tag{3}$$

ovvero

$$U'_x \sqrt{\Omega_{yy}} \pm U'_y \sqrt{\Omega_{xx}} = 0$$

per equazione della conica corrispondente in P alla retta $U'=0$, e paragonando i coefficienti delle u' troviamo le formole

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1\sqrt{\Omega_{yy}} \pm y_1\sqrt{\Omega_{xx}} : x_2\sqrt{\Omega_{yy}} \pm y_2\sqrt{\Omega_{xx}} : x_3\sqrt{\Omega_{yy}} \pm y_3\sqrt{\Omega_{xx}} \tag{4}$$

che sono le inverse delle (1).

Dall' equazione (3) delle coniche corrispondenti alle rette del piano semplice deduciamo che passano per il punto fondamentale I di coordinate y corrispondente alla retta fondamentale $J'_1 J'_2$ ed al punto congiunto I'; di più vediamo che hanno un doppio contatto colla conica limite [1].

Le formole della trasformazione congiunta [2] si scrivono subito osservando che

$$U'_{y'}\Omega_{x'x'} - U'_{x'}\Omega_{x'y'} = 0$$

è la rete delle coniche che passano per $I'\, J'_1\, J'_2$, e sono

$$\mathbf{x}'_1 : \mathbf{x}'_2 : \mathbf{x}'_3 = y'_1\Omega_{x'x'} - x'_1\Omega_{x'y'} : y'_2\Omega_{x'x'} - x'_2\Omega_{x'y'} : y'_3\Omega_{x'x'} - x'_3\Omega_{x'y'}.$$

[1] L. c. n. 22.

[2] Cioè la trasformazione involutoria nella quale si corrispondono fra loro due punti congiunti del piano semplice (due punti corrispondenti ad uno stesso punto del piano doppio).

2. La corrispondenza stabilita tra P e P' per mezzo delle formole (1) e delle loro inverse (4) si può costruire nel seguente modo. Fissiamo una superficie S del secondo ordine, un punto O' di essa, un punto O fuori di essa, e due piani $P\,P'$. Preso un punto p del piano P congiungiamolo con O, il raggio Op incontra la S in due punti che projettati da O' sul piano P' ci danno due punti $p'\mathbf{p}'$ che in P' corrispondono al punto p di P. Preso invece p', o $\mathbf{p}'$, e congiunto con O', il raggio $O'p'$, o $O'\mathbf{p}'$, taglia la S in O' ed in un altro punto che projettato da O sul piano P ci dà il punto p corrispondente al punto p', o $\mathbf{p}'$. Evidentemente la trasformazione doppia che si costruisce nel detto modo è quella del secondo ordine.

Gli enti fondamentali del piano P sono la traccia I della retta $O'O$ e le traccie dei piani tangenti alla S che passano per $O'\,O$; la conica limite è la sezione fatta dal piano P nel cono che ha il vertice in O ed è circoscritto alla S.

I punti fondamentali di P$'$ sono le traccie delle generatrici che passano per O', la retta fondamentale è la traccia del piano tangente in O', ed il punto I' congiunto a questa retta è la traccia della retta $O'O$. Le traccie dei piani che da O projettano le generatrici passanti per O' sono le rette congiunte ai due punti fondamentali. La conica doppia è la traccia del cono che da O' projetta la conica di contatto del cono col vertice in O circoscritto alla S.

Dato un punto p', si voglia trovare il congiunto $\mathbf{p}'$; il punto, distinto da O', comune al raggio $O'p'$ ed alla S si congiunga con O; la congiungente incontra la S in un altro punto, che projettato da O' ci dà il punto $\mathbf{p}'$ cercato.

Congiungendo con O' i punti del piano P', li facciamo corrispondere univocamente ai punti della superficie S. Se per il punto corrispondente sulla S a p', e per O, si tirano i due piani tangenti alla S le sezioni sono rappresentate dalle coppie di rette

$$J'_1 p' \; J'_2 o'_1 \;,\; J'_2 p' \; J'_1 o'_2$$

dove $o'_1\, o'_2$ sono i punti comuni alle rette $J'_1 p'\; J'_2 p'$ ed alla conica doppia, il punto comune alle $J'_1 o'_2\; J'_2 o'_1$ è il punto $\mathbf{p}'$; da ciò deduciamo che la polare di p' rispetto alla conica doppia passa per $\mathbf{p}'$, e questo punto è l'intersezione della retta $I'p'$ colla detta polare. Dalla costruzione trovata discende che la trasformazione congiunta è una inversione quadratica d'Hirst ([1]).

Se il raggio OO' è tangente alla S il punto I cade sulla conica limite, ed allora nel piano P' v'è un punto doppio non fondamentale. Se la superficie S è un cono i punti fondamentali $J'_1\; J'_2$ sono infinitamente vicini ([2]).

Prendendo il piano P' parallelo al piano tangente alla S in O' i punti fondamentali $J'_1\; J'_2$ vanno a distanza infinita, quindi: 1° se le generatrici che passano per O' sono reali alle rette del piano doppio corrisponde una rete d'iperbole cogli asintoti paralleli, 2° se O' è un umbilico alle rette di P corrisponde una rete di circoli, 3° se la S è un cono alle rette di P corrisponde una rete di parabole con i diametri paralleli.

3. Possiamo avere una costruzione senza fare considerazioni nello spazio estraneo ai

([1]) L. c. n. 22.

([2]) Ho considerato questi due casi speciali nella teoria generale delle trasformazioni doppie, l. c. n. 22, 23.

due piani $P P'$. Basta supporre data in P la conica limite Ω_{xx} ed il punto fondamentale I, ed in P' la conica doppia $\Omega_{x'x'}$ ed i punti fondamentali $J'_1 J'_2$, quindi far corrispondere i punti della conica limite univocamente a quelli della conica doppia in modo che ai punti $J'_1 J'_2$ corrispondano i punti di contatto delle tangenti condotte da I alla conica limite. Allora preso un punto p di P e condotte da esso le due tangenti alla Ω_{xx} i punti di contatto $o_1 o_2$ danno due punti $o'_1 o'_2$ corrispondenti sulla $\Omega_{x'x'}$, congiunti ai punti $J'_1 J'_2$ le rette $J'_1 o'_1$ $J'_2 o'_2$ determinano uno dei punti corrispondenti a p, e le rette $J'_1 o'_2$ $J'_2 o'_1$ determinano l'altro. Se poi supponiamo dato un punto p' di P' congiungiamolo con $J'_1 J'_2$, le rette $J'_1 p'$ $J'_2 p'$ tagliano la $\Omega_{x'x'}$ in $J'_1 J'_2$ ed in $o'_1 o'_2$, e le tangenti alla Ω_{xx} nei punti corrispondenti $o_1 o_2$ s'incontrano in p.

§ 2. Corrispondenza tra i circoli euclidei di un piano P' ed i circoli non euclidei di un piano P.

4. Prendiamo la retta all'infinito di P' come retta fondamentale $\Omega_{x'y'}$ e i punti ciclici per punti fondamentali $J'_1 J'_2$. Per questa particolare scelta la conica doppia dovendo passare per i due punti fondamentali diviene un circolo, il suo centro essendo il polo della retta all'infinito cade nel punto fondamentale I'.

Due punti congiunti $p' \mathbf{p}'$ sono in linea retta con I' e separano armonicamente i punti $o'_1 o'_2$ in cui la retta $I'p'\mathbf{p}'$ taglia il circolo doppio; essendo I' il punto di mezzo del segmento $o'_1 o'_2$ abbiamo

$$\overline{I'o'_1}^2 = I'p' . I'\mathbf{p}' \quad (^1),$$

ossia

$$I'p' . I'\mathbf{p}' = k^2, \tag{5}$$

chiamando k il raggio del circolo doppio.

Alle rette del piano doppio corrispondono i circoli congiunti a se stessi; da I' tiriamo una tangente $I'o'$ ad uno di questi circoli ed una trasversale che lo deve incontrare in due punti congiunti $p' \mathbf{p}'$. Per una proprietà nota del circolo, avremo

$$\overline{I'o'}^2 = I'p' . I'\mathbf{p}' ,$$

ed essendo $p'\mathbf{p}'$ due punti congiunti dalla (5) deduciamo

$$I'o' = k ,$$

vale a dire: i circoli corrispondenti alle rette del piano doppio, ossia i circoli congiunti a se stessi, tagliano ortogonalmente il circolo doppio, e quindi hanno I' per centro radicale comune.

Se prendiamo un circolo che non tagli ortogonalmente il circolo doppio abbiamo per corrispondente una conica che ha un doppio contatto colla conica limite; se il circolo di P' si spezza nella retta all'infinito ed in un'altra retta abbiamo per corrispondente in P una conica che passa per il punto fondamentale I ed ha un doppio contatto colla conica limite; finalmente se il circolo di P' si riduce ad un punto p' ed

(1) Per es. Cremona, *Geometria projettiva* p. 36.

alle rette che lo congiungono con i punti ciclici abbiamo per corrispondente in P le tangenti condotte da p alla conica limite. Riassumendo questi casi possiamo in generale dire che:

Ai circoli del piano semplice corrispondono nel piano doppio le coniche che hanno un doppio contatto colla conica limite.

5. Ad un punto infinitamente vicino ad un punto p del piano doppio corrisponde un punto infinitamente vicino al punto p' del piano semplice, e viceversa; in altre parole, le direzioni in p formano un fascio projettivo a quello delle corrispondenti direzioni in p', e per conseguenza il rapporto anarmonico di quattro raggi del primo fascio è uguale al rapporto anarmonico dei quattro raggi corrispondenti del secondo. Se consideriamo le tangenti $po_1\, po_2$ che da p si possono condurre alla conica limite i raggi corrispondenti sono $p'J'_1\, p'J'_2$, quindi prese in P' due curve $C'_1\, C'_2$ che si taglino in p', chiamate $p'T'_1\; p'T'_2$ le loro tangenti in p', e $pT_1\, pT_2$ le tangenti in p alle curve $C_1\, C_2$ corrispondenti in P, abbiamo la seguente uguaglianza di rapporti anarmonici

$$p\,(o_1\, o_2\, T_1\, T_2) = p'\,(J'_1\, J'_2\, T'_1\, T'_2)\,.$$

Possiamo considerare il piano P come un piano non euclideo, cioè come un piano il cui limite (assoluto) sia una conica

$$\Omega_{xx} = 0 \quad \text{o} \quad \Phi_{uu} = 0,$$

secondochè si ritiene come luogo dei suoi punti x, o come inviluppo delle sue tangenti u, e possiamo considerare il piano P' come un piano euclideo, cioè come un piano il cui limite (assoluto) come luogo di punti sia una conica ridotta a due rette coincidenti, retta all'infinito, come inviluppo di rette sia una conica ridotta a due punti, i punti ciclici [1].

Le due curve $C'_1\, C'_2$ si tagliano in p' sotto l'angolo euclideo

$$\varphi' = -\frac{i}{2}\log p'\,(J'_1\, J'_2\, T'_1\, T'_2) \text{ [2]},$$

e le curve $C_1 C_2$ corrispondenti si tagliano in p sotto l'angolo non euclideo

$$\varphi = -\frac{i}{2}\log p\,(o_1\, o_2\, T_1\, T_2)\,;$$

ma abbiamo veduto che

$$p\,(o_1\, o_2\, T_1\, T_2) = p'\,(J'_1\, J'_2\, T'_1\, T'_2)\,,$$

dunque $\varphi = \varphi'$, ossia:

L'angolo euclideo sotto il quale si tagliano due curve di P' è uguale all'angolo non euclideo sotto il quale si tagliano le curve corrispondenti in P.

6. I circoli della geometria non euclidea, intendendo per circolo non euclideo il luogo di un punto la cui distanza non euclidea

$$\delta = -\frac{i}{2}\log\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}$$

(1) Vedi per es. Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*. Math. Annalen Bd. IV und VI.

(2) Vedi per es. Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie* 148. Bd. I.

da un dato punto è costante, sono le coniche che hanno un doppio contatto colla conica limite (1); la corda di contatto la chiameremo asse del circolo, il centro è il polo dell'asse rispetto alla conica limite.

Un circolo non euclideo si può definire anche come l'inviluppo di una retta che forma un angolo costante con una retta data (asse).

Avendo veduto (n. 4) che a tutti i circoli del piano semplice corrispondono le coniche che hanno un doppio contatto colla conica limite possiamo concludere che:

Ad un circolo euclideo di P' corrisponde un circolo non euclideo di P.

Ad un circolo non euclideo di P corrispondono in P' due circoli euclidei congiunti, cioè due circoli che tagliano il circolo doppio negli stessi due punti e sotto lo stesso angolo.

Möbius ha fatto corrispondere due piani (affinità circolare) in modo che ad un punto del primo corrisponda un solo punto del secondo, e viceversa, e che ai circoli euclidei del primo piano corrispondano i circoli pure euclidei del secondo, ed ha dimostrato che l'angolo sotto il quale si tagliano due curve di uno dei piani è uguale all'angolo sotto il quale si tagliano le curve corrispondenti nell'altro piano. La nostra corrispondenza è analoga a quella di Möbius, solamente uno dei due piani è euclideo e l'altro no; ma sempre ad un circolo corrisponde un circolo, e si mantiene la proprietà relativa all'uguaglianza degli angoli.

§ 3. Relazioni tra le distanze di due punti di P, o P', e dei punti corrispondenti in P', o P.

7. Nella geometria non euclidea la distanza tra due punti, o l'angolo di due rette, è della forma

$$m\pi \pm \delta$$

dove m è un intero positivo o negativo e δ è minore o al più eguale a $\frac{\pi}{2}$. Segue da ciò che due punti, o due rette, hanno una distanza, o un angolo, δ minore o al più uguale a $\frac{\pi}{2}$, ed una distanza, o un angolo, supplementare $\pi - \delta$.

Preso un punto p abbiamo infiniti circoli non euclidei che hanno il centro in p; tutti questi circoli hanno pure lo stesso asse che è la polare di p rispetto alla conica limite, anzi l'asse è un circolo di raggio $\frac{\pi}{2}$ col centro in p; infatti se da p tiriamo una trasversale che tagli l'asse in p_1 e la conica limite in $o_1 o_2$ i punti $p p_1 o_1 o_2$ formano un gruppo armonico, quindi la distanza tra $p p_1$ è

$$\delta = \frac{-i}{2} \log - 1 = \frac{\pi}{2},$$

vale a dire l'asse è il luogo dei punti distanti di un quadrante da p.

Se prendiamo quattro punti di una retta sappiamo che il loro rapporto anarmonico è uguale a quello delle loro polari rispetto ad una qualunque conica, quindi

(1) Klein, l. c.

nella geometria non euclidea la distanza di due punti è uguale all'angolo che formano le loro rette polari rispetto alla conica limite.

Vediamo come, dato un punto p, si determina in P' il circolo corrispondente alla sua polare rispetto alla conica limite. Da p tiriamo le tangenti $po_1\, po_2$ e chiamiamo $o'_1\, o'_2$ i punti corrispondenti in P' sul circolo doppio ai punti di contatto $o_1\, o_2$. Il circolo corrispondente alla polare $o_1 o_2$ di p è il circolo che passa per $o'_1\, o'_2$ e taglia ortogonalmente il circolo doppio, quindi il suo centro è il polo della retta $o'_1\, o'_2$ rispetto al circolo doppio, perciò tutto sta a determinare questo polo m' dati i punti $p'\mathbf{p}'$ corrispondenti a p. Se conduciamo le rette $J'_1\mathbf{p}'\ J'_2 p'$ il loro punto comune è o'_2, e se conduciamo le rette $J'_1 p'\ J'_2\mathbf{p}'$ il loro punto comune è o'_1; le quattro rette condotte formano un quadrilatero, le due diagonali $J'_1 J'_2\ o'_1 o'_2$ sono separate armonicamente dai vertici $p'\,\mathbf{p}'$, perciò chiamato H il punto comune alle dette diagonali le rette

$$HJ'_1 J'_2 \quad Ho'_1 o'_2 \quad Hp' \quad H\mathbf{p}'$$

formano un fascio armonico, e formano un gruppo armonico i loro poli rispetto al circolo doppio, ossia i punti

$$I' \quad m' \quad p' \quad \mathbf{p}'.$$

Questa proprietà basta per determinare m' dati $p'\mathbf{p}'$.

Il centro del circolo corrispondente alla polare d'un punto p rispetto alla conica limite è il conjugato armonico del punto fondamentale I' rispetto ai punti $p'\,\mathbf{p}'$ corrispondenti a p.

8. Nel piano doppio prendiamo due punti $p_1 p_2$ e poniamo

$$p_1 p_2 = \delta \quad Ip_1 = \delta_1 \quad Ip_2 = \delta_2\,;$$

ai punti $p_1 p_2$ corrispondono nel piano semplice le coppie $p'_1\mathbf{p}'_1\ p'_2\mathbf{p}'_2$. Sia

$$p'_1 p'_2 = \delta' \quad I'p'_1 = \delta'_1 \quad I'\mathbf{p}'_1 = \Delta'_1$$
$$\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_2 = \Delta' \quad I'p'_2 = \delta'_2 \quad I\mathbf{p}'_2 = \Delta'_2\,,$$

e ricordiamo che per la relazione (5)

$$\delta'_1 \Delta'_1 = k^2 \quad \delta'_2 \Delta'_2 = k^2. \tag{6}$$

Siano $m'_1\ m'_2$ i conjugati armonici di I' rispetto a $p'_1\mathbf{p}'_1\ p'_2\mathbf{p}'_2$, e sia

$$m'_1 m'_2 = d' \quad I'm'_1 = d'_1 \quad I'm'_2 = d'_2\,;$$

i circoli che hanno i centri in $m'_1 m'_2$ e tagliano ortogonalmente il circolo doppio sappiamo che corrispondono alle rette polari di $p_1 p_2$ rispetto alla conica limite; ma l'angolo formato dalle rette polari è uguale alla distanza dei punti $p_1 p_2$, quindi questa distanza è uguale all'angolo formato dai circoli che hanno i centri in $m'_1 m'_2$ e tagliano ortogonalmente il circolo doppio. I raggi di questi due circoli sono

$$\pm\sqrt{d'^2_1 - k^2} \qquad \pm\sqrt{d'^2_2 - k^2}\,,$$

perciò

$$\cos\delta = \pm\frac{(d'^2_1 - k^2) + (d'^2_2 - k^2) - d'^2}{\sqrt{(d'^2_1 - k^2)(d'^2_2 - k^2)}}\,; \tag{7}$$

il segno $\pm$ del secondo membro dipende dai due angoli che formano i circoli, o ciò che è lo stesso dalle due distanze supplementari dei punti $p_1 p_2$.

Se chiamiamo φ l'angolo formato dalle rette $I'p'_1\mathbf{p}'_1$ $I'p'_2\mathbf{p}'_2$, e consideriamo i triangoli $I'm'_1m'_2$ $I'p'_1p'_2$ abbiamo

$$d'^2 = d'^2_1 + d'^2_2 - 2d'_1 d'_2 \cos\varphi$$
$$\delta'^2 = \delta'^2_1 + \delta'^2_2 - 2\delta'_1 \delta'_2 \cos\varphi,$$

ed eliminando φ

$$\frac{d'^2_1 + d'^2_2 - d'^2}{d'_1 d'_2} = \frac{\delta'^2_1 + \delta'^2_2 - \delta'^2}{\delta'_1 \delta'_2}$$

dalla quale relazione possiamo ricavare il valore di d'^2, sostituirlo nella (7) ed avere così

$$(8) \qquad \cos\delta = \pm \frac{d'_1 d'_2 (\delta'^2_1 + \delta'^2_2 - \delta'^2) - 2k^2\delta'_1\delta'_2}{2\delta'_1\delta'_2 \sqrt{(d'^2_1 - k^2)(d'^2_2 - k^2)}}.$$

Avendo preso $m'_1 m'_2$ conjugati armonici di I' rispetto a $p'_1\mathbf{p}'_1\, p'_2\mathbf{p}'_2$ abbiamo le relazioni

$$\frac{\delta'_1}{d'_1 - \delta'_1} + \frac{\Delta'_1}{d'_1 - \Delta'_1} = 0$$
$$\frac{\delta'_2}{d'_2 - \delta'_2} + \frac{\Delta'_2}{d'_2 - \Delta'_2} = 0,$$

e ricordando le (6) troviamo dalle due precedenti

$$(9) \qquad \begin{aligned} d'_1 &= \frac{2k^2\delta'_1}{k^2 + \delta'^2_1} = \frac{2k^2\Delta'_1}{k^2 + \Delta'^2_1} \\ d'_2 &= \frac{2k^2\delta'_2}{k^2 + \delta'^2_2} = \frac{2k^2\Delta'_2}{k^2 + \Delta'^2_2}, \end{aligned}$$

valori di $d'_1 d'_2$ che posti nella (8) danno

$$\pm\cos\delta = \frac{2k^2(\delta'^2_1 + \delta'^2_2 - \delta'^2) - (k^2 + \delta'^2_1)(k^2 + \delta'^2_2)}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)},$$

ovvero

$$\pm\cos\delta = \frac{-2k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)} - 1$$

dalla quale

$$\frac{1 \pm \cos\delta}{2} = \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)}.$$

Prendendo una volta il segno $-$ ed un'altra volta il segno $+$ abbiamo le due relazioni

$$(10) \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2} &= \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)} \\ \cos^2\frac{\delta}{2} &= \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)} \end{aligned}$$

che risolute rispetto a δ ci danno le due distanze supplementari dei punti $p_1\, p_2$. Queste due formole si possono rinchiudere nell'unica

$$(11) \qquad \operatorname{sen}^2\frac{m\pi \pm \delta}{2} = \frac{-k^2\delta'^2}{(k^2 - \delta'^2_1)(k^2 - \delta'^2_2)}$$

dove m è un intero positivo o negativo; quest'ultima equazione si può risolvere rispetto ad $m\pi \pm \delta$ e così avere tutte le distanze tra p_1 e p_2.

Nei secondi membri delle (10) entra la distanza tra $p'_1p'_2$ e le distanze di $p'_1p'_2$ da I'; però stante la doppia forma dell' unico valore delle $d'_1d'_2$, data dalle (9), è chiaro che potevamo introdurre nei secondi membri delle (10) in luogo di $\delta'\delta'_1\delta'_2$ le quantità analoghe relative alla coppia $\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2$ di punti, ovvero alle coppie $\mathbf{p}'_1p'_2$ $p'_1\mathbf{p}'_2$ senza alterare le due equazioni. Avvertiamo solamente che nel caso delle coppie $\mathbf{p}'_1p'_2$ $p'_1\mathbf{p}'_2$ la prima delle (10) si cambia nella seconda, e viceversa.

Passiamo alla risoluzione della (11). Formando il quadrato del coseno abbiamo

$$\cos^2\frac{m\pi\pm\delta}{2}=\frac{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)},$$

e per mezzo di questa equazione e della (11)

$$e^{i(m\pi\pm\delta)}=\frac{\pm k\delta'\pm\sqrt{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}}{\pm k\delta'\mp\sqrt{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}},$$

dove il segno di $k\delta'$ deve essere lo stesso nel numeratore e nel denominatore, mentre il segno del radicale deve essere contrario. Prendendo il logaritmo dei due membri risulta

$$i(m\pi\pm\delta)=\log\frac{\pm k\delta'\pm\sqrt{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}}{\pm k\delta'\mp\sqrt{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}},$$

e finalmente

$$(12)\qquad m\pi\pm\delta=i\log\frac{k\delta'+\sqrt{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}}{k\delta'-\sqrt{(k^2-\delta'^2_1)(k^2-\delta'^2_2)+k^2\delta'^2}}.$$

Questa formola che dà la distanza tra p_1p_2 può servire a farci passare dalle relazioni metriche di una figura del piano non euclideo a quelle relative alla corrispondente figura nel piano euclideo.

Supponiamo che il punto p'_2 cada in I', allora

$$\delta'_2=0\qquad\delta'_1=\delta',$$

ǝʌop δ' è la distanza tra I' e p'_1, e le formole (11) (12) divengono

$$\operatorname{sen}^2\frac{m\pi\pm\delta}{2}=\frac{\delta'^2}{\delta'^2-k^2}\qquad\qquad m\pi\pm\delta=i\log\frac{\delta'+k}{\delta'-k};$$

la seconda, data la distanza δ' di un punto del piano P' da I', ci dà la distanza del punto corrispondente in P da I. Risolvendo la prima rispetto a δ' abbiamo

$$\delta'=ik\tan\frac{m\pi\pm\delta}{2}$$

dalla quale facendo m pari o dispari possiamo far derivare le altre

$$(13)\qquad \Delta'=I'\mathbf{p}'_1=ik\cot\frac{\delta}{2}\qquad\qquad \delta'=I'p'_1=\frac{k}{i}\tan\frac{\delta}{2}\ \text{[1]}$$

le quali, data la distanza δ di un punto del piano P da I, ci danno le distanze da I' dei punti corrispondenti in P'.

[1] Per comodo conveniamo di chiamare $\mathbf{p}'_1$ il punto la cui distanza da I' viene espressa colla cotangente, e il p'_1 punto la cui distanza da I' viene espressa colla tangente.

9. Per passare dalle relazioni metriche di una figura data nel piano euclideo alle relazioni metriche della corrispondente figura nel piano non euclideo bisogna, data la distanza δ di $p_1 p_2$ e le distanze $\delta_1 \delta_2$ di $p_1 p_2$ da I, trovare le distanze

$$p'_1 p'_2 \quad \mathbf{p}'_1 p'_2 \quad p'_1 \mathbf{p}'_2 \quad \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$$

dei punti corrispondenti.

Abbiamo osservato che per aver δ si può scegliere indifferentemente la prima o la seconda delle (10), ed abbiamo osservato che nel secondo membro al posto delle $\delta'\ \delta'_1\ \delta'_2$ relative alla coppia $p'_1 p'_2$ di punti possiamo mettere le quantità analoghe relative alla coppia $\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$, e che se mettiamo quelle relative alle coppie $\mathbf{p}'_1 p'_2\ p'_1 \mathbf{p}'_2$ il primo membro della prima diviene $\cos^2\frac{\delta}{2}$, quello della seconda $\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}$.
Ora tra le (10) scegliamo la prima e facciamo le sostituzioni

$$\delta'_1 = \frac{k}{i}\tan\frac{\delta_1}{2} \qquad \delta'_2 = \frac{k}{i}\tan\frac{\delta_2}{2}$$

$$\Delta'_1 = i\,k\cot\frac{\delta_1}{2} \qquad \Delta'_2 = i\,k\cot\frac{\delta_2}{2}$$

$$\Delta'_1 = i\,k\cot\frac{\delta_1}{2} \qquad \delta'_2 = \frac{k}{i}\tan\frac{\delta_2}{2}$$

$$\delta'_1 = \frac{k}{i}\tan\frac{\delta_1}{2} \qquad \Delta'_2 = i\,k\cot\frac{\delta_2}{2}$$

rispettivamente secondochè si tratta della forma relativa alle coppie

$$p'_1 p'_2 \quad \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \quad \mathbf{p}'_1 p'_2 \quad p'_1 \mathbf{p}'_2;$$

in questo modo abbiamo quattro equazioni che risolute rispetto a δ' ci danno

$$(14) \qquad \begin{aligned} p'_1 p'_2 &= \frac{i\,k\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}} & \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 &= \frac{-i\,k\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\delta_1}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta_2}{2}} \\ \mathbf{p}'_1 p'_2 &= \frac{i\,k\cos\frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2}} & p'_1 \mathbf{p}'_2 &= \frac{i\,k\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta_1}{2}\operatorname{sen}\frac{\delta_2}{2}}, \end{aligned}$$

che sono le formole cercate. Nella risoluzione delle dette quattro equazioni si presenta un' estrazione di radice quadrata che porta un doppio segno $\pm$, ora i segni delle (14) sono determinati in modo che siano soddisfatte le relazioni

$$p'_1 p'_2 = \frac{k^2\,\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2}{\Delta'_1\,\Delta'_2} \qquad \mathbf{p}'_1 p'_2 = \frac{k^2 .\, p'_1 \mathbf{p}'_2}{\delta'_1 .\, \Delta'_2}$$

che fanno passare dalla distanza di due punti a quella dei punti congiunti.

§ 4. I circoli non euclidei che passano per due o per tre punti dati.

10. Il circolo doppio insieme ad un altro qualunque E' determina un fascio di circoli; sia R' la corda comune a distanza finita (asse radicale). Tutti i circoli del fascio incontrano il circolo doppio negli stessi due punti, quindi i circoli non euclidei N

corrispondenti toccano la conica limite negli stessi due punti, ossia sono concentrici. Il centro e le due tangenti condotte da esso alla conica limite formano uno dei circoli concentrici N, a questo circolo devono corrispondere in P' due circoli del fascio che si spezzano in due rette, in altre parole al centro dei circoli N corrispondono i punti limite $l'_1\, l'_2$ del fascio determinato dal circolo E' e dal circolo doppio.

Alle rette che passano per il centro dei circoli N corrispondono i circoli che passano per i punti limite $l'_1\, l'_2$, ma questi circoli tagliano ortogonalmente tutti i circoli del dato fascio, dunque:

La tangente ad un circolo non euclideo è perpendicolare al raggio che va al punto di contatto.

11. Qual'è il punto corrispondente al centro di un circolo ortogonale al circolo doppio?

Il centro è il polo della retta all'infinito $J'_1\, J'_2$, quindi per ottenerlo bisogna condurre le tangenti al circolo nei punti $J'_1\, J'_2$ e determinare la loro intersezione. Trasportando questa costruzione in P dovremo trovare i punti comuni alla retta che corrisponde al circolo ed alle rette fondamentali, da questi punti partono, oltre alle dette due rette fondamentali, due tangenti alla conica limite, il punto comune è il punto cercato.

12. La retta all'infinito ed una retta che passi per un dato punto p' insieme al circolo doppio determinano un fascio di circoli; due congiunti si riducono ad un punto, hanno un punto doppio, e i due punti così ottenuti sono i punti limite $l'_1\, l'_2$ del fascio. Variando la retta per p' variano i punti limite e descrivono la Jacobiana della rete di circoli determinata dal fascio di rette col centro in p', ciascuna unita alla retta all'infinito, e dal circolo doppio; questa Jacobiana è il circolo E'_1 che taglia ortogonalmente tutti i circoli della rete, vale a dire il circolo che ha il centro in p' e taglia ortogonalmente il circolo doppio; ad E'_1 corrisponde in P una retta L_1. Per mezzo di un'analoga considerazione relativa a $\mathbf{p}'$ troviamo un altro circolo Jacobiano E'_2, ed in P un'altra retta L_2.

Alle rette che passano per p' ed alle rette che passano per $\mathbf{p}'$ corrispondono due sistemi di circoli non euclidei che passano per I e per p; al luogo E'_1 dei punti limite relativo a p' corrisponde il luogo dei centri dei circoli di un sistema, e al luogo dei punti limite E'_2 relativo a $\mathbf{p}'$ corrisponde il luogo dei centri dei circoli dell'altro sistema, dunque per ciò che abbiamo veduto si trova che questi due luoghi di P sono le rette $L_1\, L_2$. Dati i punti $I\ p$ possiamo facilmente costruirle; basta osservare che $p'\,\mathbf{p}'$ sono i centri dei circoli corrispondenti, quindi conducendo da I e da p le tangenti alla conica limite abbiamo un quadrilatero, una diagonale è la $I\,p$, le altre due sono $L_1\, L_2$.

Alla retta $I\,p$ corrisponde la retta $I'\,p'\,\mathbf{p}'$ che appartiene ad ambedue i fasci di rette considerati in P' e che per conseguenza è tagliata ortogonalmente dai due circoli $E'_1\, E'_2$, perciò le $L_1\, L_2$ tagliano ortogonalmente la retta $I p$ in due punti $m_1\, m_2$ che essendo centri di circoli che passano per $I p$ devono dividere per metà i due segmenti δ e $\pi - \delta$ formati da I e da p. I punti $m_1\, m_2$ sono fra di loro alla distanza di un quadrante, proprietà analoga a quella delle bisettrici degli angoli formati da due rette.

Riassumendo le proprietà stabilite diremo che:

I circoli non euclidei che passano per due dati punti formano due sistemi semplicemente infiniti, il luogo dei loro centri è formato da due rette, una per ciascun sistema, le quali tagliano ortogonalmente la retta che congiunge i punti dati e dividono per metà le loro due distanze.

I circoli non euclidei che toccano due rette date formano due sistemi semplicemente infiniti, l'inviluppo dei loro assi è formato da due punti, uno per ciascun sistema, i quali sono distanti di un quadrante dal punto comune alle due rette date, e le rette che li congiungono con questo punto sono le bisettrici del loro angolo.

Le rette $L_1 L_2$ e la retta Ip formano un triangolo conjugato rispetto alla conica limite. Il punto comune alle $L_1 L_2$ è il centro del circolo che appartiene ai due sistemi, ed essendo polo della retta Ip il circolo comune è la Ip considerata due volte.

Osservando che l'asse di un circolo è la polare del centro rispetto alla conica limite possiamo dire che:

L'inviluppo degli assi dei circoli non euclidei che passano per due punti dati è formato dai due punti di mezzo dei due segmenti determinati dai punti dati[1].

Il luogo dei centri dei circoli non euclidei che toccano due rette date è formato da due rette ortogonali che sono le bisettrici degli angoli formati dalle due rette date.

13. Per due punti $p_1 p_2$ e per I passano quattro circoli non euclidei[2] che corrispondono alle quattro rette

$$p'_1 p'_2 \quad \mathbf{P}'_1 p'_2 \quad p'_1 \mathbf{P}'_2 \quad \mathbf{P}'_1 \mathbf{P}'_2.$$

I centri si possono costruire nel seguente modo. Se dividiamo per metà i lati del triangolo e ad essi tiriamo le perpendicolari nei punti di mezzo abbiamo tre rette che passano per uno stesso punto che è uno dei centri cercati; se poi dividiamo per metà i lati supplementari e tiriamo le perpendicolari ai lati in questi nuovi punti di mezzo abbiamo tre nuove rette, due incontrano una delle tre prime in uno stesso punto, i tre punti così ottenuti sono gli altri tre centri cercati. I sei lati del quadrangolo formato dai centri sono le sei rette luogo dei centri dei circoli che passano per Ip_1, $p_1 p_2$, $p_2 I$. Per trovare i quattro centri dei circoli iscritti in un dato triangolo basta fare la costruzione reciproca.

Vi sono quattro circoli non euclidei che passano per tre punti dati[3].

Vi sono quattro circoli non euclidei che toccano tre rette date.

[1] Poncelet nel suo *Traité des propriétés projectives des figures* T. 1° n. 413 enuncia la proprietà nel seguente modo. Facendo variare una conica soggetta a passare per due punti dati AB, ed a toccare in due punti TT' un' altra sezione conica mnp data di posizione, la secante di contatto TT', che può essere anche ideale, cambierà situazione girando costantemente sopra un punto fisso L posto sulla retta che contiene AB.

[2] *Le trasformazioni piane doppie* (n. 6, II).

[3] Poncelet, l. c.

14. Per mostrare un' applicazione delle formole stabilite nel paragrafo precedente risolviamo il seguente problema:

Dati i lati $a\ b\ c$ di un triangolo trovare i raggi dei quattro circoli circoscritti.

Siano $a'\ b'\ c'$ i lati del triangolo $I'\,p'_1\,p'_2$, $a\ b\ c$ i lati del triangolo corrispondente $I\,p_1\,p_2$, e sia $I'\,m'$ la perpendicolare condotta da I' al lato $p'_1\,p'_2$. Abbiamo

$$I'\,m' = \frac{\sqrt{p'\,(p'-a')\,(p'-b')\,(p'-c')}}{a'} \tag{15}$$

dove

$$p' = \frac{a'+b'+c'}{2}.$$

Alla retta $p'_1\,p'_2$ corrisponde uno dei quattro circoli circoscritti al dato triangolo ed il suo centro è il punto corrispondente ai punti limite $l'_1\ l'_2$ del fascio di circoli determinato dalla $p'_1\,p'_2$ e dal circolo doppio; ora

$$I'\,l' = I'\,m' \pm \sqrt{\overline{I'\,m'}^2 - k^2}$$

quindi se r_1 è il raggio del circolo corrispondente alla $p'_1\,p'_2$

$$\frac{k}{i}\tan\frac{r_1}{2} = I'\,m' \pm \sqrt{\overline{I'\,m'}^2 - k^2}$$

da cui

$$\tan r_1 = \frac{i\,k}{I'\,m'}. \tag{16}$$

Per mezzo delle formole (13) (14) troviamo facilmente

$$p' = \frac{k}{i}\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{p-a}{2}\cos\dfrac{p}{2}}{\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}} \qquad p'-a' = \frac{k}{i}\,\frac{\cos\dfrac{p-a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{p}{2}}{\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}}$$

$$p'-b' = \frac{i k \operatorname{sen}\dfrac{p-c}{2}\cos\dfrac{p-b}{2}}{\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}} \qquad p'-c' = \frac{i k \operatorname{sen}\dfrac{p-b}{2}\cos\dfrac{p-c}{2}}{\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}},$$

che pongono la (15) sotto la forma

$$I'\,m' = \frac{k\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\,i\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}}$$

e quindi danno il valore di $I'\,m'$ che dobbiamo sostituire nella (16) per trovare

$$\tan r_1 = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\tan r_2 = \frac{2\cos\dfrac{a}{2}\operatorname{sen}\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\tan r_3 = \frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

$$\tan r_4 = \frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}$$

le ultime tre si deducono dalla prima ponendo successivamente al posto dei lati $a\ b\ c$ i lati

$$\begin{array}{ccc} \pi - a & \pi - b & c \\ \pi - a & b & \pi - c \\ a & \pi - b & \pi - c, \end{array}$$

infatti gli altri tre circoli sono dati dalle rette

$$p'_1\,\mathbf{P}'_2, \quad \mathbf{P}'_1\,p'_2, \quad \mathbf{P}'_1\,\mathbf{P}'_2,$$

e ricordiamoci che di due punti congiunti p' $\mathbf{p}'$ se uno corrisponde alla distanza δ di p da I l'altro corrisponde alla distanza supplementare $\pi - \delta$.

Se sopra una sfera prendiamo un triangolo i cui lati siano

$$a \quad b \quad c$$

e consideriamo i triangoli adiacenti che hanno per lati

$$\begin{array}{ccc} a & \pi - b & \pi - c \\ \pi - a & b & \pi - c \\ \pi - a & \pi - b & c \end{array}$$

vi sono quattro circoli circoscritti ai quattro triangoli; i valori dei loro raggi sono identici ai valori dei raggi che abbiamo trovato per i circoli non euclidei circoscritti ad un triangolo di lati $a\ b\ c$. Questo fatto mostra sempre più l'analogia tra la geometria euclidea e la geometria della sfera. Altri esempî di questa analogia ci si presenteranno in seguito e li verremo notando di mano in mano.

§ 5. Angoli formati da due circoli. Sistemi di circoli che tagliano circoli dati sotto angolo retto.

15. Prendiamo in P' due rette $R'_1\ R'_2$; i due circoli non euclidei $N_1\ N_2$ corrispondenti si tagliano in I, nel punto p corrispondente al punto p' comune alle rette $R'_1\ R'_2$, ed in altri due punti $p_1\ p_2$ corrispondenti ai punti di R'_1 i cui congiunti sono su R'_2 (¹). L'angolo delle rette $R'_1\ R'_2$ è uguale all'angolo dei circoli $N_1\ N_2$ in p, l'angolo delle rette che da I' vanno ai punti delle $R'_1\ R'_2$ situati sulla $J'_1\ J'_2$ è uguale all'angolo dei circoli $N_1\ N_2$ in I; ma i due angoli di P' sono uguali fra loro, quindi lo sono anche i due angoli di P. Gli angoli dei circoli $N_1\ N_2$ in $p_1\ p_2$ corrispondono agli angoli formati da una delle rette $R'_1\ R'_2$ col circolo corrispondente all'altra, quindi i circoli $N_1\ N_2$ si tagliano sotto uno stesso angolo, però differente dal primo, anche in $p_1\ p_2$.

(¹) *Le trasformazioni piane doppie* (n. 7. I, II).

Due circoli non euclidei si tagliano sotto uno stesso angolo in due punti, e sotto uno stesso angolo negli altri due[1].

Due delle tangenti comuni a due circoli non euclidei sono uguali fra loro, e le altre due sono pure uguali fra loro.

Come si distinguono le due coppie di punti nei quali gli angoli sono uguali?

L'asse del circolo N_1 corrisponde al circolo che taglia ortogonalmente il circolo doppio e che ha con esso R'_1 come corda comune, così l'asse del circolo N_2 corrisponde al circolo che taglia ortogonalmente il circolo doppio ed ha con esso R'_2 come corda comune; gli assi radicali di tre circoli passano per uno stesso punto, quindi essendo R'_1 R'_2 due dei tre assi radicali il terzo, cioè quello relativo ai due circoli ortogonali, passa per p', ma deve contenere i punti congiunti corrispondenti al punto comune ai due assi di N_1 N_2, dunque il terzo asse radicale è la retta $I' p'$, ed in P la retta Ip passa per il punto comune ai due assi.

Due punti nei quali due circoli non euclidei si tagliano sotto uno stesso angolo stanno per diritto col punto comune ai due assi[2].

Due tangenti uguali comuni a due circoli non euclidei si tagliano sulla retta che congiunge i due centri.

Chiameremo assi radicali di due circoli non euclidei le corde comuni che passano per il punto comune ai due assi.

Chiameremo centri di similitudine di due circoli non euclidei i punti comuni a due tangenti comuni uguali.

Diremo ortogonali due circoli non euclidei quando si tagliano ortogonalmente in due dei loro punti comuni.

16. Dato un circolo C' ed il suo congiunto $\mathbf{C}'$ al sistema dei circoli che tagliano ortogonalmente C' ed al sistema dei circoli congiunti che tagliano ortogonalmente $\mathbf{C}'$ corrisponde un sistema di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente il circolo N corrispondente a C' $\mathbf{C}'$. Presi i punti p_1 p_2 troviamo che in P' per p'_1 p'_2 passa un circolo ortogonale a C' ed uno ortogonale a $\mathbf{C}'$, questi circoli sono congiunti ai due che passano per $\mathbf{p}'_1$ $\mathbf{p}'_2$ e tagliano ortogonalmente C' $\mathbf{C}'$; così pure i circoli che passano per p'_1 $\mathbf{p}'_2$ e sono ortogonali a C' $\mathbf{C}'$ sono congiunti a quelli che passano per $\mathbf{p}'_1$ p'_2 e sono ortogonali a C' $\mathbf{C}'$.

V'è un sistema due volte infinito di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente un dato circolo non euclideo, per due punti arbitrarî passano quattro circoli del sistema.

Consideriamo nuovamente le due rette R'_1 R'_2 condotte per p'. I circoli che hanno il centro in p' tagliano ortogonalmente le rette R'_1 R'_2, e quindi danno in P un sistema di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente i due N_1 N_2 corrispondenti ad R'_1 R'_2; siccome i punti limite del fascio determinato da un circolo col centro in p' e dal circolo doppio stanno sulla retta $I' p'$, il luogo dei centri dei circoli non euclidei del

[1] Battaglini, *Sui circoli nella geometria non euclidea*. Giornale di matematica, v. 12.

[2] Battaglini, l. c.

sistema è la retta Ip. Abbiamo un sistema analogo considerando i circoli che tagliano ortogonalmente una delle rette date ed il circolo congiunto all'altra.

Vi sono due sistemi semplicemente infiniti di circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente due dati circoli non euclidei; un asse radicale è il luogo dei centri dei circoli di un sistema, l'altro asse radicale è il luogo dei centri dei circoli dell'altro sistema.

Dati tre circoli $C'_1\, C'_2\, C'_3$ v' è un circolo solo che li taglia ortogonalmente, considerando anche i circoli congiunti $\mathbf{C}'_1\, \mathbf{C}'_2\, \mathbf{C}'_3$ formiamo le terne

$$\begin{array}{lll} C'_1 & C'_2 & C'_3 \\ C'_1 & \mathbf{C}'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & C'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & C'_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & C'_2 & C'_3 \\ C'_1 & \mathbf{C}'_2 & C'_3 \\ C'_1 & C'_2 & \mathbf{C}'_3 \end{array}$$

che ci danno otto circoli dei quali ciascuno taglia ortogonalmente i circoli di una terna, i quattro circoli relativi alla prima colonna sono congiunti ai quattro relativi alla seconda e danno quattro circoli non euclidei che tagliano ortogonalmente i tre $N_1\, N_2\, N_3$.

Dati tre circoli non euclidei ve ne sono quattro ciascuno dei quali taglia ortogonalmente i tre circoli dati. I centri sono quattro punti nei quali concorrono tre a tre i sei assi radicali dei tre circoli dati([1]).

Chiameremo centri radicali i centri dei quattro circoli ortogonali ai tre circoli dati. Osserviamo che i sei assi radicali sono i lati del quadrangolo formato dai quattro centri radicali.

Con considerazioni reciproche deduciamo che i sei centri di similitudine di tre dati circoli sono i vertici di un quadrilatero completo. Diremo assi di similitudine i lati di questo quadrilatero.

17. Abbiamo chiamato assi radicali di due circoli non euclidei le rette luogo dei centri dei circoli che tagliano ortogonalmente i due circoli dati, come nella geometria euclidea si chiama asse radicale di due circoli la retta luogo dei centri dei circoli che li tagliano ortogonalmente; così pure abbiamo chiamato centri radicali di tre circoli non euclidei i centri dei quattro circoli che li tagliano ortogonalmente, come nella geometria euclidea si chiama centro radicale il centro del circolo ortogonale ai tre circoli dati. Questa analogia giustifica pienamente le definizioni date per l'asse radicale e per il centro radicale, che si mostrano sempre più opportune per la seguente proprietà.

Consideriamo un circolo euclideo E' di P' ed il corrispondente circolo non euclideo N di P. Una retta condotta per I' taglia E' in due punti $p'_1\, p'_2$, ed abbiamo

$$I'p'_1 \,.\, I'p'_2 = \overline{I'p'}^2$$

([1]) Battaglini, l. c.

dove $I'p'$ è una delle tangenti condotte da I' al circolo E'. La retta corrispondente in P passa per I e taglia il circolo N in due punti $p_1\, p_2$. Ponendo

$$Ip_1 = \delta_1 \quad Ip_2 = \delta_2 \quad Ip = \delta$$

e trasformando la relazione precedente colle formole (13) troviamo

$$\tan\frac{\delta_1}{2}\tan\frac{\delta_2}{2} = \tan^2\frac{\delta}{2} \quad (^1).$$

Il prodotto

$$\tan\frac{\delta_1}{2}\tan\frac{\delta_2}{2},$$

che si mantiene costante qualunque sia la trasversale condotta per I, si può chiamare potenza del punto rispetto al circolo.

Gli assi radicali di due circoli non euclidei sono il luogo dei punti che hanno la stessa potenza rispetto ai due dati circoli.

Infatti le tangenti ai due circoli condotte da uno stesso punto di un asse radicale sono uguali perchè il punto è centro di un circolo ortogonale ai due circoli dati, e la potenza di un punto rispetto ad un circolo è $\tan^2\frac{\delta}{2}$ dove δ è la lunghezza della tangente condotta dal punto al circolo.

I quattro centri radicali di tre circoli non euclidei sono i quattro punti che hanno la stessa potenza rispetto ai tre circoli.

18. Siano $o'_1\, o'_2$ i punti in cui una retta R'_1 taglia il circolo doppio, e sia r'_1 il polo della R'_1. Il quadrilatero $o'_1\, I'\, o'_2\, r'_1$ ha due angoli retti in $o'_1\, o'_2$, quindi gli angoli in $I'\, r'_1$ sono supplementari, e il circolo congiunto alla R'_1 passa per $I'\, o'_1\, o'_2\, r'_1$. Una retta R'_2 che passi per r'_1 evidentemente taglia sotto lo stesso angolo la R'_1 ed il suo circolo congiunto, quindi ha per corrispondente un circolo non euclideo N_2 che taglia sotto lo stesso angolo in tutti i punti comuni il circolo non euclideo N_1 corrispondente alla R'_1.

All'asse del circolo N_2 corrisponde il circolo che passa per i punti $o'_3\, o'_4$, comuni alla R'_2 ed al circolo doppio, e che lo taglia ortogonalmente, vale a dire il circolo che passa per $o'_3\, o'_4$ ed ha il centro nel polo r'_2 della R'_2; ma la R'_2 passa per il polo r'_1 della R'_1, dunque r'_2 è un punto della R'_1, in altre parole il circolo corrispondente all'asse di N_2 taglia ortogonalmente la R'_1; nel piano P ciò equivale a dire che l'asse di N_2 passa per il centro di N_1.

Se due circoli non euclidei si tagliano sotto lo stesso angolo in tutti i loro punti comuni l'asse di uno passa per il centro dell'altro(²).

(¹) Questa relazione ha l'analoga sulla sfera. Se I è un punto della sfera e se da esso si conduce un circolo massimo che tagli un circolo della sfera $p_1\, p_2$, se $Ip_1 = \delta_1$, $Ip_2 = \delta_2$, e se l'arco di circolo massimo che passa per I ed è tangente al circolo è $Ip = \delta$, abbiamo

$$\tan\frac{\delta_1}{2}\tan\frac{\delta_2}{2} = \tan^2\frac{\delta}{2}$$

vedi per es. Steiner, G. di Crelle t. 2.

(²) Battaglini, *Sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche*, G. di matematiche v. 12.

§ 6. I circoli non euclidei tangenti a dati circoli non euclidei.

19. Siano $C'_1\, C'_2\, C'_3$ tre circoli presi ad arbitrio in P, e siano $\mathbf{C}'_1\, \mathbf{C}'_2\, \mathbf{C}'_3$ i tre circoli congiunti. I circoli che toccano quelli di una delle seguenti terne

$$\begin{array}{ccccccc} C'_1 & C'_2 & C'_3 & \qquad & \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & \mathbf{C}'_3 \\ C'_1 & \mathbf{C}'_2 & \mathbf{C}'_3 & & \mathbf{C}'_1 & C'_2 & C'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & C'_2 & \mathbf{C}'_3 & & C'_1 & \mathbf{C}'_2 & C'_3 \\ \mathbf{C}'_1 & \mathbf{C}'_2 & C'_3 & & C'_1 & C'_2 & \mathbf{C}'_3 \end{array}$$

danno in P circoli non euclidei che toccano i tre circoli $N_1\, N_2\, N_3$; però i circoli tangenti ad una terna della prima colonna sono congiunti a quelli tangenti alla corrispondente terna della seconda colonna, quindi si vede che in P avremo 32 circoli non euclidei tangenti ad $N_1\, N_2\, N_3$.

Vi sono 32 circoli non euclidei tangenti a tre dati circoli non euclidei.

Cayley ha risoluto il problema di descrivere una conica che abbia un doppio contatto con una conica data e sia tangente a tre coniche che pure hanno un doppio contatto colla conica data (¹). Nel linguaggio della geometria non euclidea il problema precedente si riduce a descrivere i circoli non euclidei che toccano tre dati circoli pure non euclidei. Ecco la soluzione data da Cayley. Congiungendo uno dei quattro centri radicali dei tre circoli dati col polo di un asse di similitudine rispetto ad uno di questi circoli si hanno 16 rette che tagliano il circolo nei 32 punti di contatto coi 32 circoli cercati.

Se i tre circoli $C'_1\, C'_2\, C'_3$ sono congiunti a se stessi hanno per corrispondenti in P tre rette $R_1\, R_2\, R_3$, e gli otto circoli tangenti ai circoli C' si separano in quattro coppie di circoli congiunti che danno i quattro circoli tangenti alle rette R. Per un teorema dimostrato dal d.r Hart (²) sappiamo che i circoli tangenti a tre circoli dati sono quattro a quattro tangenti ad uno stesso circolo, dunque in P vi sono quattro circoli non euclidei che toccano ciascuno tutti e quattro i circoli tangenti alle R.

I quattro circoli iscritti in un triangolo dato sono tangenti a quattro altri circoli.

I quattro circoli circoscritti ad un triangolo dato sono tangenti ad altri quattro circoli.

Questi teoremi costituiscono un' estensione del teorema di Feuerbach alla geometria non euclidea (³).

20. Quando quattro circoli, euclidei, sono tangenti ad un quinto le lunghezze delle loro tangenti comuni soddisfano l'elegante relazione

$$(1'4')\,(2'3') \pm (2'4')\,(3'1') \pm (3'4')\,(1'2') = 0\,, \tag{17}$$

(¹) G. di Crelle, v. 39.

(²) Vedi per es. Salmon, *Sezioni coniche* (ed. francese).

(³) Sarebbe interessante cercare la proprietà non euclidea che racchiude come caso speciale la proprietà dei nove punti del circolo di Feuerbach.

trovata da Casey [1] nella quale $(1'2')$ rappresenta la lunghezza della tangente comune al primo e al secondo circolo, ecc. Se chiamiamo $r_1\, r_2$ i raggi del primo e secondo circolo, D la distanza dei loro centri, abbiamo

$$(1'2')^2 = D^2 - (r_1 - r_2)^2 ;$$

ma

$$D^2 = r^2_1 + r^2_2 - 2r_1 r_2 \cos(1'2') ,$$

dove $\cos(1'2')$ è il coseno dell'angolo formato dal primo e secondo circolo, dunque

$$(1'2')^2 = 4r_1 r_2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (1'2').$$

Possiamo trovare dei valori analoghi per $(2'3'), (3'4'), \ldots$. sostituirli nella (17) e dire che tra gli angoli sotto i quali si tagliano quattro circoli euclidei tangenti ad un quinto esiste la relazione

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (1'4') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (2'3') \pm \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (2'4') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (3'1') \pm \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (3'4') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (1'2') = 0.$$

Dal momento che passando dal piano P' al piano P si mantiene l'uguaglianza degli angoli abbiamo che:

Se quattro circoli non euclidei sono tangenti ad un quinto tra i loro angoli, o le loro tangenti comuni, deve esistere la relazione

$$(18) \qquad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (14) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (23) \pm \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (24) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (31) \pm \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (34) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (12) = 0.$$

Questa formola è del tutto analoga ad una dimostrata da Casey [2] per quattro circoli di una sfera tangenti ad un quinto. Se i quattro circoli si riducono ciascuno ad un punto la (18) esprime una relazione tra i lati e le diagonali di un quadrilatero iscritto in un circolo non euclideo, e così abbiamo l'estensione del teorema di Tolomeo alla geometria non euclidea.

Questo teorema può dimostrarsi anche trasformando colle (14) la relazione (17) che esiste tra le distanze di quattro punti di una retta. Infatti se chiamiamo $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ le distanze dei punti 1 2 3 4 da I abbiamo

$$(1'2') = \frac{i\,k \operatorname{sen} \frac{1}{2} (12)}{\cos\frac{\delta_1}{2} \cos\frac{\delta_2}{2}} \qquad (2'3') = \frac{i\,k \operatorname{sen} \frac{1}{2} (23)}{\cos\frac{\delta_2}{2} \cos\frac{\delta_3}{2}}$$

$$(3'1') = \frac{i\,k \operatorname{sen} \frac{1}{2} (31)}{\cos\frac{\delta_3}{2} \cos\frac{\delta_1}{2}} \qquad (1'4') = \frac{i\,k \operatorname{sen} \frac{1}{2} (14)}{\cos\frac{\delta_1}{2} \cos\frac{\delta_4}{2}}$$

$$(2'4') = \frac{i\,k \operatorname{sen} \frac{1}{2} (24)}{\cos\frac{\delta_2}{2} \cos\frac{\delta_4}{2}} \qquad (3'4') = \frac{i\,k \operatorname{sen} \frac{1}{2} (34)}{\cos\frac{\delta_3}{2} \cos\frac{\delta_4}{2}}$$

valori che posti nella (17) ci danno la (18).

[1] Salmon, l. c.
[2] Salmon, l. c.

21. Se oltre ai piani $P\,P'$ consideriamo un altro piano doppio Π e stabiliamo una corrispondenza doppia di secondo ordine tra P' e Π prendendo in P' un circolo doppio diverso da quello relativo alla corrispondenza tra P' e P, ad un punto di P corrispondono due punti di P' ed a questi due punti di Π, ad un punto di Π corrispondono due punti di P' ed a questi due punti di P, quindi abbiamo una corrispondenza (2,2) tra P e Π. È facile vedere che con questa corrispondenza considerando P e Π come due piani non euclidei ad un circolo di P corrispondono due circoli di Π e viceversa. L'angolo non euclideo sotto il quale si tagliano due curve di P è uguale all'angolo non euclideo sotto il quale si tagliano le curve corrispondenti in Π; questa proprietà discende immediatamente dall'analoga che abbiamo dimostrata per la corrispondenza tra P e P' [1].

[1] Battaglini, *Sull'affinità circolare non euclidea*. Accademia di Napoli, anno 1876.

Nuove ricerche sulle caverne ossifere della Liguria.

Memoria di ARTURO ISSEL

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nelle sedute 2 dicembre 1877 e 3 febbraio 1878.

Quaerite et invenietis
Evang. Math., VIII.

Mi propongo di descrivere in queste pagine gli oggetti raccolti in alcune caverne del Finalese, le quali anticamente servirono all'uomo di abitazione o di tomba.

Le osservazioni, le notizie e le ipotesi che mi accingo ad esporre sono in gran parte nuove ed emergono precipuamente dagli scavi sistematici da me eseguiti l'anno scorso, nelle grotte delle Fate, del Sanguineto e di Pollera, e soprattutto in quella delle Arene candide, per mandato e per conto del Ministero dell'Istruzione.

Avendo preso di mira, nelle mie ricerche, i fatti che più specialmente hanno tratto alla paleontologia e all' archeologia preistorica, non toccherò che per incidenza agli intricati quesiti dell'antropologia; tanto più che gli scheletri umani scoperti in una di queste grotte saranno illustrati sotto il punto di vista puramente antropologico da persona competente in simili studî.

Prima di entrare in materia mi sta a cuore di soddisfare ad un debito di riconoscenza rendendo pubbliche grazie agli amici e colleghi che mi prestarono assistenza e consiglio nel corso delle mie ricerche: al professore Emanuele Celesia e al capitano Enrico d'Albertis che vollero dividere meco le fatiche di alcune gite, al reverendo D. Perrando che generosamente mi comunicò alcuni preziosi esemplari della sua collezione, al professore Pellegrino Strobel che si compiacque di determinare per me parecchi avanzi di mammiferi di difficile interpretazione.

I.

GROTTA SEPOLCRALE DELLE ARENE CANDIDE.

Posizione, dimensioni ed origine della caverna.

A ponente della piccola città di Final Marina si estolle un' erta e scoscesa propaggine degli Apennini che ha nome Caprazoppa, e raggiunge nel suo punto culminante l'altezza di 293 metri sul livello del mare.

Questo monte è costituito alla sua parte inferiore da un calcare dolomitico di color bigio chiazzato di ferrigno, in stratificazioni assai inclinate o quasi verticali (bene spesso occultate da un intenso metamorfismo) e superiormente da una sorta di

panchina fossilifera un po' ferruginosa, giacente in banchi orizzontali, la quale, in certi punti, assume i caratteri d'un calcare grossolano o d'una arenaria calcare ([1]).

Il marchese Pareto ascrive il calcare bigio, che è affatto privo di fossili, al periodo giurese ([2]). Ma non saprei concedere a siffatto apprezzamento maggior valore di quanto ne meriti una semplice induzione, imperocchè le formazioni fossilifere che servirono di termini di confronto e di punto di partenza al geologo genovese nella sua determinazione, essendo situate nella valle della Tinea (Nizzardo), reputo assai difficile lo stabilire esattamente i loro rapporti coi terreni del Finalese che ne sono divisi da sì gran distanza e da sì numerosi e complicati accidenti stratigrafici. D' altra parte, siccome il calcare bigio si mostra in varie località sovrapposto ad un talcoschisto indubbiamente paleozoico ([3]), con stratificazione che sembra concordante ([4]), ho motivo di credere che sia esso pure paleozoico anzichè secondario.

Quanto alla panchina, è ricca di copiosi avanzi organici, come denti di squali (principalmente di *Lamna* e di *Oxyrhina*), denti di sparoidi, pettini e spatanghi, i quali, ad onta della cattiva loro conservazione, bastano ad attestare che si tratta d'un terreno terziario riferibile precisamente al pliocene inferiore. Esso si formò, secondo ogni probabilità, per effetto di una precipitazione per via chimica, sui lidi del mare pliocenico, mentre negli alti fondi del medesimo si depositavano per sedimentazione meccanica le marne di Savona e d'Albenga.

Presso il villaggio di Verezzi, sul versante occidentale del promontorio della Caprazoppa, il calcare bigio si trova fino a circa 130 metri d'altezza e la panchina gli sovrasta per oltre 50 metri; ma altrove raggiunge un livello assai più alto. La Caprazoppa, al pari dei monti circonvicini, analogamente costituiti dal punto di vista geologico, si presenta alla sua parte inferiore e media tutta bucherata e fessa da numerose soluzioni di continuità che talvolta raggiungono le proporzioni di vere grotte. È notevole il fatto che per la massima parte tali cavità sono ripiene di terra rossa ed hanno le pareti loro inquinate da infiltrazioni ferruginose.

Le opinioni dei naturalisti sull' origine che deve attribuirsi alla terra rossa, di cui in molti luoghi vedonsi coperte le formazioni superficiali, sono assai discordi. Ma nel caso presente non si può dubitare, a parer mio, che i materiali ferruginosi provengano in gran parte dalla decomposizione del calcare, il quale li conteneva, sotto altra forma, diffusi nella sua massa.

Se da Final Marina si segua la via provinciale della Riviera, nella direzione della Pietra e d'Albenga, appena oltrepassata la galleria, per mezzo della quale si attraversa il promontorio della Caprazoppa, si vede il versante meridionale del medesimo,

([1]) Ove è più omogenea e tenace si estrae per servire ad usi edilizî e decorativi. A Genova si adopera sotto il nome di *Pietra di Finale*.

([2]) *Guida di Genova e del Genovesato*, vol. I, p. 41.

([3]) Questo talcoschisto non contiene fossili, ma vi trovai (a Rialto) delle mosche di grafite. Esso forma parte della formazione in cui esiste la miniera d'antracite di Calizzano, formazione nella quale i signori Gastaldi e Bruno raccolsero fossili siluriani (vedasi in proposito gli Atti della R. Accademia dei Lincei, Transunti, vol. I, fasc. 3, febbraio 1877).

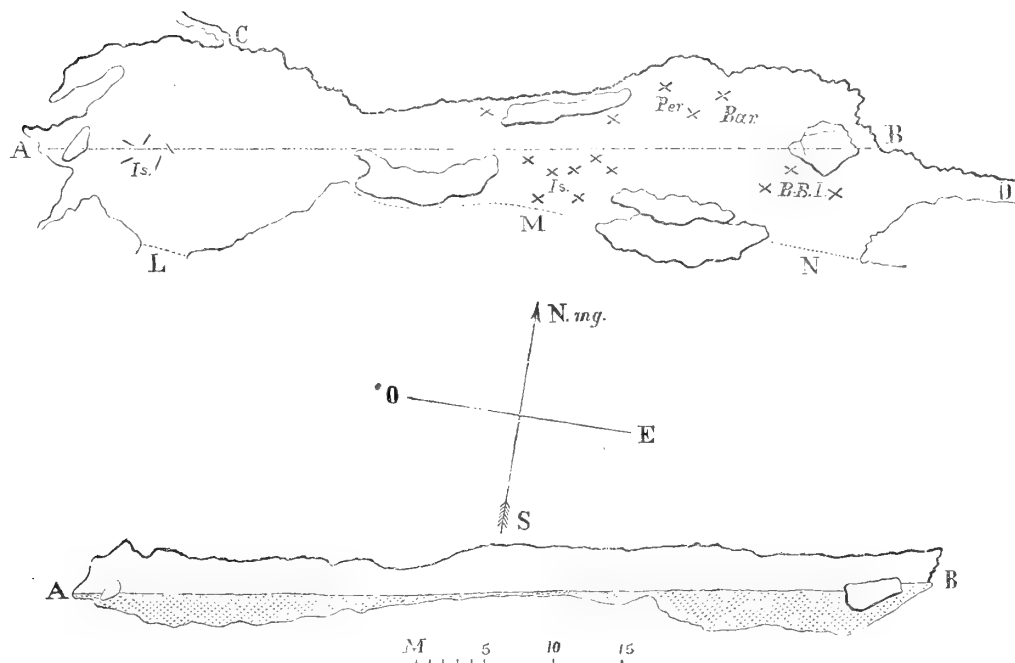
([4]) Ciò per esempio nella valle dell'Aquila e a tergo di Final Pia. In quest'ultima località, se non erro, si verificherebbe sopra un piccolo tratto l'alternanza del calcare collo schisto.

comunque assai ripido, coperto, fino a 50 o 60 metri d'altezza, di finissima e bianca sabbia silicea che dalla vicina spiaggia fu scaraventata sui fianchi del monte, per opera dei venti di mezzogiorno, colà gagliardissimi.

Ad 89 metri d'altezza sul livello del mare, un po' sopra il limite superiore delle *Arene candide*, così si chiama la duna, fra rupi scoscese, sulle quali vegetano stentatamente grami cespugli spinosi, è scavata una profonda grotta che trae il suo nome da quelle arene e mette all'esterno per tre grandi aperture, disposte quasi sul medesimo piano orizzontale. La finestra L (Fig. 1) che si apre verso sud-ovest è meno ampia delle altre due ed inaccessibile. Dalla mediana, che è larghissima e bassa, si penetra facilmente nella cavità.

Questa si presenta a tutta prima all'osservatore come una vasta camera di forma irregolare che misura 70 metri nella maggior dimensione (senza contare una piccola propaggine nella quale si prolunga all'estremità orientale), 15 di larghezza massima e poco meno di 5 d'altezza. Alla parte media di essa la volta si abbassa e le pareti si accostano, per modo che rimane divisa da una specie di strozzatura in due ineguali compartimenti, occidentale l'uno, orientale l'altro. Entrambi sono quasi privi di stalattiti ed invece le pareti loro e la volta si mostrano qua e là ornate di ciuffi di felci. In fondo al primo sbocca un tortuoso cunicolo C (Fig. 1), per mezzo del quale si scende in un laberinto inestricabile di tenebrose spelonche fra loro comunicanti. Una di esse, più vasta e più dirupata delle altre, sarebbe ammirabile per la vaghezza delle sue colonne stalattitiche e dei suoi panneggiamenti lapidei, se non avesse subìto la sorte comune a tutte le caverne della Liguria, cioè una vandalica devastazione.

Fig. 1.

Pianta e spaccato della Caverna delle Arene candide.

Rispetto all'origine di queste cavità, dirò solo che, a parer mio, si deve principalmente attribuire all'azione distruttiva dei flutti.

Il sollevamento che si verificò alla fine del periodo pliocenico ed ebbe per conseguenza l'innalzarsi della panchina al suo livello attuale, dovette subire un arresto od un rallentamento più o meno lungo, durante il quale l'orizzonte a cui ora si trova la caverna corrispondeva al livello del mare. Questo allora, flagellando colle sue onde la costa a picco per lunga successione di secoli, minò e corrose alcuni degli strati più esterni del calcare e praticò in essi una larga breccia, che fu poscia più profondamente scavata dalle acque circolanti nelle viscere del monte.

A favore della mia opinione militano i seguenti fatti:

1° D' innanzi a due delle tre aperture suindicate (distinte nella figura colle lettere L, M, N) esiste come una specie di terrazzo in gran parte ruinato, anch'esso opera del mare pliocenico.

2° Si osservano nel monte parecchie altre caverne allineate allo stesso livello ed assai estese nel senso orizzontale.

3° Il calcare della Caprazoppa e dei monti vicini presenta, presso a poco a quell'altezza, numerosi fori praticati da molluschi litofagi.

Allorchè la visitai per la prima volta, la grotta offriva un suolo pianeggiante, sul quale si vedevano alcune pietre angolose e varî massi caduti dalla volta. Questo suolo era, nella camera orientale, perfettamente asciutto e costituito di terra bruna; nella camera occidentale e in qualche punto della parte media si presentava un po' umidiccio e coperto qua e là di croste stalattitiche, per effetto di stillicidî calcariferi.

Le materie terrose che occupavano il fondo della spelonca raggiungevano la potenza di m. 3,20 ed erano regolarmente stratificate. Il massimo numero degli strati visibili era di sei o sette, ed in ciascuno si distinguevano quasi sempre un letto di terra bruna con carboni, ceneri, cocci ed ossa, ed un letto sterile, assai più sottile, formato di terra chiara o bianca sparsa di pietre angolose. La prima, vale a dire la terra bruna, fu in gran parte recata nella cavità per opera di correnti acquee temporarie, e vi si introdusse da una piccola apertura situata all'estremità orientale, per poi depositarsi, mista ad avanzi di pasti e a residui di focolari abbandonati dall' uomo. La terra bianca e le pietre non sono probabilmente che materiali caduti dalla volta, nei lunghi intervalli di tempo durante i quali la grotta rimase disabitata.

Nella regione occidentale della cavità, siccome la volta è umida e la roccia è resa più dura e meno alterabile, per effetto di stillicidî calcariferi, non potevano originarsi quei materiali polverosi e però, invece di letti di terra chiara, si formarono alcuni sedimenti stalattitici.

In un piccolo tratto della parte media, di contro alla parete settentrionale, il deposito calcarifero, assai copioso, si concretò in una breccia, quasi destituita di stratificazione, i cui elementi principali sono: ceneri, minuzzoli di carbone, frammenti d'ossa e cocci di rozze stoviglie. È presumibile che ivi, originariamente, fossero collocati alcuni focolari. Di altri si trovarono poi evidenti traccie nel terriccio sciolto e stratificato che occupava la camera orientale.

Gli stratarelli carboniosi fra i letti stalattitici o fra i letti di terra bianca, accennano ad altrettante epoche nelle quali il sotterraneo servì di domicilio all'uomo e sono, per così dire, altrettanti suoli successivamente sepolti da cause naturali.

Storia delle ricerche eseguite nella caverna.

Visitai per la prima volta la grotta nel mese di giugno del 1864, in compagnia del professor Perez di Nizza e di mio fratello Alberto. Il primo, esperto conoscitore della nostra geologia, aveva scoperto, nell'esplorare le spelonche dei Balzi Rossi, tra Mentone e Ventimiglia, copiosi manufatti litici ed altre interessanti reliquie dei tempi trascorsi e sperava che le nostre ricerche sarebbero pur riuscite proficue alle Arene candide. D'altra parte si magnificava a tal segno l'estensione della grotta, si vantavano siffattamente la varietà e la bellezza dei suoi aspetti che eravamo desiderosi di ammirare tanta meraviglia. Ci assicurammo di poi che la voce popolare avea alquanto esagerati i meriti del sotterraneo, dal punto di vista pittorico. Ma esso è tuttavolta interessantissimo sotto l'aspetto scientifico e ci applaudimmo di averlo scelto a scopo della nostra gita.

Perlustrata la grotta in ogni sua parte, iniziammo alcuni scavi in varî punti della cavità maggiore e più esterna di essa, perchè ivi il suolo, essendo costituito da un potente deposito di terriccio, sembrava più propizio alle nostre indagini. Da uno solo, praticato a circa m. 1,20 nella camera occidentale, si ottennero oggetti interessanti cioè: quattro punteruoli d'osso, frammenti di vasi, conchiglie, ossa di mammiferi infrante ed ossa umane ([1]).

Il 14 agosto dello stesso anno ritornai alle Arene candide in compagnia del compianto prof. Ramorino e proseguimmo insieme gli scavi già iniziati, ma con poco successo. Non trovammo infatti, oltre ai cocci e alle solite ossa d' animali, che un pezzo di pomice lavorata ed altri oggetti di poco momento.

Delle ricerche eseguite in queste due gite presentai una breve relazione alla Società italiana di Scienze naturali, nella sua riunione straordinaria tenuta a Biella dal 3 al 6 settembre 1864, sotto la presidenza del comm. Q. Sella ([2]).

Tre anni dopo, nell'esporre d'innanzi al Congresso internazionale d'Antropologia e d'Archeologia preistoriche, riunito in Parigi, la storia molto succinta delle indagini paletnologiche eseguite in Liguria, tornai per poco sullo stesso argomento, recando ulteriori notizie sui caratteri osteologici degli avanzi umani da me scoperti ([3]). La caverna fu poscia visitata dal R. D. Perrando, zelantissimo cultore della storia naturale e possessore d'una cospicua collezione paleontologica; ma per l'angustia del tempo e per altre circostanze, le investigazioni di questo esploratore non sortirono esito felice.

([1]) Nella figura 1ª il punto ove trovai le ossa umane isolate è indicato con alcune lineette. Le Le crocette visibili nella stessa figura segnano presso a poco la posizione delle tombe scoperte posteriormente.

([2]) Questa relazione venne alla luce tra gli Atti della Società italiana di Scienze naturali (vol. VII, p. 173. Milano, 1864).

([3]) *Résumé des recherches concernant l'ancienneté de l'homme en Ligurie.* Congrès international d'Anthropologie et d'Archéologie préhistorique. Compte-rendu de la 2ᵉ session. Paris, 1867.

Al principio del 1874, i signori Yeats Brown Montague e Victor Brooke, il primo console di S. M. britannica in Genova, il secondo zoologo ed autore di pregiate monografie intorno ai ruminanti, mi esibirono di accompagnarli in una escursione che avevano in animo di fare nella Liguria occidentale, affine di visitare alcune grotte di quel territorio e, presentandosene l'opportunità, per eseguire qualche scavo nelle medesime. Io accettai di buon grado l'invito e proposi che le nostre indagini avessero a cominciare dalla caverna delle Arene candide, nella quale le prime raccolte legittimavano la speranza che si avesse a trovare assai di più in seguito, mediante scavi ben diretti e sufficientemente profondi. Detto fatto, ci recammo a Final Marina e di là alle Arene candide, ed appena posto piede nella grotta si principiarono gli scavi. A 40 o 50 centimetri di profondità, nel suolo della caverna, si trovarono subito le traccie di un focolare; cioè pietre annerite dal fuoco, ceneri, carboni, cocci di rozze stoviglie, ossa di mammiferi e particolarmente di ruminanti, per le più cotte ed infrante ed anche alcune ossa foggiate a punteruoli. Ad un metro e 60 centimetri, tolti alcuni lastroni di calcare, che avevano opposto improvvisa resistenza allo scavo, si mise alla scoperto l'estremità superiore d'una tibia umana, poi un femore, un bacino, una colonna vertebrale, in breve uno scheletro umano completo, accanto al quale giacevano un corno di cervo, varî pezzi d'ocra, un'accetta di pietra ed altri oggetti che a tempo debito saranno enumerati e descritti ([1]).

Costretto da urgenti motivi ad abbandonare l'impresa così felicemente iniziata, l'esplorazione continuò per due giorni ancora, per opera de'miei compagni e ne risultò il ritrovamento di varî altri manufatti e di uno di scheletro di bambino.

Poco dopo il R. D. Perrando fece altre due visite alle Arene candide e, ripigliando le interrotte ricerche, riuscì a procurarsi, la prima volta, alcune parti d'uno scheletro di bambino e la seconda due altri scheletri umani, uno dei quali quasi completo, senza contare molti manufatti di più maniere ([2]).

Il 5 aprile dello stesso anno un nuovo esploratore, il cui nome è caro alle lettere, l'onorevole Anton Giulio Barrili, depose la penna per impugnare la marra dell'archeologo e a lui si deve la scoperta di un quinto scheletro, col solito corredo di ossa, di conchiglie e di cocci ([3]).

Ad alcuni terrazzani dei dintorni, non so se per vana curiosità o per cupidigia di tesori, parve l'esempio degno d'essere imitato; ma per buona ventura si contentarono di praticare un piccolo fosso e di devastare una sola tomba.

Il prezioso ricettacolo di reliquie preistoriche non era tuttavolta esaurito e quando accettai l'onorevole incarico, affidatomi dal Ministero dell'Istruzione, di eseguire alcuni scavi nelle caverne ligustiche, affine di arricchire col prodotto di essi le collezioni del nascente Museo etnologico e preistorico di Roma, il mio primo pensiero fu di ripigliare

([1]) Di questa scoperta tenni discorso la sera dell'8 aprile 1874, in una seduta della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova (vedasi in proposito il *Movimento* dell'11 aprile 1874). Ne pubblicai poscia un cenno nel mio lavoro intitolato: *L'Uomo preistorico in Italia considerato principalmente dal punto di vista paleontologico*, il quale comparve in appendice all'edizione italiana delle opere di Lubbock: *I tempi preistorici e l'origine dell'incivilimento* (Torino, 1876).

([2]) Si veda intorno alla raccolta dell'egr. Curato il Bull. di Paletnologia Italiana, anno I, n. 4 e 5.

([3]) Su questa scoperta si legge un cenno nel *Movimento* dell'8 aprile 1874.

l'esplorazione che tre volte, e a lunghi intervalli di tempo, avevo principiata e che per circostanze indipendenti dalla mia volontà mi era stato impossibile di compiere.

In nove giorni di ricerche accuratissime (dal 24 agosto al 3 settembre 1876), durante i quali fu posto a nudo il fondo roccioso di quasi tutta la parte orientale e media della grotta, mi venne fatto di scoprire sette nuovi sepolcri inviolati, coi rispettivi scheletri, alcuni quasi sfatti, altri in ottimo stato, e una ricca serie di manufatti di terra cotta, di pietra e d'osso. Questi oggetti, nonchè i sette scheletri, sono ora ostensibili nella collezione del Museo etnologico e preistorico dell'ex Collegio Romano ([1]).

Recentemente la grotta fu di nuovo visitata da mio fratello Alberto, il quale, avendo praticato un piccolo fosso in un punto ch'io gli avevo indicato, vi scoprì, impigliati in una tenacissima concrezione stalagmatica contenente ossa, carboni e cocci, un bellissimo scalpello d'osso, un'ascia-scalpello di pietra verde (il primo rappresentato nella Tav. I, fig. 13, la seconda nella Tav. III, fig. 1 *a*, e *b*) ed un cristallo di quarzo jalino.

Tombe scoperte nei primi scavi.

Ebbi già occasione di avvertire come nelle prime visite che io feci alla grotta, nel 1864, non vi trovai alcun sepolcro, ma soltanto ossa umane sparse in disordine ad una certa profondità nel terreno.

In quel tempo non avevo sufficiente esperienza di simili indagini per verificare se la terra in cui si effettuavano gli scavi fosse stata già mossa e sconvolta. Conclusi allora per la negativa; ma al presente non dubito del contrario ed ho motivo di argomentare che le ossa raccolte fossero il rimasuglio di uno scheletro messo allo scoperto in uno scavo antecedente ([2]). È pur probabilissimo che anche altre ossa umane, osservate da me alla superficie del suolo, in quella parte della grotta, e che mi parvero fresche, fossero parimente avanzi d'un secondo scheletro disseppellito da poco tempo e in gran parte disperso.

Ma chi mai potè eseguire quegli scavi? Non certo un naturalista, poichè evidentemente non si tenne conto degli oggetti che meritavano maggiore attenzione; e d'altronde non udii mai parlare, dalla gente del paese o da altri, di ricerche effettuate nella grotta per oggetto scientifico prima del 1864.

Un vecchio contadino che mi aveva guidato nella prima gita alla grotta affermò che alcuni terrazzani dei dintorni erano venuti molti anni innanzi a farvi incetta d'ossa, di cui si servivano per ingrassare le loro terre. Da ciò emerge l'interpretazione più probabile o più logica di quei primi scavi.

La prima tomba intatta fu scoperta nel 1874, allorchè, come già dissi, iniziai nuove ricerche nella caverna in compagnia dei sig. Brooke e Brown. Lo scheletro cui dava ricetto si trovò alla profondità di m. 1,60, nella camera orientale, presso a poco alla parte media di essa, col capo poco discosto da un voluminoso masso

([1]) Le mie ricerche nella grotta delle Arene candide e in parecchie altre del Finalese costarono lire 312,20, nella qual somma son computate le spese di scavo, d'imballaggio, di trasporto e quelle occorse per la riparazione degli oggetti rotti.

([2]) Si spiegano così le scalfitture che si osservano alla loro superficie, alcune delle quali mi parvero di antica data, perchè coperte di incrostazioni lapidee includenti cenere e carbone.

caduto dalla volta e coi piedi rivolti verso il mare. Esso giaceva obliquamente rispetto al piano della caverna; aveva cioè il capo più alto dei piedi. Degli arti anteriori uno era collocato sotto il capo e l'altro disteso; i posteriori erano un po' piegati. Le ossa erano imperfettamente difese da alcuni lastroni di calcare disposti sotto, sopra e ai due lati, a guisa d'incassatura. Sotto i lastroni inferiori, a qualche centimetro di profondità, v'era come un letto di terra biancastra; all'estremità corrispondente al capo e intorno ad esso, per 15 o 20 centimetri, si sovrapponeva alla terra bianca una polvere carboniosa che mi sembrò il residuo di un'abbondante capigliatura. Accanto al cranio v'era un corno di giovane cervo, in cui non si vede traccia di lavorazione e a lato dello stesso si raccolsero varî pezzi d'ocra rossa, originariamente contenuti in un vaso, ed una piccola accetta di giadeite, la cui posizione non potè essere notata con esattezza; sul torace si raccolse una grossa zanna di cinghiale, alla cui estremità radicale sono praticati due fori.

Lo scheletro appartiene ad un individuo adulto, di sesso mascolino. La sua statura è un po' inferiore alla media. Il cranio è piccolo, dolicocefalo, schiacciato lateralmente, allargato nella regione posteriore, basso ed angusto nella frontale. La sua circonferenza massima è di mill. 510, il diametro longitudinale, fra la sommità della sutura nasale e la protuberanza occipitale è di mill. 172, il diametro temporale raggiunge appena i 118 millim. Le mascelle mancano, in parte, dei loro denti ed alcuni dei superstiti sono cariati. La mandibola inferiore ha la porzione ascendente collocata molto obliquamente e la prominenza del mento assai risentita.

La tomba aperta dai signori Brown e Brooke, presso la sopradescritta, non ricettava che uno scheletro di piccolo bambino, le cui mandibole presentano un molare ed un premolare per lato. Questo scheletro non era difeso da lastre di pietra e non si osservarono accanto ad esso che cocci, conchiglie ed ossa di mammiferi.

Il primo dei tre scheletri scoperti dal R. D. Perrando giaceva presso a poco nel mezzo della cavità orientale, quasi a contatto della roccia viva che forma il fondo della grotta, sotto una spessezza di m. 2, 20 di terriccio ed apparteneva, secondo l'egregio esploratore, ad un bambino lattante. Mancavano le solite pietre e non si raccolsero nelle vicinanze che ossa e cocci di poco interesse.

Il secondo scheletro, che fu quasi completamente conservato (¹), apparteneva ad un fanciullo di 7 o 8 anni e riposava alla profondità di m. 1,70, sempre nella parte orientale del sotterraneo, ma un po' più addentro del primo. La terza tomba si scoprì nella parte media, presso la parete che sta di contro alla più ampia apertura. Essa era limitata da otto lastre di pietra ed oltre allo scheletro non conteneva nulla d'interessante, tranne un coccio con graffiti. Le due braccia del morto, congiunte sul torace, sostenevano una grossa pietra.

L'onorevole A. G. Barrili descrive presso a poco in questi termini il sepolcro da lui trovato: « Lo scheletro è di persona giovane e mostrava le braccia composte in atteggiamento di chi dorme, il destro ripiegato intorno al capo, il sinistro sul petto, mentre il torace e la faccia erano leggermente voltati da tramontana verso la parete

(¹) Vi mancano le ossa facciali, alcuni pezzetti della cassa craniense e qualche osso delle estremità. Sul cranio si osservano le traccie d'una frattura anteriore alla morte.

del masso. Intorno alla persona e di sotto erano alcuni lastroni; un altro era collocato sopra e ricopriva appena la regione lombare. Entro quella rozza sepoltura si trovarono conchiglie in buon dato, quali bucate, quali a dirittura foggiate in cerchietti, ossa lavorate, uno scalpello di pietra verde e uno stranissimo arnese di giadeite, del quale non è ben certo l'uso se d'arma ovvero sia d'ornamento [1].

« Negli strati superiori alla tomba si rinvennero ossa e denti d'animali diversi, tra i quali è riconosciuto il cinghiale, avanzi di stoviglie dalle più rozze alle più aggraziate, ma senza vernice nè traccie di graffiti. Uno di questi cocci, e appunto il piede di un' anfora, fu pure ritrovato presso lo scheletro, sotto il cui cranio era un modesto ciottolo di spiaggia marina. Neanche qui mancava l'ocra per tingere, che fu anzi ritrovata in quantità piuttosto singolare [2] ».

Aggiungerò che questo scheletro, notevole per le sue esigue proporzioni, è adulto e probabilmente di sesso femmineo. Il suo cranio assai piccolo, dolicocefalo e allargato posteriormente, misura 485 millim. nella circonferenza massima, 169 nel diametro antero-posteriore e 115 nel bitemporale. La sua faccia è meno larga che negli altri individui della stessa provenienza. I denti delle due mandibole sono sani e non ne manca alcuno. La mandibola inferiore offre, tra il corpo e il ramo ascendente, un angolo molto aperto; l'apofisi coronoide è breve ed acuta.

Tombe scoperte cogli ultimi scavi.

Descriverò per sommi capi le tombe scoperte nello scorso agosto, distinguendo ciascuna di esse con un numero progressivo che corrisponde all'ordine del ritrovamento.

N. 1. Quella che ho contrassegnata col n. 1 era collocata nella parte media della caverna, ove è più bassa e ristretta, di contro all'apertura maggiore, a circa 3 metri di distanza dalla medesima. Essa trovavasi sotto il secondo strato del deposito archeologico, ad 80 cent. di profondità, ed era limitata, come quasi tutte le altre, da lastroni di pietra greggia, disposti in guisa da formare una specie d'incassatura. Lo scheletro cui dava ricetto era adulto e, per quanto credo, di sesso maschile. Il suo cranio, quantunque schiacciato dal peso di un grosso lastrone di pietra, si raccolse quasi intiero, cioè mancante solo di una parte della regione occipitale; degli arti si salvarono le scapole, le clavicole, un omero, un cubito e un'ulna, le articolazioni dei due omeri, le rotule, il calcaneo, e l'astragalo di ciascun piede ed alcune ossa minori delle mani e dei piedi. Si estrassero inoltre pochi pezzi della colonna vertebrale, alcune coste e scarsi frammenti del bacino.

Tutte queste ossa sono assai alterate dal tempo e dall'umidità e si sbricciolano sotto la minima pressione. Alcune, massime il cranio, sembrano aver sofferto l'azione del fuoco.

Lo scheletro era raccolto in piccolo spazio e tutto scomposto dalla caduta delle pietre destinate a difenderlo, permodochè non si può argomentare con sicurezza qual fosse la sua posizione originaria. È però probabile che fosse collocato, da principio, sopra un fianco e coi piedi volti verso l'apertura maggiore della grotta, cioè verso il mare.

[1] È un frammento di disco forato di giadeite descritto e figurato più innanzi.

[2] Il *Movimento*, 8 aprile 1874.

Nella terra che copriva la tomba furono trovati moltissimi gusci di patelle e d'altri molluschi eduli, ossa lunghe di ruminanti, cotte e spezzate e un'ascia di pietra verde che sarà descritta in seguito. Accanto allo scheletro vi erano pure un fondo di vaso non tornito, con altri cocci di terra cotta e varî pezzi d'ocra rossa che originariamente erano contenuti in un vaso.

Quantunque io non mi sia proposto qui di descrivere, dal punto di vista antropologico, gli scheletri disseppelliti nella caverna, mi pare opportuno di indicare succintamente alcuni dei loro caratteri più appariscenti. In quello della tomba n. 1 si vede chiaramente che il cranio è assai lungo, in confronto alla larghezza, alquanto sviluppato posteriormente, basso e depresso nella regione frontale. La faccia è alta, stretta ed assai prognata, estendendosi il prognatismo alla regione dentale. Le occhiaie sono quadre e disposte secondo una linea quasi orizzontale. I denti sono piuttosto grossi, sani e generalmente stipati; si osservano però piccole lacune fra il canino superiore di ciascuna parte e i denti più prossimi. Gli incisivi sono larghi, lunghi e foggiati a scalpello, i canini aguzzi. Il palato è stretto e lungo. Il mento si presenta d'insolita altezza e mediocremente prominente. Il braccio ascendente della mandibola inferiore forma col ramo orizzontale un angolo più aperto che di consueto. L'apofisi coronoide è breve ed appuntata. Le altre ossa dello scheletro sono piuttosto corte e sottili, comparativamente alle dimensioni del cranio. L'omero si distingue per la sua gracilità ed ha la parete della fossa olecranica molto assottigliata, ma non perforata.

L'individuo cui appartenevano le reliquie ora descritte aveva di poco passati i venti anni quando fu sepolto; infatti i suoi denti sono appena logori e quelli della sapienza, quantunque già formati nell'interno dell'osso mascellare, non sporgono ancora fuori di esso.

N. 2. Questa tomba era situata a poca distanza dalla prima, un po' più a ponente, e alla medesima profondità.

Sotto le solite pietre si trovò uno scheletro adulto, di sesso maschile, in perfetto stato di conservazione e quasi completo, mancando solamente di alcune ossa minori dei piedi e delle mani.

Il cranio è dolicocefalo e sviluppato posteriormente, colla regione frontale un po' angusta e le arcate sopraccigliari piuttosto sporgenti, massime nella parte mediana della fronte. La sua sutura fronto-parietale è parzialmente ossificata. Le orbite sono quadrate, profonde, poco oblique; il naso è elevato, gli zigomi prominenti. In complesso la faccia offre un lieve prognatismo. Mancano tutti i denti della mandibola superiore e gli alveoli dei molari sono obliterati per vecchiezza.

La mandibola inferiore ha l'arco stretto ed angoloso; il mento è quadrato e sporgente. Il ramo ascendente della mascella è perpendicolare al ramo orizzontale. L'apofisi coronoide è spessa, larga ed arrotondata. I condili sembrano assai robusti. I denti di questa mandibola sono tutti a posto, ma assai logori, e in gran parte cariati. Il piano di logoramento è orizzontale.

Gli omeri, grossi, quasi diritti, a superficie scabre, hanno la fossa olecranica non perforata, le clavicole sono assai torte e grosse. I femori hanno il collo breve e la fossa digitale profonda e stretta; il loro margine posteriore offre i due rilievi della linea aspra straordinariamente salienti.

Tutte le ossa summentovate sono ancora in ottimo stato e non portano traccie dell'azione del fuoco. Esse appartengono ad un individuo d'alta statura e di robustezza non comune, il quale morì in età assai avanzata.

Lo scheletro era adagiato sopra un fianco, colle ginocchia un po' piegate e la mano sinistra collocata sotto la testa. Intorno ad esso si trovarono: pezzi d'ocra rossa, numerosi ossami di mammiferi per lo più cotti ed infranti, gusci di patelle, di mo-nodonte, di ostriche, valve di *Pectunculus*, artificialmente forate per servir d'ornamento, una grossa lesina d'osso, una lama d'osso appuntato che è forse una punta di pugnale (Tav. I, fig. 14), varie punte di freccia o di giavellotto parimente d'osso, molti cocci di stoviglie, un piccolo vaso, quasi intiero, di pasta bruna e fina, di forma ovale, a fondo piccolo e piatto, a pareti sottili, il quale conteneva una certa quantità di terra bruna sparsa di particelle carboniose, verosimilmente avanzi di cibo. Ma l'oggetto più interessante fra quelli che facevano corona al morto è indubbiamente una piccola e sottile accetta di giadeite, raccolta a destra dello scheletro, presso il capo.

N. 3. Fu scoperta a levante della tomba n. 1, un po' più verso il fondo della caverna, ad una profondità di poco maggiore delle precedenti. Essa era circoscritta, secondo il consueto, da cinque o sei lastroni di calcare, disposti ai due lati dello scheletro e al di sopra di esso; la sola parte anteriore del corpo era però difesa da quelle pietre. Vi si trovò uno scheletro umano di sesso maschile, ben conservato e completo, se si faccia astrazione dalla mancanza di qualche ossetto di poca importanza.

Il cranio di questo scheletro è pur dolicocefalo, ma è meno allargato posteriormente degli altri già menzionati; la sua sutura sagittale è già ossificata; le altre sembrano meno frastagliate che d'ordinario. La regione frontale di esso è stretta, fuggente; le arcate sopraorbitali sono poco prominenti alla periferia, ma si rialzano alquanto sopra la radice del naso. La faccia è assai larga, non prognata ed offre zigomi robusti e molto sporgenti. Le mandibole portano tutti i loro denti, i quali sono logorati orizzontalmente; uno dei molari superiori è cariato. La mandibola inferiore è alta ed offre il mento sporgentissimo; la sua parte ascendente è verticale e alta; l'apofisi coronoide è lunga, sottile, un po' appuntata.

I caratteri delle ossa lunghe corrispondono a quanto fu avvertito nello scheletro della tomba n. 2. Per altro, nel femore i rilievi del margine posteriore sono un po' meno sensibili. Lo scheletro riposava coricato sul fianco sinistro, colla mano sinistra sotto il capo e coll'altra protesa e in alto. Le sue ginocchia erano piegate e le due tibie avvicinate.

Sulle vertebre cervicali raccolsi tre canini di lupo, uno grosso in mezzo e due piccoli lateralmente (Tav. I, fig. 15). A 30 centimetri circa dalla mano destra trovai una piccola ascia di pietra verde (Tav. III, fig. 8). Non mancavano sopra la tomba e ai due lati ossa rotte, cocci, pezzi d'ocra e conchiglie.

N. 4. La tomba distinta con questo numero d'ordine fu scoperta a levante di quella cui assegnai il n. 1, a brevissima distanza dalla stessa, ed era prossima all'apertura maggiore della grotta.

Lo scheletro che racchiudeva appartiene ad un individuo di sesso maschile che morì in età assai avanzata. Alcune delle sue ossa essendo fragilissime ebbero a soffrire qualche danno, allorchè furono estratte, tuttavolta si conservano per la massima parte.

Il cranio è molto lungo e notevolmente sviluppato alla parte posteriore, a un dipresso come nello scheletro della tomba n. 2. La sua sutura fronto-parietale è ossificata, la sagittale e la lambdoidea sono ancora ben visibili. La regione frontale è mediocremente elevata ed offre la gobba nasale assai prominente. La faccia, piuttosto larga, presenta un lieve prognatismo; il quale si fa più manifesto nella regione dentale. I denti, assai logori, attestano la vecchiezza dell'individuo. Gli incisivi medî superiori sono piuttosto distanti fra loro. Nella mandibola superiore mancano due molari del lato destro e gli alveoli di uno fra essi è già obliterato; tre molari e un premolare superstiti sono più o meno cariati. Nella mandibola inferiore sussistono tutti i denti, tra i quali gli incisivi e i canini sono assai alti, impiantati verticalmente e distanti fra loro.

La parte basale del cranio è incompleta per la mancanza di parte dei temporali, dell'occipitale e dello sfenoide. Di queste ossa si conservano però molti frammenti staccati.

La mandibola inferiore è alta ed ha il ramo ascendente quasi verticale, l'apofisi coronoide è poco estesa e di forma un po' uncinata. Il mento è quadro ed assai sporgente.

Le altre ossa dello scheletro sono in generale sottili e brevi; e ciò mi fa credere che la statura dell'individuo fosse inferiore alla media. L'omero sinistro ha la fossa olecranica perforata. I femori sono un po' arcuati, carenati posteriormente e ruvidissimi.

La tomba ora descritta conteneva, oltre alle ossa di mammiferi, ai cocci e alle patelle, un *Conus mediterraneus* forato, due punte di freccia d'osso ed una scheggia di selce.

Lo scheletro giaceva nella posizione consueta, cioè adagiato sul fianco sinistro con una mano sotto il capo, le ginocchia piegate e i piedi volti verso il mare.

N. 5. Questa tomba era collocata a capo della precedente, cioè più vicina alla parete settentrionale della grotta, ad una profondità poco maggiore di un metro. Essa conteneva uno scheletro d'individuo giovane, di sesso femmineo, il quale è disgraziatamente incompleto.

Del cranio rimangono l'occipitale, i due parietali, i temporali, qualche pezzo di frontale, il mascellare superiore; ma queste ossa sono quasi tutte rotte e scomposte. La colonna vertebrale, il torace e il bacino sono quasi completi. Delle ossa degli arti mancano pezzi dei cubiti e dei radii ed alcune parti delle mani e dei piedi.

Da quanto si conserva del cranio, sembra che differisse dagli altri summentovati per essere meno sviluppato posteriormente e per avere l'occipite più depresso. I denti della mandibola superstite sono sani e bianchi, e dall'esame di questi apparisce che l'individuo aveva 12 o 14 anni appena, poichè era provvisto di dentizione permanente e i suoi secondi molari, già formati nei rispettivi alveoli, non erano ancora venuti alla luce.

La posizione originaria del morto non si potè determinare, essendo le ossa, almeno in gran parte, spostate dai movimenti del suolo e sconvolte da uno scavo anteriore.

Molte conchiglie ed un raschietto di silice accompagnavano questo scheletro. Le sue ossa sono sottili, minute, liscie. Da tali caratteri, come pure dalla forma del foro

occipitale e dall'ampiezza della pelvi, si può argomentare che appartenessero ad una femmina. Non saprei a qual causa attribuire il loro color rossastro uniforme.

N. 6 e 7. Queste tombe si rinvennero a 60 centimetri di profondità a fianco l'una dell'altra a levante del n. 5, un po' più internamente nella spelonca. Esse non erano munite di lapidi e contenevano le reliquie di due bambini, già molto alterate dal contatto del terriccio umido.

Nello scheletro della tomba n. 6 manca interamente la cassa craniense e si conservano i mascellari superiori, la mandibola inferiore, alcune vertebre, i pezzi principali del bacino e della cassa toracica, nonchè quasi tutte le ossa lunghe. Tali avanzi sono guasti, corrosi, fragilissimi e sembrano avere subìto in qualche punto l'azione del fuoco. Così dalla dimensione delle ossa, come dal numero e dalla disposizione dei denti si può argomentare che appartenessero ad un bambino di 4 a 5 anni; infatti dal mascellare inferiore non sporge ancora fuori il primo molare permanente, il quale già sussiste però nella spessezza dell'alveolo.

Lo scheletro della tomba n. 7, comprende la massima parte del cranio, in frammenti assai alterati, le due mandibole, quasi tutte le ossa delle estremità, ed alcuni pezzi della colonna vertebrale, della cassa toracica e del bacino. Questi avanzi sono ridotti a tal condizione che mal si prestano a qualsiasi misura o confronto. Rispetto all'età dell'individuo, credo poterla comprendere fra cinque e sei anni, perchè già si osservano nel mascellare inferiore il primo molare permanente, ben formato nel suo alveolo, mentre gli incisivi della prima dentizione non sono ancora surrogati.

Intorno ai due scheletri abbondavano ossa di mammiferi e conchiglie e fra queste si raccolsero alcune *Columbella rustica* (specie il cui mollusco non è mangereccio). In fatto di utensili, non si trassero da quelle tombe che un coltellino di piromaca rotto ed una scheggia di pietra verde.

Ossa umane sparse nella caverna.

Le ossa umane che raccolsi a circa un metro di profondità nel suolo della caverna, allorchè, nel 1864, feci la mia prima gita alle Arene candide, sono due femori, due tibie, un calcaneo ed un astragalo, senza contare tre denti.

Come già notai in altra occasione (1), confrontate colle ossa omologhe di un ligure odierno, queste offrono certi caratteri differenziali che accennano a diversità di razza.

I femori son piccoli, sottili, quasi diritti e presentano un collo corto e poco inclinato; il grande trocantere è prossimo al collo, il piccolo trocantere è spesso, solido e portato un po' in alto; la cavità digitale è più ristretta che nel Ligure dei giorni nostri. Le dimensioni delle tibie sono proporzionate a quelle dei femori; il corpo dell'osso è quasi diritto ed ha una cresta più acuta che nella pluralità dei casi. Il calcaneo ha le due apofisi alquanto sviluppate e la sua superficie posteriore, che dà attacco al tendine d'Achille è rugosa e scabra. In breve, tali caratteri coincidono in gran parte con quelli osservati nelle ossa corrispondenti degli scheletri umani completi, posteriormente scoperti in altri punti della grotta.

(1) *Résumé des recherches concernant l'ancienneté de l'homme en Ligurie.* Paris, 1867.

Ricorderò pure che queste ossa sono leggere, fragili e biancastre, come se avessero subìto l'azione del fuoco e presentano certe scalfitture ed intaccature che sembrano molto antiche. L'ustione loro si spiega ammettendo che mentre i cadaveri, deposti nella grotta erano appena coperti di poca terra, si accendesse un gran fuoco su ciascuna tomba per l'imbandigione del pasto funebre.

Quanto alle intaccature ed ai solchi osservati alla superficie della tibia e dei femori, sono forse prodotti in parte dalle zanne di carnivori e, in parte, dagli arnesi coi quali, in tempi non lontani da noi, l'uomo mise allo scoperto e devastò il sepolcro in cui giacevano quelle ossa.

Le ossa umane isolate raccolte negli scavi eseguiti testè nella grotta sono:

1. Una mandibola inferiore, i denti della quale già spettano alla seconda dentizione. Dalla circostanza che i secondi grossi molari, già formati negli alveoli, non sono ancora spuntati, si può desumere l'età dell'individuo cui appartenevano che era di 12 a 14 anni. La parte ascendente sinistra di questa mandibola fu rotta; ma ne rimangono alcuni pezzetti.

2. Tre incisivi superiori, appartenenti probabilmente allo stesso individuo. La mandibola e i denti suddetti furono trovati presso la tomba n. 5.

3. Un pezzo di occipitale d'individuo piuttosto vecchio che comprende gran parte della metà sinistra dell'osso e presenta la cresta e la protuberanza occipitale interna assai sviluppata.

4. Alcune falangi e metacarpiani d'adulto che forse appartengono a qualcuno degli scheletri umani scoperti nei primi scavi.

5. Due piccolissime ossa ischiatiche di bambino lattante.

6. Un altro osso ischiatico di piccolo bambino.

Individui umani
di cui si disseppellirono gli avanzi nella grotta delle Arene candide

QUADRO RIASSUNTIVO

OSSA RACCOLTE	Individui adulti	Individui giovani	Collezioni in cui si conservano
Ossa lunghe e vertebre trovate da me nel 1864	2		Museo geol. della R. Univ. e Museo civ. di Genova.
Scheletro scoperto nel 1874 dai signori Brown e Brooke e da me	1		Museo civico di Genova.
Scheletro estratto nel 1874 dai signori Brown e Brooke		1	Museo civico di Genova.
Scheletri raccolti nel 1874 dal R. Don Perrando	1	2	Collezione del R. D. Perrando a Sassello.
Scheletro estratto nel 1874 dall'on. sig. A. G. Barrili	1		Museo civico di Genova.
Ossa trovate da alcuni Finalesi nel 1875 (?)	1		?
Scheletri estratti da me nel 1876 . .	5	2	R. Museo etnologico e preistorico di Roma.
Un frammento di cranio, una mandibola, tre ossa ischiatiche ed altre raccolte da me nel 1876	1 almeno	3 almeno	R. Museo etnologico e preistorico di Roma.
Individui adulti	12	giovani 8	

Manufatti d'osso.

I più comuni sono i cosidetti *punteruoli*, cioè ossa appuntate e aguzzate, di forme diverse che servirono probabilmente a varî usi.

Aghi crinali. Alcuni di essi, lunghi, sottili, lavorati con diligenza e finitezza, non potevano servire ad uso di lesine nè ad armar freccie e giavellotti e credo che fossero veri aghi crinali.

Don Perrando ne possiede due, uno dei quali, della lunghezza di 16 centimetri e di sezione cilindrica, offre all'estremità opposta alla punta un breve tratto assottigliato, come se avesse servito ad adattarvi un pomo; la forma del secondo è fusiforme e la sua lunghezza raggiunge centimetri 13 $^1/_2$. Altri furono raccolti da me in uno dei primi scavi ([1]) e in quelli eseguiti testè per conto del Ministero dell'Istruzione. Uno di questi oggetti, le cui dimensioni sono 11 centimetri per la lunghezza e 7 millimetri per la maggiore larghezza, è rappresentato nella Tav. I, fig. 11.

Punte di freccia o di giavellotto. La massima parte delle ossa appuntate raccolte nella caverna delle Arene candide deve essere compresa, a parer mio, in questa categoria. Alcune di esse presentano infatti, presso la base, certe intaccature che sembrano fatte da una cordicella, mediante la quale la punta era probabilmente legata ad un'asta; altre hanno due faccie parallele pianeggianti, ottenute per logoramento, ciò affinchè l'osso potesse più facilmente inserirsi all'estremità di un'asta fessa. Tutte poi, essendo corte ed aguzze, si prestavano perfettamente all'uso indicato.

Le punte rappresentate nella Tav. I, fig. 7 e 8 lasciano scorgere l'intaccatura basale e la più breve offre pure, di prospetto, una delle superficie piane suaccennate. Questi stromenti sono a sezione rettangolare, almeno nella parte media.

Nella mia prima gita alla caverna raccolsi tre cuspidi di freccia d'osso che furono rappresentate colle figure 2, 3 e 4 nel lavoro summentovato. La prima di esse misura cent. 10 $^3/_4$ di lunghezza e non è altro che un metacarpiano di pecora appuntato; la seconda è fatta con un metatarsiano di ruminante ed ha cent. 9 $^1/_2$ di lunghezza; la terza poi è una punta di cent. 4 $^1/_2$ di lunghezza che rammenta per la forma una lama di temperino.

Nella collezione del R. D. Perrando osservai pure un certo numero di punte d'osso della stessa provenienza, riferibili a varî tipi, e nel 1875, unitamente ai signori Brooke e Brown, ne raccolsi non meno di 10.

Ecco un elenco di quelle trovate l'anno scorso, negli scavi eseguiti per conto del Ministero:

a) Due punte corte e robuste, fatte con un cannone di piccolo ruminante, di cui vedesi ancora parte dell'articolazione inferiore: l'una è lunga mill. 68, l'altra mill. 61. La prima è figurata alla Tav. I, fig. 9. In entrambe la forma della base si prestava a ricevere una legatura. Furono trovate nella tomba n. 2.

b) Tre punte lunghe rispettivamente 79, 76, 72 millimetri, sottili, un po' curve e schiacciate, raccolte nella medesima tomba (Tav. I, fig. 7, 8, 5). Non è possibile di riconoscere di quali specie d'ossa sieno fabbricate.

([1]) *Di una caverna ossifera di Finale*, Tav. I, fig. 1.

c) Tre punte dello stesso genere (fatte con scheggie d'ossa, lunghe e sottili) trovate in varie parti della caverna; una di esse giaceva a soli 50 cent. di profondità.

d) Una punta di forma un po' canaliculata, di 62 millimetri di lunghezza, trovata collo scheletro n. 3 (Tav. I, fig. 12).

e) Una punta sottile, a sezione quadrangolare, trovata presso le tombe n. 4 e 5. È rotta alla base e probabilmente non differiva da quelle trovate nella tomba n. 2.

f) Una punta brevissima rettilinea, a sezione irregolarmente quadrangolare. La sua base è tagliata di netto e presenta una breve incisione o intaccatura, come l'ago crinale rappresentato alla fig. 11 della Tav. I.

g) Una punta della lunghezza, di 87 mill., rappresentata alla fig. 6 della Tav. I. Questa, raccolta nella camera occidentale a 2 metri di profondità, è fatta con un osso lungo, il cui capo articolare, limato e logorato in varî sensi, non è più riconoscibile. La diafisi, tagliata longitudinalmente, costituisce una specie di doccia terminata in punta. Quantunque non vi rimangano traccie di legatura, credo che anche questa fosse una punta di freccia e non è inverosimile l'ipotesi che la cavità della doccia fosse destinata a ricettare qualche sostanza venefica.

f) Una scheggia d'osso appuntata, rappresentata colla fig. 10 della stessa tavola, è forse parte di un'arme a molte punte.

Punte di lancia. Due arnesi trovati ultimamente nella caverna potrebbero considerarsi come tali: l'uno è un piccolo cannone di ruminante, col capo articolare inferiore quasi intatto e la diafisi spaccata ed appuntata (Tav. I, fig. 3). La sua lunghezza è di mill. 88, la larghezza alla base di 24. Credo fosse destinata ad inserirsi in un'asta, perchè ha il capo articolare logorato su due faccie e non manca verso la base di qualche segno di legatura.

La seconda punta di lancia sarebbe, secondo il mio supposto, l'oggetto effigiato alla fig. 2, Tav. I, il quale non è altro che un frammento di diafisi assottigliato ed appuntato. È difficile d'altronde di determinare l'uso di questo stromento, perchè è assai guasto dal tempo e manca della base. Le sue dimensioni sono di millim. 70 per l'altezza e 17 pel diametro maggiore.

Pugnali. Il pezzo di lama ossea di cui può vedersi la figura al n. 14 della Tav. I, e che si trovò nella tomba n. 1, è forse un frammento di pugnale. Esso sembra fatto coll'apofisi spinosa di una vertebra di grosso erbivoro e misura 77 mill. di lunghezza.

Un vero pugnale fu indubbiamente raccolto dal R. D. Perrando, nella caverna delle Arene candide ed è una lama ossea di forma irregolarmente triangolare, lunga 17 cent. e mezzo e munita di un foro presso l'estremità opposta alla punta.

Lesine (?) L'oggetto disegnato nella Tav. I, fig. 1 è un semplice cannone di ruminante rotto ed appuntato ad uno dei suoi capi, per servir forse ad uso di lesina. Anche questo proviene dalla tomba n. 2

Cucchiai (?). L'oggetto rappresentato nella Tav. I, fig. 4 consiste in un pezzo di diafisi d'osso, lungo squadrato ad una estremità e tagliato in isbieco in guisa da impartirgli una specie di taglio. La sua lunghezza è poco minore di 11 centimetri, la larghezza è dei 18 mill. L'estremità opposta al taglio manca. Questo utensile è un cucchiaio, una sgorbia o un zuffolo cui manca l'ancia? Mi attengo dubitativamente alla

prima ipotesi. Aggiungerò in proposito che la grotta somministrò ai signori Brooke e Brown due altri oggetti del medesimo genere.

Scalpelli. La fig. 13 della Tav. I mi dispensa dal recare una diffusa descrizione di questo arnese, il quale consiste in una larga lama ossea, di 111 mill. di lunghezza e 40 di larghezza, che sembra tratta da un cubito d'erbivoro, ed offre ad una delle sue estremità un taglio forbitissimo. Mio fratello Alberto lo trovò testè nella parte media e più interna della grotta a circa 70 centimetri di profondità. Egli crede che potesse servire a scuoiare gli animali di cui i cavernicoli adoperavano le pelli ed io non so trovare un'interpretazione migliore.

Ornamenti. Don Perrando possiede una specie di piastra ossea, cuoriforme, munita di un lungo peduncolo forato. Quest'oggetto rinvenuto in uno degli strati profondi della caverna, misura 14 centimetri e mezzo di lunghezza.

Fusaruole. Il medesimo raccoglitore conserva una fusaruola ossea della stessa provenienza. Essa è piana sopra una faccia ed assai convessa nell'altra; il foro che l'attraversa è ampio e un po' conico. La superficie piana presenta alcuni cerchietti concentrici, incisi parallelamente al margine.

Altre ossa che portano segni del lavoro umano. Debbo registrare fra queste due grosse coste arrotondate ad una estremità, a guisa di spatola, una delle quali raccolta nel 1864, nella mia prima gita alla caverna.

Osservai poi parecchi altri pezzi, in cui le traccie dell'industria umana sono meno manifeste e specialmente ossa lunghe segate o limate, ora nella diafisi, ora nelle epifisi.

Denti lavorati.

Questi sono quasi esclusivamente pendagli e possono considerarsi come trofei di caccia, ornamenti o talismani.

Durante gli scavi che praticai coi signori Brooke e Brown alle Arene candide raccolsi sul torace del primo scheletro umano che mettemmo alla luce una bellissima zanna di cinghiale, munita di due fori presso l'estremità radicale. Una seconda, più piccola e meno perfetta, fu raccolta poco appresso da D. Perrando, nella cui collezione vidi pure un incisivo di suino e un altro dente di non so quale specie, forati ad uso di pendagli.

Ricorderò a questo proposito come l'amico mio Odoardo Beccari abbia osservato che gli indigeni della baia d'Humboldt (Nuova Guinea) portano sul petto un piastrone costituito di zanne di cinghiale e di semi rossi d'*Abrus*.

La fig. 15 della Tavola I rappresenta tre denti di lupo forati nella radice, i quali furono raccolti da me stesso, nella mia ultima visita alla caverna, sulle vertebre cervicali dello scheletro n. 3. Il più grosso, che stava in mezzo ai due minori, misura 46 millimetri di lunghezza; gli altri sono lunghi rispettivamente 28 e 30 millim. Il foro è irregolare e fatto un po' ad imbuto; intorno ad esso si osservano dei solchi concentrici.

Nel novero dei denti lavorati vanno pur compresi: un frammento di zanna di cinghiale con due fori, il quale sembra appartenere ad una piastrella semilunare, una sorta di punteruolo grossolanamente foggiato, in una scheggia di dente della

medesima specie e finalmente una zanna artificialmente recisa alla sua base che presenta, presso il punto ove fu praticato il taglio, una serie di solchi trasversali, come tratti di sega. L'ultimo di questi oggetti proviene dagli scavi eseguiti l'anno scorso, gli altri due furono raccolti nel 1874.

Conchiglie lavorate.

L'oggetto più singolare ed interessante in questa categoria fu trovato nella grotta dal R. D. Perrando e consiste in una grossa valva di *Pectunculus* ben arrotondata, della quale per accidentale frattura manca un buon terzo (Tav. II, fig. 4). La conchiglia è attraversata da un foro collocato sulla linea mediana, a due terzi della distanza tra il cardine e il margine ventrale, ed ha la sua superficie esterna divisa in quattro segmenti, ciascuno dei quali è coperto di profonde strie parallele. Le strie di ogni segmento hanno comune la direzione con quelle del segmento opposto al vertice ed incontrano le altre ad angolo quasi retto.

Le valve di conchiglie semplicemente forate presso l'apice erano assai comuni nella caverna, massime in alcune tombe, e non si possono considerare che come oggetti d'ornamento. Il foro è di variabili dimensioni e si vede chiaramente che il più delle volte fu praticato stropicciando l'apice della conchiglia sopra un corpo duro e scabro. Così forati si trovano numerosi *Pectunculus* ed alcuni *Cardium* (Tav. II, fig. 12 e 13). Altre conchiglie forate, raccolte nella grotta, sono due *Conus mediterraneus* (Tav. II, fig. 6), uno dei quali proviene dalla tomba n. 4, ed un *Cassis sulcosa*. Presso il R. D. Perrando vidi poi un grosso *Triton nodiferum* coll'apice mozzato, da cui si possono trarre dei suoni come da una tromba. Da ciò è lecito supporre che il costume attribuito ai Tritoni della favola fosse pur praticato dai nostri cavernicoli.

L'oggetto rappresentato alla fig. 11, Tav. II è un pezzetto di conchiglia, non saprei dir di quale specie, forato e faccettato per servir ad uso d'articolo di monile [1]. Un altro oggetto consimile è conservato nella collezione del R. D. Perrando.

La fig. 9 della stessa tavola reca l'immagine di una specie di cucchiaio (almeno parmi di doverlo definir in tal guisa), il quale è tratto da un guscio di *Triton nodiferum*. Un cucchiaio dello stesso genere, ma un po' più concavo, fu trovato da me nel 1874, ed è ora ostensibile nel Museo civico di Genova. In entrambi gli oggetti il margine è attondato e limato e da ciò principalmente io desumo la destinazione loro.

Forse ad uso di cucchiaio servivano pure alcuni gusci di grosse arche, di *Spondylus* e di ostriche, trovati qua e là nella grotta; ma questa non è che una mia presunzione.

Manufatti litici.

Accette. La caverna ne ha somministrate un certo numero, che offrono poca diversità di forma. In generale sono di piccola dimensione e lavorate con diligenza. Ecco una succinta descrizione di quelle che ho potuto esaminare.

[1] È probabilmente un pezzo di grosso *Dentalium* fossile.

N. 1. (Appartenente al Museo civico di Genova). Accetta di giadeite raccolta accanto ad uno scheletro dai signori Brown e Brooke (Fig. 2). Le sue dimensioni sono: lunghezza 46, larghezza 26, spessezza 19 millim. È pianeggiante sulle due faccie, quadrangolare, un po' più ristretta ad una estremità che all' altra, di color verde porro. Il suo taglio è regolarmente arcuato ed acutissimo. Pesa specificamente 3,8; cifra singolarmente elevata, forse perchè la roccia è sparsa di pirite ([1]).

FIG. 2.
Accetta di giadeite.
grand. nat.
(Museo civico di Genova)

N. 2. (Appartenente al predetto museo). Accetta di pietra verde scura con macchiette chiare, probabilmente di diorite. Fu disseppellita nella regione orientale della grotta, dai medesimi esploratori. È lunga 74 millimetri, larga 46 e spessa 22. Presenta la solita orma triangolare, senonchè il suo taglio è molto arcuato ed obliquo.

N. 3. (Ora ostensibile nel R. Museo etnologico e preistorico di Roma). Accetta di giadeite trovata nella tomba num. 2 (Tav. III, fig. 6*a*, *b*). Le sue dimensioni sono: lunghezza 40, larghezza $28^1/_2$, spessezza 13,1. È piatta, sottile, in forma di triangolo scaleno troncato in uno degli angoli e cogli altri due un po' arrotondati. Il suo taglio è obliquo, un po' arcuato, acutissimo.

N. 4. (Appartenente al R. Museo di Roma) (Tav. III, fig. 8). Accetta di pietra verde scura, trovata nella tomba n. 3. Le sue dimensioni sono: lunghezza 57, larghezza del taglio 38, spessezza 17 millimetri. La sua forma è regolarmente triangolare ed ha il taglio arcuato ed assai tagliente. Come al solito, l'estremità opposta al taglio è scabra per offrire maggior resistenza alla legatura. La sua durezza corrisponde al settimo termine della scala di Mohs, e le macchiette di color verde chiaro di cui è sparsa mi fanno supporre che sia fatta di diorite ([2]).

N. 5. (Appartenente al R. Museo di Roma) (Tav. III, fig. 3). Accetta di pietra verdastra traente al bigio-azzurrognolo, trovata nella parte media della grotta a 60 centimetri di profondità, presso la tomba n. 1. Le sue dimensioni sono: lunghezza 118, larghezza 44, spessezza 25 millimetri. È linguiforme ed assai lunga relativamente alla larghezza. Il suo taglio è arcuato e tagliente. L'estremità opposta è naturalmente rugosa. La roccia presenta macchiette più chiare poco distinte e si lascia intaccare difficilmente dal quarzo.

N. 6. (Appartenente al R. Museo di Roma) (Tav. III, fig. 4). Accetta di pietra nerastra, trovata nella parte media della caverna, a circa un metro di profondità. Le sue dimensioni sono: lunghezza 94, larghezza 40, spessore 22 millim. È linguiforme al pari della precedente, ma meno stretta e più schiacciata verso il taglio, il quale è un po' sbocconcellato dall'uso. Lo stromento risulta di una roccia nerastra, dura quanto il quarzo, di struttura fibrosa che sembra dall' aspetto anfibolite.

N. 7. (Appartenente al R. Museo di Roma). Accetta di pietra verde, trovata nella parte media della grotta a circa 80 centimetri di profondità. Le sue dimensioni sono: lunghezza 74, larghezza 46, spessezza 18 millimetri. È di forma quadrangolare.

([1]) La parte superiore di questo arnese fu tagliata per essere sottoposta al saggio chimico.

([2]) In questo e in altri casi la roccia non fu determinata chimicamente per non danneggiare lo strumento e la sua natura rimase quindi incerta.

Il taglio dello stromento è smussato e logorato pel lungo uso. Il grado di durezza della roccia è $6^1/_2$.

N. 8. (Appartenente al R. Museo di Roma). Accetta verde, quadrangolare, schiacciata, mancante del taglio e dell'estremità opposta. Proviene dalla parte media della grotta.

N. 9 e 10. (Appartenente al R. Museo di Roma). Due ciottoli di pietra verde, in forma di cono tronco un po' compresso, raccolti nella parte media della caverna a mezzo metro di profondità. Questi oggetti, tanto per la forma loro quanto per le ammaccature di cui son coperti, mi sembrano accette di rifiuto logore ed infrante dopo un lungo uso.

Il R. D. Perrando possiede altre otto ascie od accette, della medesima provenienza, alcune delle quali perfettamente conservate.

Accette-scalpelli. Mi valgo di questo vocabolo per designare certe accette di pietra a corpo lungo e cilindrico e a taglio brevissimo; ma non intendo esprimere con ciò l'opinione che siffatti stromenti servissero ad uso di scalpello. Mi par più probabile, all'incontro, che fossero adoperati quali armi da caccia o da macello e in particolar modo a spaccare il cranio dei grossi mammiferi domestici. In appoggio della mia ipotesi giova avvertire che trovai nella caverna un cranio di pecora, rotto e forato tra le due corna, come se avesse ricevuto un violentissimo colpo vibrato per mezzo d'un arnese consimile.

Un frammento d'utensile di pietra verde, raccolto nella caverna dall' onorevole deputato Anton Giulio Barrili, e da lui donato, insieme a molti altri oggetti al Museo civico di Genova, si riferisce evidentemente al tipo d'accetta ora descritta; del quale d'altronde posseggo un esemplare perfettissimo trovato nella medesima località da mio fratello Alberto. Quest'oggetto, rappresentato nella Tav. III, fig. 1*a* 1*b*, è lungo 90 millimetri, largo 18 ed alto 13 ed ha forma di cilindro, un po' compresso ed attenuato ai due capi. Una delle due estremità si termina in un taglio acutissimo irregolarmente semicircolare; l'altra è greggia e scabra, segno che lo stromento doveva essere adattato ad un manico. La roccia di cui è fatto sembra una diorite affanitica, di non comune durezza e tenacità.

Disco forato. Il frammento figurato nella Tav. III, fig. 2 fu raccolto dal deputato Anton Giulio Barrili ed è ora compreso nella collezione paleontologica del Museo civico di Genova. Esso formava parte indubbiamente d'un anello litico di cui si è tentato di rappresentare la forma e le dimensioni supposte, per mezzo d'una linea punteggiata. Il diametro esterno del disco integro poteva misurare dai 10 ai 12 centimetri, il diametro interno del foro da $4^1/_2$ a 5. La piccola parte del margine esterno conservata nel frammento è assai tagliente; il margine interno ha 11 millimetri di spessezza ed è liscio e lucente. La materia che servì a fabbricare quest'oggetto è una bella giadeite translucida.

L'arnese sopradescritto era destinato, a parer mio, a munire una specie di mazza d'armi; e di ciò mi son persuaso confrontando il frammento posseduto dal Museo di Genova col disco d'una mazza d'armi papuana che il sig. L. M. D'Albertis recò non è molto dalla Nuova Guinea. Tutto corrisponde perfettamente nei due oggetti: la finitezza del lavoro, la perfezione del taglio, la dimensione del foro. Con questo

non intendo certamente revocare in dubbio le interpretazioni che gli archeologi hanno proposte per altri dischi consimili, chiamandoli: ornamenti, insegne, amuleti, rasacui; perciocchè io credo che le più lievi differenze in fatto d'utensili di pietra valgano a giustificare i più diversi giudizî.

Oggetto di uso ignoto. Le figure 10*a*,*b*. (Tav. III) valgono meglio di ogni descrizione a far conoscere l'aspetto di questo oggetto, il quale fu dissepellito a soli 50 centimetri di profondità, nella parte media della grotta. Esso consiste in un ciottolo di roccia ofiolitica, cui fu impartita la forma d'un prisma quadrangolare appuntato ad una estremità ed assottigliato all'estremità opposta. Le sue dimensioni sono: lunghezza millimetri 63, larghezza 25, altezza 21. La pietra è dura quanto l'ortose, di color nero verdastro con sfumature più chiare, e alla sua superficie si osservano sottili e fitte scalfitture dirette trasversalmente.

Coltelli. Furono trovati nella grotta parecchi di questi strumenti, tutti riferibili a tipi assai comuni.

L'originale figurato alla Tav. III, fig. 7*a*, *b*, è una scheggia di piromaca bruna terminata in punta ad una estremità e arrotondata all'altra. Esso offre due tagli minutamente ritoccati ed è lungo 52 millimetri, largo 17 e spesso 7. Lo trovai negli ultimi scavi eseguiti alle Arene candide, a circa m. 1,20 di profondità.

Il secondo esemplare figurato (Tav. III, fig. 9*a*, *b*), raccolto nel 1874 dai signori Brown e Brooke, è una lama di selce bionda, troncata ad una estremità ed appuntata all'altra. Presenta anch'esso due tagli che sembrano un po' logori e sbocconcellati dal lungo uso.

Un frammento di un altro coltellino consimile giaceva accanto allo scheletro di un bambino, nella parte media della grotta, come già accennai nel descrivere le singole tombe.

Raschiatoio. Si può forse considerare come tale una grossa scheggia di selce giallastra, della lunghezza di ben 6 centimetri, di forma irregolarmente trigona, con una faccia pianeggiante e l'altra convessa, dal margine rozzamente ritoccato. Questa fu trovata l'anno scorso nella tomba n. 5.

Nucleo. Fra i manufatti ultimamente asportati dalla caverna è compreso un piccolo nucleo siliceo di forma irregolarmente lenticolare, il quale ha una delle sue faccie naturalmente arrotondata e coperta di patina gialla e l'altra tutta scheggiata (Tav. III, fig. 5). Il suo diametro maggiore è di millimetri 26. Se quest'oggetto fu così fabbricato di proposito, potrebbe essere una pietra da fionda.

Scheggie. Una fra le scheggie litiche tratte dalla caverna è di color verde sbiadito, translucida, di lucentezza cerea, di struttura un po' cristallina e per questi suoi caratteri ricorda la giadeite. Altre sono frammenti di selce piromaca.

Pietre da macina. Nei varî scavi eseguiti alle Arene candide se ne trovò almeno una dozzina, quattro delle quali fanno parte della collezione spedita al R. Museo etnologico di Roma. Queste pietre sono variabilissime nella forma e nelle dimensioni, ma offrono il carattere comune di presentare una faccia pianeggiante o un po' incavata con traccie di logoramento. Seguono alcuni cenni intorno a quattro esemplari scelti fra i più caratteristici.

N. 1. È di forma irregolarmente quadrilatera, un po' incavata superiormente,

piana inferiormente. Le sue dimensioni sono: lunghezza centimetri 32, larghezza 21, spessezza 7 a 8. La roccia è *pietra di Finale*, sorta di arenaria calcare tenacissima.

N. 2. È di forma trapezia; la superficie superiore è incavata e liscia, l'inferiore scabra. Dimensioni: lunghezza centimetri 28, larghezza 18, spessezza da 4 a 8. La roccia è identica a quella del n. 1.

N. 3. È di forma ovoide, schiacciata e sopra ciascuna faccia offre un leggero incavo più profondo nel mezzo che alla periferia. Tali incavi sono levigati e tinti in rosso come da una sostanza ocracea. Dimensioni: diametro maggiore centimetri 26, $^{1}/_{2}$, diametro minore 15 $^{1}/_{2}$, spessezza circa 6. La roccia è quarzite biancastra durissima.

N. 4. Forma ovoide schiacciata, con due faccie appianate artificialmente. Dimensioni: lunghezza 15 centimetri, larghezza 10,2, spessezza 5. La roccia è arenaria bigia, silicea, durissima.

Macinelli. Credo che servissero a quest'uso certi grossi ciottoli ovoidi per lo più di quarzite bianca, piuttosto comuni nella caverna; infatti le loro estremità sono logore ed ammaccate. Uno di essi misura 9 centimetri nel diametro maggiore, 6 $^{1}/_{2}$ nel minore; gli altri sono più piccoli. Raccolsi pure un macinello di pietra verde la cui forma è sferoidale, con uno dei poli schiacciato e logorato. Questo misura 6 centimetri di diametro e fu raccolto presso la tomba n. 5.

Pietre da affilare (?). Alcuni ciottoli di pietra verde, assai dura offrono alla loro superficie numerose strie rettilinee evidentemente artificiali; da ciò argomento che si adoperassero ad impartire il filo alle accette litiche. La forma loro è per lo più ovoide e schiacciata. Uno di essi presenta le seguenti dimensioni: lunghezza centimetri 8 $^{1}/_{2}$, larghezza 4 $^{1}/_{2}$, spessezza 2 $^{1}/_{3}$.

Percuotitoio. Fra il macinello e il percuotitoio la differenza è lievissima e forse, in qualche caso, non sussiste. Tuttavolta la seconda denominazione mi sembra più acconcia della prima per designare un semplice ciottolo sferoidale di pietra verde, il quale offre a ciascun polo una incavatura artificiale. Quest'oggetto è posseduto dal R. D. Perrando e serviva io credo come stromento di percussione.

Ciottoli ed altre pietre non lavorate.

In tutti gli scavi eseguiti nella grotta si estrassero ciottoli marini di varie forme e di varie dimensioni che furono evidentemente portati dall'uomo nella caverna. Ma ognun vede quanto sia difficile il rintracciare la destinazione di oggetti che, nell'infanzia di ogni artificio industriale, potevano essere adoperati nei modi più diversi. Non ommetterò tuttavolta di esporre in proposito alcune ipotesi.

Ove s'incontrano residui di focolare non mancano mai grossi ciottoli anneriti dal fuoco, i quali sicuramente ebbero un ufficio qualsiasi nell'economia domestica dei cavernicoli. Servivano forse a sostenere i vasi in cui si apparecchiavano i cibi? Non si può a meno di avvertire che la forma loro ovoide o sferoidale era poco acconcia all'uopo. Non è egli possibile che si adoperassero per arroventarli, e cuocere talune vivande in vasi che non si volevano esporre direttamente al fuoco? È poco probabile, perchè possedevano vasi di più maniere ed anche suscettibili di reggere per lungo tempo all'azione di una viva fiamma.

Un'altra ipotesi mi sembra più verosimile. Parecchi popoli barbari sogliono preparare una specie di pane senza lievito, avvolgendo di pasta ciottoli ben tersi e collocandoli sulla brace; io stesso vidi sperimentar questo sistema di panificazione sull'altipiano abissinico e mi parve raggiungesse perfettamente lo scopo di convertire in pochi minuti una farina grossolana in un cibo sano e gradito. Orbene non mi sembra improbabile che gli abitanti della grotta, i quali possedevano macine, e per conseguenza facevano uso di qualche farina, avessero precorso in quel costume i moderni abissinesi.

I ciottoli di cui tengo ora discorso sono quasi tutti di quarzo, in forma di sferoidi schiacciati; uno dei maggiori misura centim. 11 di lunghezza, $8\,^1/_2$ di larghezza e $3\,^1/_2$ di spessezza.

Certi sferoidi più piccoli e di roccia calcarea non portano traccie dell'azione del fuoco e, ove non fossero utensili da vasai o semplici projettili non saprei immaginare a quale uso si raccogliessero.

Non così di altri ciottoli per lo più di pietra verde e di forma assai allungata: le ammaccature che si osservano alle loro estremità dimostrano che servirono come strumenti di percussione, forse per spaccare le ossa dalle quali si voleva estrarre il midollo, ovvero per ammorbidire qualche pelle od anche per rompere corteccie e steli affine di estrarne fibre tessili o fecole. Odoardo Beccari osservò che i nativi della Papuasia si valgono di ciottoli consimili, saldamente fissati ad un manico di giunco, per ammaccare il tessuto feculifero che somministra loro il sagù.

Per chiudere le mie considerazioni in proposito, dirò pure che trovai un buon numero di pietruzze quarzose bianche nella terra che ricopriva i sepolcri della caverna. A parer mio non è questa una circostanza accidentale, ma è prova di un antico rito funebre, analogo forse a quello che compiono i moderni Bogos, i quali coprono di candidi ciottoletti le tombe dei loro cari, quando non perirono di morte violenta.

Frammenti di pomice. Fra gli oggetti raccolti negli ultimi scavi v'ha un pezzo di pomice bigia, di forma irregolarmente ovoide, lungo circa 9 centimetri, che fu tratto dalla profondità di un metro. Su questo la mano dell'uomo non ha lasciato alcuna traccia; ma alla superficie di un pezzo consimile, trovato nel 1864, si vedono chiaramente dei solchi profondi e sottili, decorrenti in varie direzioni che sembrano fatti affilando corpi appuntati, ed è probabilissimo che abbia servito ad aguzzare le punte d'osso già descritte.

La pomice è roccia propriamente estranea alla Liguria; ma dopo le maggiori sciroccate se ne trova sulle nostre spiaggie qualche pezzo, forse proveniente dalle isole Eolie.

Ocra rossa e gialla. In quasi tutte le tombe scoperte nella caverna fu trovata l'ocra rossa, in pezzi irregolari, talvolta assai voluminosi, ed era per lo più associata ai cocci di un vaso che originariamente la conteneva. Una volta m'accadde perfino di osservarne due o tre pezzi grossi come il pugno collocati sul fondo di un vasetto, il quale, quantunque spezzato, ancora conservava la propria forma, perchè sorretto dalla terra circostante.

L'ocra di cui si tratta è impura e mista di sabbia silicea. Credo che provenga da un ampio deposito di terra ocracea che s'incontra nel Finalese, risalendo la via di Melogno fin nei pressi di Gorra.

M'imbattei pure nel corso degli scavi in alcuni pezzi d'ocra gialla; ma non sono in grado di asserire che fossero compresi tra le suppellettili di qualche tomba.

Cristallo di quarzo. Alla fine dello scorso anno, mio fratello praticò un piccolo fosso nel solo punto della grotta che non fosse completamente sconvolto dai precedenti scavi e ivi raccolse, fra le altre cose, un prisma di quarzo jalino limpidissimo, di 12 millimetri di lunghezza, il quale è rotto alle due estremità. Esso era impigliato in una durissima concrezione stalattitica che univa in un solo masso, pietre, ossa e frantumi di carbone.

Un simile cristallo non potè formarsi nella grotta, le cui pareti calcaree non presentano traccia alcuna di filoni quarzosi. Esso vi fu dunque introdotto dall'uomo.

Zolle forate da ditteri sarcofagi. Ogni volta che praticai escavazioni nella caverna m'accadde d'imbattermi in zolle argillose e nerastre, tutte piene di piccoli vacui ovoidi a pareti levigate. Supposi dapprima che fossero modelli di corpi organici omai distrutti, per esempio di ghiande, cui corrispondono per la forma e le dimensioni; ma un più maturo esame mi fece accorto che son invece l'opera d'insetti.

È da supporsi che fossero accumulati nel fondo della grotta ossami e carni corrotte, in mezzo alle quali brulicavano larve di ditteri. Queste allorchè stavano per compiere le loro metamorfosi si introducevano nella terra sottostante e ivi ciascuna si formava un nido di terra a guisa di bozzolo e più non l'abbandonava se non dopo aver raggiunto lo stato perfetto.

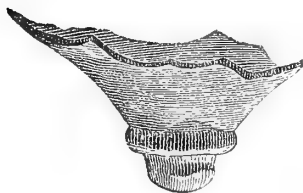
Oggetti di terra cotta.

Stoviglie. Gli oggetti di terra cotta estratti dalla caverna sono quasi esclusivamente cocci appartenenti a più maniere di stoviglie.

Tali cocci, numerosissimi, sono riferibili a due periodi archeologici i cui prodotti industriali vennero per così dire a sovrapporsi e in parte a confondersi nel suolo della caverna. Alcuni sono pezzi di vasi foggiati al tornio e con pasta fina e omogenea i quali, sia per le forme sia per la materia, non differiscono menomamente dai fittili che si trovano in abbondanza fra i ruderi romani di Vado, dell' antica Libarna e in altre località della Liguria. Consistono specialmente in fondi di grandi anfore fatte a cono tronco o a punta smussata (Fig. 3), in cocci con pezzi d'orlo rimboccato all'esterno, e con ventre prominente, in anse assai grandi e piegate ad arco. Di questi avanzi (raccolti da tutti gli esploratori della caverna) non mancano alcuni esemplari caratteristici fra gli oggetti testè spediti da me al R. Museo etnologico e preistorico di Roma.

FIG. 3.

Fondo d'anfora raccolto negli strati superficiali della caverna.
(Museo civico di Genova).

Essi provengono tutti, senza eccezione, dagli strati di terriccio compresi fra la superficie e 40 centimetri di profondità ed è interessante il fatto che nei medesimi strati si trovano bene spesso accanto ad oggetti che sogliono tenersi in conto di preistorici.

Rispetto ai cocci più grossolani, premetto che sono assai più numerosi e che si incontrano dalla superficie fino alla massima profondità raggiunta cogli scavi, cioè fino a 3 metri sotto il livello del suolo. Essi son foggiati a mano, cotti senza l'aiuto del forno e risultano di argilla impura, per lo più di color bruno o rossiccio. La pasta, sempre un po' marnosa e malcotta, fa effervescenza cogli acidi e contiene invariabilmente un po' di rena sabbiosa che talvolta vi fu introdotta di proposito deliberato, acciocchè nel cuocere non si dilatasse inegualmente e altra volta, forse, preesisteva nell'argilla ([1]). Alcuni cocci ricettano anche pietruzze di serpentina ([2]).

Alcune di quelle terre cotte, comunque fatte a mano, sono di finezza insolita, e sembrano composte di argilla lavata, cui fu impartita una tinta nerastra per mezzo di qualche artifizio ora troppo difficile a rintracciare. La superficie loro, nell'interno quanto fuori, è levigata e quasi come verniciata, il che credo si ottenesse mediante una specie di brunitura, stropicciando il vaso ancora crudo, ma già indurito, con un corpo duro e liscio.

L'argilla per la fabbricazione delle stoviglie si traeva, se non erro, dai sedimenti pliocenici di Vado, di Zinola e delle Fornaci, che sono poco distanti, e l'arena quarzosa è quella, io credo, che forma a pochi passi dalla grotta la duna delle Arene candide.

Quantunque nel deposito della grotta non si sia trovato che un solo vaso intero, pure non è difficile conoscere, dall'esame dei cocci, quali fossero le forme più usitate dai cavernicoli per le loro stoviglie.

Una delle forme più comuni era quella, presso a poco cilindrica, delle nostre volgari pignatte. I vasi di tal fattura avevano l'orlo semplice, il fondo pianeggiante o appena un po' convesso. Non saprei dire se portassero un manico o due. Erano pur frequenti i vasi ovato-conici a fondo piatto, simili a quello figurato nella Tav. II, fig. 5.

Alcuni pezzi accennano a vasi di forma semiovale, un po' meno alti del sopradescritto e col fondo arrotondato. Questi, a quanto pare, erano forniti di un solo manico. In altri poi si manifesta una forma ventricosa in basso e cilindrica in alto, come può vedersi dalla fig. 7, Tav. II. Il frammento rappresentato dalla figura offre ornati a graffito e presso l'orlo è munito di fori per mezzo dei quali si poteva sospendere ad una cordicella. Pochi pezzi appartengono ad una specie di olla ventricosa, alquanto strozzata presso l'orlo, con un piccolo manico o due, all'altezza della strozzatura.

Il R. D. Perrando raccolse nella caverna della Matta un bel vaso il quale è, alla parte inferiore, ventricoso e un po' carenato, superiormente, svasato e *quadrangolare*. Un piccolo coccio delle Arene candide sembra appartenere a questo singolarissimo tipo. Lo stesso esploratore trovò pure nei sedimenti delle Arene candide una specie di bicchiere perfettamente integro, dell'altezza di 6 centimetri $^1/_2$, la cui forma è cilindracea, col fondo arrotondato.

([1]) Pigorini e Strobel denominano *tarso* la sostanza minerale, quarzo calcare od altro, che i terramaricoli, come fanno certi figuli odierni del nostro Appennino, introducevano per lo scopo anzidetto nella pasta dei loro vasi. Vedasi in proposito la preziosa Memoria intitolata: *Le terramare e le palafitte del Parmense*, negli Atti della Società italiana di Scienze naturali, vol. VI, p. 82.

([2]) In un grosso coccio osservai dei ciottoletti di $^1/_2$ centimetro di diametro.

Finalmente non mancavano le ciotole di varie dimensioni, alcune delle quali di pasta purgata e forte e lisciate a spatola. Nei cocci di questi fittili si osserva che la parete forma col fondo angoli di 120°, 125° e 140°. In un esemplare di singolare finezza, che potrebbe essere un avanzo di coperchio, l'angolo, un po' smussato, misura 150°.

Rispetto ai manichi, di cui si sono raccolti fra i cocci numerosi campioni, predomina la forma, tuttora frequentissima, che Canestrini denomina *auricula pertusa*. Di tali manichi ve ne son di grossi, di piccoli, di stretti, di larghi, di prominenti e di schiacciati (¹). Essi presentano assai di rado qualche ornato a graffito, ma non son mai forniti di appendici come quelli che trovansi nelle mariere dell'epoca del bronzo. Talvolta i manichi sono in forma di orecchietta trigona, attraversata da un piccolo foro, ovvero si riducono a semplici protuberanze semicircolari piane che decorrono parallelamente all'orlo od obliquamente ad una certa distanza da esso; alcune di tali protuberanze sono forate, altre impervie, e in due cocci si presentano tutte dentellate a mo' d'ornamento (²). Finalmente in parecchi pezzi i manichi sono sostituiti da bugnette o tubercoli pervi od integri (Tav. IV, fig. 8).

Rispetto agli ornamenti dei vasi, si manifestano sulle pareti, sugli orli e sulle anse. Nel primo caso non sono mai linee geometriche, ma serie d'intaccature o di impressioni, disposte in varie guise, e linee ondulate.

Nella collezione del R. D. Perrando si vedono due pezzi di vasi che offrono parecchi ordini d'intaccature verticali, paralleli all'orlo, ed uno, in cui v'ha una serie di segnetti verticali in un senso e una serie di piccoli tratti orizzontali in un altro. Un piccolo coccio della medesima raccolta è coperto di due sistemi di lineette tremolate.

Fra gli oggetti raccolti da me, nel 1874, il frammento rappresentato nella Tav. II, fig. 7, offre due ordini di linee tremolate longitudinali, l'uno prossima all'orlo, l'altro nel ventre del vaso. Nel coccio figurato nella stessa tavola, al n. 3, l'ornato è distribuito in due zone e risulta di segni fatti premendo un oggetto appuntato sulla pasta ancora molle. Nella prima zona si osservano tre file di segnetti trasversi, poco profondi, alternanti con due file di segni obliqui, più impressi dei precedenti. La seconda zona è formata di tre file di segni obliqui, alternanti con due di tratti trasversi. Il coccio è fatto di pasta grossolana e ben cotta; la sua spessezza massima è di 11 millimetri. L'esemplare figurato al n. 1 (Tav. II), raccolto da me insieme al precedente nel 1876, presenta un pezzo d'orlo semplice ed assottigliato e al di sotto un cordoncino poco elevato, dal quale si dipartono due ordini d'impressioni oblique che forse stanno a rappresentare foglie attaccate ad un ramoscello. In questo caso le impressioni sembrano eseguite coll'unghia.

È notevole un altro piccolo coccio, il quale è coperto esternamente da quattro rilievi irregolari e schiacciati che si sovrappongono come embrici d'un tetto. Il vaso era assai piccolo, a pareti sottili, di pasta rossastra, omogenea e ben cotta, e probabilmente data dall'ultima epoca durante la quale la caverna fu frequentata.

Gli ornamenti sugli orli dei vasi consistono in serie d'impressioni più o meno profonde, fatte col dito, e in dentellature praticate con uno stecco o col taglio d'una

(¹) Uno dei maggiori misura 5 cent. di lunghezza, 5 ½ di larghezza e 8 millim. di spessezza.

(²) Lubbock, *I tempi preistorici o l'origine dell'incivilimento*. Appendice, p. 776, f. 32.

spatola (Tav. II, fig. 7 e 8). Non si trovano cocci ad orlo riflesso che nella parte superficiale del deposito e questi, come dissi, portano le traccie della tornitura. Fra i pezzi non torniti alcuni hanno però l'orlo un po' svasato.

Gli esempî di manichi ornati sono assai scarsi; tuttavolta il R. D. Perrando ne trovò uno della forma più comune, in cui vi ha, per ciascun lato, una serie di linee parallele trasversali e in mezzo una serie d'intaccature. Altri quattro manichi, in forma di prominenze compresse, semicircolari, che furono rinvenuti da me nella caverna in varie epoche, presentano intorno al margine loro delle crenature più o meno profonde.

Oggetti d'uso ignoto. Il R. D. Perrando possiede un oggetto di terra cotta, simile per la materia ai cocci più rozzi, che rammenta una pipa comune, alla quale mancasse parte della cannuccia e in cui fosse rotto e sbocconcellato il ricettacolo del tabacco. Quantunque un tal ravvicinamento possa parere strano e forse anche provocare un sorriso, non è meno vero che si affaccia spontaneo alla mente e che vale a dare un'idea esattissima dell'oggetto in discorso (1). D. Perrando afferma d'averlo trovato a 2 metri di profondità nel suolo delle Arene candide.

Un arnese consimile, tratto dalla terramara di Gorzano, fu descritto dal professore Canestrini sotto il nome di *Olla caudata* (2).

L'oggetto che ora mi accingo a descrivere è uno dei più notevoli, fra quanti provengono dal sepolcreto delle Arene candide, e fu raccolto da me stesso, a circa un metro di profondità, nella parte media della grotta, accanto alle tombe n. 1 e n. 2.

Come si vede dalle figure 10*a*,*b*, Tav. II, esso ha forma di parallelopipedo, arrotondato in tutti gli spigoli, assai allungato e depresso. Una delle sue faccie maggiori presenta alla parte media una prominenza conica, attraversata da un foro di 4 millim. di diametro. La faccia opposta, che è lievemente convessa, offre tre profondi solchi longitudinali e per ciascun lato una serie di solchi trasversali, un po' obliqui che risalgono sui due fianchi. Le sue dimensioni sono:

Lunghezza	millim.	101
Larghezza	»	26
Altezza del rilievo . . .	»	34
Altezza delle due estremità	»	11

Quest'oggetto è fatto di terra nerastra, dura, assai cotta.

Rispetto all'uso cui era destinato, quantunque si sia già esercitata in proposito la sagacia di parecchi studiosi, manca ancora una plausibile interpretazione. Fu proposta l'ipotesi che servisse come stampo per le stoviglie, ma oltre alla considerazione che non fu mai trovato nella caverna nessun coccio con ornati in rilievo, si oppone a questo modo di vedere il fatto che i solchi non contengono la menoma parte d'argilla.

Il sig. V. Vecchi suppose argutamente che lo strano arnese fosse stato adoperato a mondare le pelli, di cui forse i cavernicoli facevano le loro vestimenta. Ma

(1) Non sarebbe questo per avventura una lampada primitiva?

(2) *Oggetti trovati nelle terramare del Modenese*, illustrati per cura del prof. Canestrini, pag. 13, Tav. II f. 5. Modena, 1866.

perchè allora quei solchi in due direzioni quasi perpendicolari? E poi gli spigoli delle costole comprese fra i solchi non presentano alcuna traccia di logoramento.

A me sembra che se le zanne di cinghiale, i canini di lupo, le valve di *Pectunculus* erano portati dai cavernicoli come preziosi ornamenti, un pendaglio di terra cotta poteva esser tenuto da costoro in conto di elegantissimo fregio; e non sarei lontano dal credere che, essendovi impressi certi segni particolari, vi si annettesse pure qualche idea superstiziosa.

In questa rubrica va pur compreso un piccolo disco, formato di argilla bruna, omogenea, poco cotta. Il suo diametro maggiore misura centimetri 4 ½, il minore 3 ½; la spessezza non arriva a 7 millimetri. È sopra un po' convesso e inferiormente pianeggiante. Allorchè lo raccolsi, nella parte media della grotta, a circa un metro di profondità, era così molle che credetti a tutta prima fosse fatto di legno.

Focaccia di terra cotta. Si tratta d'una masserella d'argilla che ha quasi il volume del pugno, forma di ovoide irregolare e schiacciato e color rosso mattone, la quale fu evidentemente impastata a mano, poi esposta al fuoco. L'artefice vi lasciò l'impressione delle dita e segnatamente quella d'un pollice, la quale si presenta come un incavo di 17 millim. di profondità. L'impronta è così netta, in qualche punto, che vi si distingue perfettamente il modello dei rilievi epidermici.

Circa il significato di quest'oggetto, due interpretazioni si presentano spontanee alla mente. Esso è una porzione d'argilla apparecchiata per foggiarne un vaso, caduta per inavvertenza in un focolare, oppure è un campione di pasta, di cui si volle sperimentar la resistenza al fuoco. La seconda ipotesi mi sembra più verosimile della prima, giacchè il pezzo, cotto con diligenza, fu poi infranto ad una estremità, per verificare probabilmente quale azione il fuoco avesse esercitata nell'interno della massa. Ad ogni modo, si può da ciò argomentare che i trogloditi finalesi fabbricassero le loro stoviglie nella stessa caverna.

Manufatti di vetro e di metallo.

Disco di vetro. Le sue dimensioni sono: diametro millim. 38, spessezza mill. 10. Come si vede dalle figure 2*a* e 2*b*, nella Tav. II, esso è sopra convesso e inferiormente concavo; nella parte centrale della faccia superiore vi si osserva il residuo d'un peduncolo infranto, il quale era attraversato da un foro. La materia di cui risulta è un vetro verdastro, un po' opalescente, coperto di un intonaco bruno, dovuto ad una alterazione superficiale. Togliendo la patina con una punta di temperino, il vetro sottostante apparisce splendente di vivida iridescenza e si sfoglia in minutissime laminette [1]. Il disco ora descritto è verosimilmente la base di un calice o di un'anforetta di fabbrica romana. La sua presenza nella caverna, a 50 centimetri di profondità, insieme a cocci di stoviglie non tornite, in uno strato di terriccio carbonioso intatto (almeno mi parve tale), è un fatto interessante, sul quale vorrei richiamare

[1] Queste sono infusibili al cannello, insolubili negli acidi e risultano di silice quasi pura. La patina bruna superficiale, esaminata al cannello, presenta le reazioni del manganese, del ferro e della silice.

l'attenzione dei paletnologi. Non è egli ammissibile che quel frammento sia stato tolto dai barbari trogloditi delle Arene candide a gente che già era pervenuta ad un alto grado di civiltà?

Nella parte più superficiale della caverna il R. D. Perrando disseppellì parecchi stromenti agricoli in ferro, la cui età non risale certamente che ad alcuni secoli. Da canto mio raccolsi, nelle medesime condizioni, un pezzo di lama di pugnale o di spada tutto ossidato, della lunghezza di 9 centimetri e $^1/_2$.

Avanzi di vertebrati.

Le numerosissime ossa di vertebrati estratte dalla caverna, tranne poche eccezioni, appartengono a mammiferi e giacevano alla rinfusa in ogni parte della grotta, ma sopratutto presso antichi focolari ed intorno alle tombe. Due o tre volte soltanto m'accadde di disseppellirne un certo numero collocate secondo le loro naturali connessioni.

Alcune specie più comuni e non molto voluminose, come la pecora, la capra, il cinghiale, il capriolo, erano rappresentate nella grotta da ossa di ogni maniera. Di altre, come il bue e il *Cervus elaphus*, mancavano all'incontro le ossa più voluminose e non si trovarono che frammenti di mandibole, metacarpiani, metatarsiani, falangi e coste.

Quasi tutte le ossa lunghe dei mammiferi di grandi e di medie dimensioni presentano le diafisi spaccate per lungo o rotte obliquamente. Fra i resti dei grossi mammiferi non raccolsi che un cannone di cervo ed uno di bue che fossero veramente intatti. Spesso alla superficie di tali ossa, sopratutto presso i capi articolari, si osservano tagli trasversali netti e profondi e segni di raschiatura. Alcune epifisi di ruminante sembrano rose da qualche carnivoro.

Nessun teschio intero di mammifero fu trovato nella caverna; dai pezzi raccolti si può argomentare che i cavernicoli uccidessero gli animali destinati alla loro alimentazione, spaccando loro il cranio per mezzo di uno strumento tagliente. Sopra un cranio d' *Ovis* osservai, tra le basi delle corna, un piccolo foro assai stretto e rettangolare che sembra fatto con un colpo di scalpello.

Quasi tutte le mandibole inferiori hanno l'estremità anteriore spezzata; alcune sono prive del ramo ascendente, in altre si ruppe solamente l'apofisi coronoide o il condilo.

Le sole mezze mandibole intere incontrate nella grotta spettano ad un tasso, a due faine e ad un cane. Per altro si trovò una mandibola d'un altro cane artificialmente spezzata all'estremità anteriore, come sono d'ordinario quelle dei ruminanti.

Per la massima parte le ossa portano traccie evidentissime di cottura e talune sono perfino carbonizzate. È ben manifesta l'azione del fuoco su tutte le ossa di ruminanti e di suini, nonchè sopra una mandibola di lepre. Le ossa di cinghiale e di porco si distinguono bene spesso, a prima vista, per la loro tinta più oscura; il che si verifica pure per gli avanzi delle terramare.

Le ossa d'uccelli sono in scarso numero e generalmente intere. Quasi tutte appartengono alle estremità.

Due soli esemplari, cioè un clipeo di testuggine terrestre ed un frammento di omero della medesima specie, stanno a rappresentare la classe di rettili, nella fauna della caverna.

I pesci vi mancano completamente, ed è cosa strana, perciocchè, trovandosi la caverna vicinissima al mare, riesce difficile il comprendere come i suoi abitanti non fossero anche un po' pescatori.

Felini. Alcune ossa lunghe rinvenute nella caverna si riferiscono senza dubbio ad animali di questa famiglia. Un omero sinistro fra le altre corrisponde, per le dimensioni e le forme, all'osso omologo del gatto. Un femore sinistro ed un altro omero appartengono invece ad una specie di maggiori dimensioni che potrebbe essere la lince.

Faina (*Mustela foina*). Ne conosco due mandibole inferiori, una sinistra e una destra, appartenenti a due individui. Paragonate queste colla mandibola della faina tuttora vivente in Liguria, non se ne distinguono che per differenze lievissime.

Martora (Mustela martes). Vi si riferiscono, secondo il prof. Strobel, un radio ed un metatarsiano.

Orso. A questo genere si attribuisce un osso del metatarso, il quale è compreso nella raccolta depositata tre anni sono al Museo civico di Genova dai signori Brown e Brooke. Ma siccome in quell'epoca i due esploratori precitati visitarono anche l'*Arma du Rian* che ricetta copiosi avanzi di *Ursus spelaeus,* non è impossibile che qualche piccolo oggetto della seconda sia andato confuso colla raccolta proveniente dalla prima.

Tasso (*Meles taxus*). Ne raccolsi nell' ultima gita che feci alla grotta una mandibola con tutti i suoi denti. Quest' osso sembra un po' più alto, verso l' estremità anteriore, dell'osso corrispondente d' un individuo fresco ; la sua apofisi coronoide è più stretta ed ha il margine posteriore un po' più convesso; il condilo è più robusto. Alla medesima specie si riferisce una porzione di bacino.

Tanto le ossa di *Felis* quanto quelle di tasso non sono rotte dalla mano dell'uomo e non subirono cottura.

Lupo (*Canis lupus*). Ne possiedo un mascellare superiore destro, nel quale son conservati il canino, il terzo premolare, il ferino (il quale è rotto nel margine posteriore) e due molari; di uno dei premolari mancanti rimangono le radici incastrate nei proprî alveoli. Dall' esame di questo pezzo si può argomentare che fu violentemente staccato dal cranio con un colpo d'arnese a tagliente smussato, di cui vedonsi le traccie sul margine superiore dell' esemplare, il quale è in parte tagliato netto e in parte scheggiato. Non osservai in esso alcun carattere osteologico degno di nota.

Il lupo, quantunque raro, non ha cessato d' infestare le più alte regioni della Liguria occidentale.

Cane. I più interessanti avanzi di questo carnivoro sono, tra i fossili della caverna, due mandibole inferiori sinistre un po' diverse fra loro, appartenenti ad individui di piccola statura. L' egregio mio collega prof. Strobel, cui ho comunicato i disegni delle due mandibole, è d'avviso che somigliano a quelle del *Canis familiaris palustris.* Una di queste, la maggiore, è rotta anteriormente ed offre traccie di erosione e di cottura, l' altra è integra.

Al medesimo genere si debbono ascrivere parecchie ossa lunghe, tra le quali quattro metatarsiani che corrispondono a quelli figurati dallo Schmerling, nella sua grande opera sulle ossa fossili scoperte nelle caverne della provincia di Liegi, alla Tav. IX, fig. 15 (vol. II) come avanzi di volpe.

Le erosioni che si osservano sui capi articolari di molte ossa sono indizio che il cane aveva la sua parte nei pasti imbanditi dai cavernicoli.

Suini. I pezzi di mascella, le vertebre, le ossa lunghe di suini sono piuttosto comuni nel suolo della grotta e si distinguono facilmente dagli avanzi degli altri animali pel loro colore più oscuro, massime quando hanno subìto l'azione d'una intensa cottura. Molte di queste ossa sono ridotte a piccoli frammenti e si sottraggono ad ogni determinazione, altre presentano tagli, incisioni, segni di raschiature, fatti evidentemente nello staccarne i tendini e i muscoli. Già accennai al ritrovamento di zanne che subirono una lavorazione più o meno inoltrata.

Alcuni resti di suini appartengono a parer mio ad una piccola varietà del cinghiale comune, il quale ha cessato di vivere nella nostra provincia. Altri, secondo il prof. Strobel, si riferiscono al *Sus scrofa domesticus* e forse, in parte, alla varietà *palustris*, Rüt.

Bue (*Bos taurus*). Gli avanzi di questa specie sono piuttosto scarsi nella grotta e consistono per la massima parte in pezzi poco caratteristici, dai quali non è possibile giungere con sicurezza alla cognizione della razza cui appartengono. Fra quelli ottenuti dai varî esploratori della grotta noterò una mandibola diritta d' un individuo giovanissimo, una parte di mandibola superiore destra d' individuo adulto, ma di piccole dimensioni, un ramo ascendente d'una mandibola inferiore col suo condilo e l'apofisi coronoide, varî denti staccati, alcune coste, un frammento di radio, un metacarpiano intero e varie falangi. Ecco le dimensioni del metacarpiano: lunghezza millim. 203, larghezza dell' articolazione superiore 59, larghezza dell' articolazione inferiore 59, larghezza dell'osso nella parte media 31, spessezza del medesimo nella parte media 24.

Il prof. Strobel, cui comunicai parecchie ossa di questa specie, è d'avviso che appartengano a tre diverse varietà, una delle quali sarebbe il *brachycephalus*, Wilckens (*primigenius?* Strobel, olim), la seconda l'*elatior*, Canestrini (*brachyceros* mezzano, Strobel), e la terza, probabilmente, il *brachyceros*, di Rüthimeyer.

Cervi. Furono distinte dal sig. Victor Brooke e da me, tra le ossa di ruminanti asportate dalla caverna, gli avanzi di due specie; vale a dire del capriolo (*Cervus capreolus*) e del cervo comune (*Cervus elaphus*). Entrambe dovevano essere piuttosto comuni, la prima però più della seconda. Del capriolo si raccolsero ossa spettanti ad individui d' ogni età e specialmente mandibole, bacini, tibie, omeri, cannoni, sempre però più o meno rotti. Del cervo comune non si rinvennero che due o tre mandibole ed ossa lunghe fra le quali un cannone integro. Si trovò un solo corno di cervo, il quale era collocato accanto al cranio del primo scheletro umano disseppellito nella caverna. Il genere *Cervus* non è più compreso nella fauna ligure.

Pecora (*Ovis aries*). Le ossa di questa specie sono numerosissime, ma quasi tutte infrante e però poco interessanti dal punto di vista zoologico. I pezzi in migliore stato di conservazione sono le mandibole inferiori, che per le forme e il volume

somigliano assai alle ossa corrispondenti del muflone di Sardegna. Il prof. Strobel mi scrive che la pecora delle Arene candide doveva essere uguale od affine alla razza *palustris*, Rüt. Peraltro un metacarpiano trovato nella caverna non si può riferire alla medesima varietà e il precitato naturalista l'ascrive dubitativamente ad una razza nana della pecora comune. Un osso consimile fu figurato nella tav. VI, lettera F della Memoria di P. Strobel intitolata *Avanzi preromani* (Vedasi anche in proposito: *Le terramare e le palafitte del Parmense,* seconda relazione, p. 60. Milano, 1864).

Capra (*Capra hircus*). Questa specie si distingue difficilmente dalla precedente pei suoi caratteri osteologici. Tuttavolta la sua presenza fra i ruminanti della grotta fu accertata dal signor Victor Brooke, il quale determinò come avanzi di capra comune una mandibola inferiore, un radio, una tibia ed altri ora ostensibili nella collezione paleontologica del Museo civico di Genova. Da canto mio trovai numerose ossa e corna riferibili alla medesima specie, negli ultimi scavi eseguiti nella grotta.

Lepre (*Lepus timidus*). Riferisco a questa specie un frammento di mascella superiore con due incisivi in posto, una mandibola inferiore e varie ossa delle estremità. Il primo fra i pezzi ora indicati offre l'angolo formato dai due mandibolari più aperto che negli individui viventi della stessa specie. I due incisivi sono in parte anneriti e carbonizzati dal fuoco e tutto fa supporre che l'animale cui appartenevano fu cotto e mangiato dai cavernicoli.

Arvicola. Una piccola tibia simile a quelle figurate da Schmerling m'induce a comprendere nel mio elenco anche questo genere.

Uccelli. Le ossa di volatili non sono rare nella grotta, ma per le difficoltà che si oppongono alla loro determinazione o piuttosto per la mancanza di materiali di confronto, non posso qui registrare con certezza che due soli generi: vale a dire una pernice, le cui tibie non differiscono sensibilmente da quelle della *Perdix petrosa* di Sardegna [1] ed un *Tetrao* (che forse corrisponde al *T. albus*). Di quest'ultimo raccolsi un cubito a 2 metri di profondità, nella camera orientale della spelonca.

Rettili. Un clipeo di testuggine terrestre *(Cistudo europaea)*, rinvenuto nella grotta dal R. D. Perrando, figura nella collezione di questo naturalista; l'articolazione superiore d'un omero destro della medesima specie fu raccolta da me. Questi sono i soli avanzi che rappresentino la classe dei rettili.

Resti di molluschi e di echinodermi.

I resti di molluschi sono rappresentati, nel suolo della caverna, da un gran numero di conchiglie di gasteropodi e di lamellibranchi e da frammenti d'ossicini di *Sepia.* Alla classe degli echinodermi non si possono ascrivere che pezzetti d'un guscio d'*Echinus.*

Le conchiglie sono per la massima parte di specie marine e mangereccie. Tutte le specie marine appartengono alla fauna ora vivente nel Mediterraneo, ma talune sono divenute rare o mancano affatto sui nostri littorali. Una delle specie terrestri è estinta. Pochi, fra i gusci raccolti nella caverna, servirono a qualche uso industriale

[1] Gli avanzi di pernice cui alludo spettano, secondo ogni probabilità, ad una specie ligustica affine alla *P. petrosa,* cioè alla *P. rubra,* di cui non potei veder lo scheletro.

o come oggetti d'ornamento. Per lo più son residui di pasti, e in questo numero certe patelle sembrano aver subìto l'azione del fuoco. Segue l'elenco delle specie:

Sepia officinalis Linné.

Parecchi frammenti di ossicini riferibili a questa specie furono raccolti da D. Perrando e da me a varî livelli. — Vivente attualmente in Liguria.

Cypraea lurida Linné. Weinkauff, *Die Conchylien des Mittelmeeres*, II p. 10 (1867).

Ascrivo dubitativamente a questa specie una conchiglia raccolta nella grotta dal R. D. Perrando. — Specie rarissima sul littorale ligustico.

Tritonium nodiferum Lamarck. Weinkauff, op. cit., p. 75.

Molti pezzi di conchiglie, alcuni dei quali lavorati dall'uomo, forse per servir di cucchiaio. Il R. D. Perrando ne trovò un esemplare quasi intiero e coll'apice forato. — Vivente attualmente in Liguria, ma raro.

Tritonium (*Cabestana*) *cutaceum* Linné. Weinkauff, op. cit., p. 79.

Parte del margine destro. — Specie rarissima nelle acque della Liguria.

Conus Mediterraneus Bruguière. Weinkauff, op. cit., p. 146.

Varî esemplari, due dei quali forati artificialmente. — Comune in tutto il Mediterraneo.

Purpura haemastoma Linné. Weinkauff, op. cit., p. 52.

Parecchie conchiglie, alcune coll'apice forato artificialmente, altre logore e rotte. Non pare che abbia servito ad uso di commestibile. — Questa specie non fu mai raccolta sulle spiaggie del Genovesato, ma s'incontrò, rarissima, nelle acque della Toscana e dell'Italia meridionale.

Cassis sulcosa Bruguière. Weinkauff, op. cit., p. 41.

Varî pezzi e due esemplari quasi intieri, uno dei quali manca dell'apice. — La specie si trova ancora presso di noi, ma è rarissima.

Columbella rustica Linné. Weinkauff, op. cit., p. 34.

Pochi esemplari presso scheletri di bambini. — È specie tuttora frequentissima sui nostri littorali.

Trochus (*Monodonta*) *turbinatus* Born. Weinkauff, op. cit., p. 353.

Moltissimi esemplari sparsi in tutta la grotta, specialmente presso le tombe. Alcuni sono rotti, come se fossero stati schiacciati con un sasso. — Questa specie servì probabilmente di cibo. — Comune nelle acque della Liguria.

Patella ferruginea Gmelin. Weinkauff, op. cit., p. 401.

Abbondantissima in ogni parte della caverna, specialmente sopra le tombe. — Assai comune anche attualmente.

Patella lusitanica Gmelin. Weinkauff, op. cit., p. 403.

Meno abbondante della precedente. — Non rara sulle spiaggie ligustiche.

Patella coerulea Linné. Weinkauff, op. cit., p. 404.

Alcuni esemplari. — Vive sulle nostre coste.

Queste tre specie di patelle, unitamente al *Trochus* suindicato, erano indubbiamente imbandite nei pasti funebri dei cavernicoli. Fra i molti gusci interi di patelle se ne trovano taluni rotti, come schiacciati sotto una pietra; in due l'apice sembra tolto col logoramento e di proposito deliberato.

Helix nemoralis Linné. *Syst. nat.*, ed. X p. 773.

Due esemplari, uno ornato di tre fascie e l'altro di quattro; la forma loro è quella della varietà che abbonda anche attualmente nel Finalese.

I gusci raccolti nella caverna non furono nè cotti nè rotti.

Helix aspersa Müller. *Verm. hist.*, II p. 59.

Ne raccolsi tre esemplari negli strati meno antichi della grotta. — È specie edule e si trova abbondantemente sulle nostre colline.

Helix obvoluta Müller. *Verm. hist.*, II p. 27.

Una conchiglia rotta, trovata a 50 centimetri di profondità. — Il mollusco visse probabilmente nella caverna. La specie non è infrequente in Liguria.

Helix Ramoriniana Issel. *Delle conchiglie raccolte nelle breccie e nelle caverne ossifere della Liguria occidentale*, p. 8, tav. I, fig. 7, 8 (1867).

Specie estinta, trovata per la prima volta nella caverna di Verezzi, presso le Arene candide, in una breccia ossifera evidentemente postpliocenica. L'*Helix Ramoriniana* appartiene al gruppo delle *Helix cingulata, glacialis, frigida, insubrica, Fontenilli, intermedia, phalerata,* tutte proprie alle *regioni montane* ed ai climi freschi o freddi. L'unica specie di questo gruppo ora vivente in Liguria è l'*Helix cingulata* che si trova sul colle di Nava, a circa 1000 metri d'altezza sul livello del mare.

Ne raccolsi un solo esemplare all'estremità orientale della grotta, alla profondità di 50 centimetri.

Cyclostoma elegans Draparnaud. *Tabl. des moll.*, p. 170 (1792).

Comune nella grotta, ove probabilmente la sua presenza è estranea all'azione dell'uomo. — Abbondante in Liguria. — Si trova pure in varî altri depositi fossiliferi quaternari e recenti.

Bulimus decollatus Linné. *Syst. nat.*, ed. X p. 773.

Due esemplari in buon stato di conservazione. — Specie vivente in Liguria e comune nel Finalese.

Ostrea plicata Chemnitz. Weinkauff, *Die Conchylien des Mittelmeeres*, I p. 276.

Poche valve. — È questa la comune ostrica edule della Liguria.

Spondylus gaederopus Linné. Weinkauff, op. cit., p. 269.

Molte valve trovate insieme alle patelle. — Comune in Liguria nelle acque profonde. — L'esame delle valve raccolte nella caverna mi lascia supporre che i cavernicoli le adoperassero a qualche uso domestico.

Pectunculus violacescens Lamarck. Payraudeau, *Cat. des moll. de Corse*, p. 63, tav. II, f. 1 (1826).

Un certo numero di valve, alcune delle quali coll'apice forato. — Vivente in Liguria, ma non nelle basse acque.

Pectunculus sp.

È rappresentato da una grossa valva assai trasversa e obliqua, fortemente striata alla superficie esterna. Si accosta molto a certi esemplari del *P. inflatus* Brocchi (*Arca inflata* Brocchi, *Conch. foss.*, II p. 494, Tav. XI, f. 7).

Arca Noae Linné. Weinkauff, op. cit., p. 190.

Alcune grosse valve, che, a parer mio, non sono residui di pasto. — Nei nostri mari è assai comune.

Mytilus edulis Linné. Weinkauff, op. cit., p. 224.

Don Perrando ne raccolse una grossa valva. — Vivente in Liguria.

Cardium tuberculatum Linné. Weinkauff, op. cit., p. 136.

Una valva coll'apice rotto. — È specie vivente nel mar di Genova.

Cardium edule Linné. Weinkauff, op. cit., p. 144.

Parecchie valve coll'apice bucato. — Si trova comunemente nelle nostre acque.

Condizioni fisiche del Finalese nell'epoca in cui si formava il deposito della caverna.

Secondo ogni probabilità, allorchè si effettuava il riempimento della caverna, il territorio di Finale doveva essere poco diverso da quello che apparisce nell'attualità, dal punto di vista della configurazione e del clima. Il lentissimo sollevamento, che si verifica sul nostro littorale fin dallo scorcio del periodo pliocenico, non aveva portato ancora alla presente loro altezza i monti finalesi; ma certo mancava loro assai poco perchè la raggiungessero. Le valli erano un po' meno profonde, imperocchè l'erosione delle alluvioni quaternarie non aveva potuto compiersi nella misura in cui si esercitò posteriormente. Le acque che scorrevano al mare pei numerosi rivi e torrenti di cui è solcato quel territorio erano assai più abbondanti e ciò si può argomentare dalla ampiezza delle valli e dei burroni che non è più in rapporto col volume dei corsi d'acqua che vi si accolgono. Gli Apennini liguri erano allora coperti di fitte boscaglie, le quali in parte si conservarono fino a tempi storici da noi poco lontani. Vestigia di tali antiche foreste, costituite prevalentemente d'abeti, di faggi, di querce, si ravvisano nei tronchi d'albero che abbondano in certi terreni detritici recenti, in molti punti della Liguria montana.

Sia per la vegetazione più abbondante, sia per altre cause dipendenti da fenomeni cosmici e geologici, il paese doveva essere più umido e più freddo che non attualmente. In prova di ciò si può addurre il ritrovamento nella caverna di una conchiglia terrestre di *tipo alpino* e di specie estinta. Questo rigore del clima non si mitigò che poco a poco, laonde Diodoro Siculo ed altri scrittori che fiorirono sotto il dominio romano, fanno menzione della Liguria come d' un paese bene spesso coperto di neve.

Industrie e costumi dei cavernicoli.

Descritti sommariamente gli oggetti estratti dalla caverna, mi sia concessa qualche induzione sui costumi e sulle condizioni sociali di coloro che in tempi remoti vi stabilirono la propria dimora e vi lasciarono le loro spoglie.

Premetto che, a mio giudizio, la grotta servì non solo ad uso di cimitero, ma anche a quello di abitazione, poichè l'adempimento di riti funebri non basta a spiegare l'accumulazione in quel breve spazio di tanti avanzi d'ogni maniera. Inoltre le pietre da macina, i macinelli, le accette di rifiuto, logore pel lungo uso, ivi raccolte a diversi livelli, nel terreno, sono segni evidenti d'una lunga permanenza.

Presso i popoli barbari i cadaveri non ispirano ribrezzo e repulsione come alla gente civile e raffinata, laonde non è improbabile che la stessa cavità fosse ad un tempo domicilio di vivi e di estinti.

Se però la grotta servì d'abitazione, credo che ciò non fu in modo continuo, ma saltuariamente e forse soltanto in alcune stagioni dell'anno. Il costume di ricoverarsi nei cavi delle roccie, d'altronde, si protrasse assai tardi nella nostra provincia, talchè Diodoro Siculo potè scrivere dei Liguri del suo tempo: « Costoro dormono la notte nelle campagne e assai di rado in alcune vili baracche o piccoli tugurî, e per lo più in rupi cave fatte dalla natura che possano offrir loro il comodo di tenerli al coperto. E in simil modo hanno tutte le altre cose tenendo appunto l'antico e misero modo di vita ([1]) ». Che i cavernicoli fossero essenzialmente cacciatori, ce lo attestano i denti di lupo e di cinghiale, di cui si fregiavano come ornamenti o come trofei, nonchè gli avanzi dei loro pasti, prevalentemente costituiti d'ossa di cervo, di capriolo, di cinghiale ecc. E nel dir cacciatori intendo anche guerrieri, poichè in seno alle società primitive, ove la lotta per l'esistenza ferve sotto ogni sua forma, aspra, incessante, inesorabile, non saprei immaginare una di queste qualità disgiunta dall'altra. Inoltre, alcune armi raccolte nella grotta sembrano più che altro arnesi guerreschi. Essi erano all'incontro poco esperti nell'arte d'insidiare i pesci, giacchè non una resta, non una lisca furono trovate fra i rimasugli dei loro pasti. Per altro solevano far incetta di testacei marini e specialmente di patelle e non sdegnavano sepie e ricci di mare. Con pari certezza si può asserire che esercitassero la pastorizia, poichè fra i residui si notano gli ossami di un porco, di un bue, di una pecora e di una capra che vivevano in domesticità. Essi, probabilmente, allorchè conducevano i loro armenti al pascolo, erano armati di tutto punto, pronti a respingere ogni assalto di uomini o di fiere, come oggi fanno i pastori etiopi sempre muniti d'asta e di scudo.

Quanto all'agricoltura, difettano prove dirette per asserire che fosse esercitata; ma il ritrovamento di parecchie pietre da macina accenna all'uso comune di qualche cereale o d'altra pianta che ne teneva luogo, il che difficilmente si concilia colla mancanza d'ogni coltivazione. Ad ogni modo costoro non potevano essere che tristi agricoltori.

Il cibo dei cavernicoli era prevalentemente animale e ciò si rileva dai residui dei loro pasti, costituiti principalmente d'ossa di pecora, di capra, di capriolo, di cervo, di cinghiale, di bue. Oltre a queste specie mangiavano anche all'occasione la lepre, il cane, il lupo e varî uccelli, tra i quali i tetrao e le pernici.

Si ha motivo di argomentare che sacrificassero gli animali domestici destinati ai loro pasti con un colpo di stromento tagliente assestato sulla sommità del cranio. Non risparmiavano gli agnelli ed i capretti ancora lattanti, i cui resti sono abbondanti nella caverna.

I piccoli mammiferi erano trasportati nella grotta e, dopo essere stati cotti e mangiati, le loro ossa rimanevano sul terreno, commiste agli avanzi dei focolari. I grossi mammiferi erano probabilmente uccisi e squartati fuori del sotterraneo, nel

([1]) *Biblioteca storica* di Diodoro Siculo volgarizzata dal cav. Compagnoni, II p. 358.

quale non si recavano che pezzi scelti fra i migliori, per farli cuocere e mangiarli. In fatti la caverna non ha somministrato indistintamente ogni specie d'ossa di buoi e di grossi cervi. Vi mancavano, per esempio, i cranî, le vertebre, i bacini e vi abbondavano all'incontro le coste, le mandibole e i frammenti di ossa lunghe.

I trogloditi spaccavano per lungo le diafisi dei ruminanti e dei suini e ne estraevano il midollo per cibarsene o per servirsene alla preparazione delle pelli. A quest'uopo le schiacciavano per mezzo d'un ciottolo o le percuotevano violentemente sopra una pietra tenendole strette da una estremità. Anche i cranî erano sempre aperti per estrarne il cervello. Finalmente le mezze mandibole inferiori solevano esser rotte alle due estremità, forse per cavarne la sostanza polposa che occupa le cavità alveolari. I residui dei pasti accumulati nella grotta erano abbandonati ai cani e poscia, insieme alle altre immondizie, rimanevano preda d'insetti sarcofagi e, putrefacendosi, infettavano l'aria.

Quanto alle loro industrie, erano affatto rudimentarî e per certi rapporti decisamente inferiori a quelle d'altri popoli che non conobbero i metalli. Mancava loro, a quanto pare, la perizia e la diligenza dei loro fratelli d'oltre Alpe nel lavorare l'osso e il corno e sopratutto l'ingenuo senso artistico proprio ai trogloditi dell'età del renne, in Francia, di cui ci rimangono immagini d'animali graffite o scolpite con mirabile verità.

Le loro stoviglie, non tornite e cotte senza l'aiuto del forno, sono per lo più assai rozze e destituite d'ornamenti. Di rado presentano semplici fregi formati di lineette spezzate o meandriformi, d'intaccature fatte col dito o coll'unghia, oppure di orli crenati e di manichi striati. I vasi, di forme goffe e ineleganti, non sono mai ingubbiati, ma qualche volta lisciati a spatola. L'argilla che serviva a fabbricare codesti fittili non era mai depurata e quasi sempre vi si univa a guisa di *tarso,* per accrescerne la resistenza alla cottura, un po' di rena quarzosa o serpentinosa. Gli utensili adoperati dai vasai non erano probabilmente che ciottoli e spatole.

Dalle conchiglie e dai denti artificialmente forati ad uso di monili, di cui già tenni discorso a suo tempo, si vede pure quanto i nostri trogloditi fossero inesperti nell'arte di ornarsi.

La fabbricazione delle armi e degli altri stromenti richiedeva in generale più esperienza ed accuratezza che non quella dei vasi. Le ascie si ottenevano, dopo lungo e paziente lavoro, logorando ciottoli scelti all'uopo sulla superficie di altre pietre. Il frammento di giadeite trovato dall'egregio sig. A. G. Barrili è parte d'un bellissimo anello, il quale non fu condotto a tanta perfezione se non superando le maggiori difficoltà, sia per la durezza della roccia, sia per la forma stessa dell'oggetto.

I signori Forel e Keller hanno dimostrato, d'altronde, come gli artefici dei tempi primitivi potessero forar la pietra più dura e tenace, applicando sulla stessa un cilindro cavo di legno, di corno o d'osso e facendolo ruotare rapidamente, avvertendo di collocare sulla pietra, a guisa di mordente, un po' di sabbia silicea umida.

Credo probabile che le accette e gli altri stromenti litici che si lavorarono colla levigatura fossero fabbricati nella caverna. Non così dei coltellini scheggiati, poichè non si incontrano colà i copiosi residui silicei che risultano immancabilmente da tal fabbricazione.

Gli oggetti raccolti nella caverna delle Arene candide non accennano, in generale, a relazioni con lontani paesi. Le conchiglie che i nostri trogloditi adoperavano per adornarsene o per qualunque altro uso sono tutte di specie mediterranee e provengono, almeno in gran parte, dalle nostre spiaggie. L'ocra gialla e rossa per tingersi, l'argilla di cui fabbricavano il vasellame sono estratti da giacimenti prossimi alla caverna. La selce dei coltellini e dei raschiatoi, se non s'incontra proprio nel Finalese, si trova però a poca distanza fra i monti di Sassello. Quanto alle dioriti, alle affaniti, alle anfiboliti che somministrano i materiali di cui son fabbricati quasi sempre le ascie e gli scalpelli sembrano ciottoli dei corsi d'acqua che scendono dal piovente settentrionale dell'Appennino ligure, come la Bormida, il Tanaro e l'Orba.

La provenienza della giadeite, bellissima pietra di color verde porro e un po' translucida, rappresentata nella collezione dei manufatti litici della caverna da due piccolissime accette e da un frammento di anello forato, è invece un mistero per noi, giacchè questa roccia, i cui caratteri sono così spiccati, non fu mai trovata in posto, non solo in Liguria, ma nemmeno nel resto d'Italia e in Europa. Non se ne conoscono autentici giacimenti che in alcune parti dell'Asia. Nella Cina essa tien luogo di saussurite in una specie d'eufotide diallagica.

Il ritrovamento degli accennati oggetti di giadeite significa forse che i trogloditi mantenevano relazioni di commercio con qualche terra asiatica? Non sarebbe invece un indizio che quella fosse per l'appunto la patria loro originaria?

L'antropologia preistorica non è ancora in grado di rispondere adeguatamente a siffatte domande.

Le accette di pietra levigata della caverna sono analoghe, così per la fattura come per la materia, a quelle che trovansi a poca profondità nel terreno in molti punti della Liguria montana e principalmente nelle alte valli delle due Bormide, nella valle del Tanaro, sui monti che circondano Sassello e nel Finalese [1]. Ivi la copia di tali oggetti sta ad indicare che vi esistevano piccoli centri di popolazione, coi quali probabilmente gli abitanti della grotta ebbero frequenti rapporti.

Riti funebri dei cavernicoli.

Essi seppellivano i loro morti a poca profondità e se si trovarono scheletri coperti di oltre due metri di terra, si è perchè dopo l'inumazione il suolo della grotta fu innalzato da successivi interrimenti. Alcuni scheletri erano deposti sulla roccia quasi nuda.

I sepolcri degli adulti erano difesi da lastroni di pietra greggia in numero di quattro, cinque, sei e perfino otto, i quali formavano, come dissi, una specie d'incassatura che per lo più era incompleta e riparava solamente il capo e il torace. Le tombe di bambini si lasciavano prive di tali pietre. I cadaveri erano abitualmente adagiati sul fianco sinistro, col cranio appoggiato sulla mano sinistra e le ginocchia alquanto piegate in guisa che talvolta si trovarono le tibie assai prossime alla cassa toracica.

(1) Molte di queste accette furono illustrate, insieme ad altri antichissimi manufatti, dal professore B. Gastaldi, nelle sue pregiate Memorie intitolate: *Iconografia di alcuni oggetti d'alta antichità rinvenuti in Italia* (Torino, 1869) e *Frammenti di Paleoetnologia italiana* (Roma, 1876).

Sembra che fossero tutti disposti perpendicolarmente all'asse maggiore della cavità, coi piedi volti verso l'esterno ([1]).

Presso il lato destro dei morti di sesso maschile si collocava un'accetta di pietra, il cui manico era probabilmente di legno, poichè se fosse stato d'altra materia meno alterabile, se ne sarebbe rinvenuto qualche avanzo. Lo stromento non si trovò mai situato in contatto della mano, ma ad una distanza di 20 a 30 centimetri che corrisponde appunto alla lunghezza del manico, di cui si suppone fosse munito. Presso il lato sinistro era deposto un vaso di terra cotta contenente pietra sanguigna. Tal sostanza, di cui i cavernicoli facevano uso indubbiamente per tingersi il corpo, era destinata ad ornare il defunto, acciocchè apparisse smagliante di rosso nel regno degli spiriti.

Gli estinti erano fregiati dei loro ornamenti ed insegne. Alcuni, forse guerrieri, portavano al collo zanne di cinghiale o denti di lupo, appositamente forati, altri conchiglie bucate.

Quasi in ogni tomba si raccolsero punteruoli d'osso, quali diligentemente lavorati, quali assai rozzi, cioè semplici cannoni di piccoli ruminanti appena aguzzati, arnesi che io considero parte come punte di freccie o di giavellotto, parte come aghi crinali e lesine.

Credo che non si deponessero ascie nè altra maniera d'armi nelle tombe delle femmine e dei bambini. In una delle prime raccolsi un coltellino di selce ed un raschietto della stessa pietra ed accanto alle ossa d'un tenero bambino trovai una scheggia di pietra verde translucida e varie conchiglie. Sole conchiglie e non di specie mangereccie trassi dal sepolcro di un altro morticino; ed ho per fermo che ivi le deponesse una madre pietosa nel comporre per l'ultimo sonno la salma del figliuolo, acciocchè non avessero a mancargli nella vita futura i suoi prediletti trastulli.

Nella terra che copriva le tombe abbondavano gusci di molluschi eduli, nonchè ossa di ruminanti per lo più cotte e spezzate; e sono indubbiamente i resti del banchetto funebre imbandito dai congiunti e dagli amici del defunto dopo, o forse anche durante, ciascuna inumazione. Due o tre volte osservai pure, presso un sepolcro, certe ossa di capriolo nell'ordine delle loro naturali connessioni, ond'io sospetto che ivi fosse stato deposto qualche pezzo di grossa selvaggina, a guisa di scorta per colui che imprendeva il gran viaggio.

Il fuoco destinato a cuocere il pasto sepolcrale era acceso verosimilmente sulla tomba stessa dell'estinto e talvolta così vicino al cadavere che questo ne rimaneva in parte abbruciato. Così si spiega, io credo, l'ustione di cui si scorgono le traccie sugli arti inferiori di alcuni scheletri, nonchè la calcinazione dei femori e delle tibie primamente scoperti, quando iniziai l'esplorazione della grotta.

Il sospetto da me altra volta manifestato che i trogloditi finalesi si abbandonassero all'antropofagia è destituito di fondamento.

([1]) Si è già avvertito che sotto gli scheletri, anzi sotto le lastre che formano la base delle tombe, si trovò quasi sempre uno strato di terra bianca. Questo sembra qualche volta un antico suolo della grotta, coperto di polvere calcarea caduta dalla volta (polvere simile a quella che tuttora si deposita nei punti più asciutti della spelonca). Ma non posso dissimulare che in altri casi l'abbondanza della terra bianca e l'irregolarità del deposito mi suggeriscono una ben diversa interpretazione; mi lasciano cioè supporre che fosse artificialmente introdotta in ciascun sepolcro, nel momento dell'inumazione.

Considerando gli strani costumi rivelati dall'esplorazione della grotta, non posso a meno di ricordare lo splendido *Nadowessiers Todtenlied* di Schiller, in cui sono poeticamente rappresentati i riti funebri d'una tribù selvaggia che visse nel territorio dell'Jowa, presso il confluente del S. Pietro col Mississipì [1].

L'uniformità che si verifica nelle condizioni delle sepolture, la scelta delle suppellettili pietosamente deposte in ciascuna, son prove palesi che i trogloditi delle Arene candide professavano il culto degli estinti e adempievano a misteriosi riti, certo poco diversi da quelli celebrati dagli odierni selvaggi, che infine la mente loro già s'innalzava al pensiero d'una vita futura. Laonde io concluderò, con parole tolte a prestito al mio illustre collega E. Celesia, dicendo che « Comunque niun oggetto apparente di culto od altro amuleto si rimanga ne'luoghi ove posero stanza, l'anima loro, commossa allo spettacolo della natura, dovea di necessità inchinarsi a quelle forze cosmiche contro cui aveano a lottare e a quell'ignota virtù che impartia loro la luce e la vita [2] ».

Caratteri fisici dei cavernicoli.

A quale schiatta si debbono ascrivere i cavernicoli delle Arene candide? Sono essi propriamente indigeni o provengono da altri paesi, da lontane regioni?

M'auguro che lo studio degli avanzi umani estratti dalla caverna ci porga il mezzo di risolvere con rigore scientifico gli ardui problemi cui alludono queste domande. Frattanto, quantunque io non abbia titolo di sorta per trattare una questione di pura antropologia, non so trattenermi dall'esporre in proposito le mie impressioni.

Se si confrontino i teschi degli scheletri da me raccolti con quelli dei popoli ora viventi in Italia non si può a meno di notare sensibili differenze, le quali diventano tanto più spiccate se il paragone si istituisca fra i cranî delle Arene candide, dolicocefali, angusti nella regione frontale, sviluppati posteriormente, e i cranî del così detto tipo ligure (ben conosciuti per la dotta illustrazione fattane da Giustiniano Nicolucci) che sono all'incontro rotondeggianti, alti, a fronte larga, a faccia ampia e spianata [3].

E caratteri differenziali del pari ben visibili emergono dal raffronto di altre ossa e particolarmente dei femori e degli omeri, i quali, negli scheletri finalesi, offrono particolarità notevolissime.

(1) Ecco le strofe più caratteristiche di questo canto, il quale in un caso consimile fu già citato da Lyell;

Bringet her die letzten Gaben,
Stimmt die Todtenklag'!
Alles sei mit ihm begraben,
Was ihn freuen mag.
Legt ihm unters Haupt die Beile,
Die er tapfer schwang,
Auch des Bären fette Keule,
Denn der Weg ist lang;

Auch das Messer, scharf geschliffen,
Das vom Feindeskopf
Rasch mit drei geschickten Griffen
Schälte Haut und Schopf.
Farben auch, den Leib zu malen
Steckt ihm in die Hand
Dass er röthlich möge strahlen
In der Seelen Land.

(2) E. Celesia, *Le teogonie dell'antica Liguria*. Atti del R. Istituto tecnico di Genova, 1868-69.

(3) Giustiniano Nicolucci, *La stirpe ligure in Italia nei tempi antichi e moderni*. Napoli, 1864.

D'altra parte, si può riconoscere anche a prima vista una stretta affinità fra i cranî dei nostri cavernicoli e quelli descritti dai sig. de Quatrefages e Hamy come appartenenti alla cosidetta razza di Cro-Magnon ([1]).

I tipi di questo gruppo etnico si trassero principalmente dalle grotte paleolitiche, di Cro-Magnon, di Solutré, di Laugerie, dei Balzi Rossi (presso Ventimiglia), di Engis, di Engihoul, ben note negli annali della paleontologia umana, nonchè dal ricovero (*abris*) di Lafaye a Bruniquel e dalle alluvioni antiche di Grenelle. Ma se ne hanno esempî di data assai meno antica nella grotta neolitica del *Homme mort* a saint Pierre des Tripier (Lozère), nelle alluvioni superiori di Grenelle, nel dolmen des Vignettes a Lery (Eure) e nel cimitero gallico di Chassemy (Aisne). Di più i caratteri craniologici della medesima razza si ripeterebbero anche al dì d'oggi presso alcuni popoli dell'Africa settentrionale.

Se l'accennata somiglianza veramente sussiste, il che a suo tempo sarà posto in chiaro, se ne dovrebbe concludere che i nostri trogloditi formassero parte d'una schiatta che fu largamente diffusa in Europa nei tempi preistorici, e che, non senza subire profonde modificazioni, si è ritirata in regioni assai più meridionali di quelle che occupava da principio. La ricerca della originaria provenienza di codesta razza si confonde coll'intricatissimo quesito delle origini europee, il quale nello stato attuale delle nostre cognizioni si può dire insolubile.

Intanto, qualunque sia il grado di lor parentela coi cavernicoli di Cro-Magnon e di Bruniquel, non è men certo che i nostri Finalesi son decisamente dolicocefali, e che per essi la dottrina dei brachicefali autoctoni di Esricht, Retzius e Nilsson subisce un nuovo crollo.

La statura degli scheletri d'adulti sembra in generale un po' inferiore alla media. Da varî indizî e sopratutto dalla scabrezza delle superficie d'attacco del tendine di Achille, del muscolo popliteo e del tibiale anteriore si può inferire che appartenessero a robusti camminatori, cui era abituale lo arrampicarsi fra i dirupi.

Essi d'altronde erano ben proporzionati ed esenti da quei morbi che sogliono deformare le ossa. Si deve avvertire tuttavolta che quasi tutti gli individui avevano i denti cariati.

Se poi, considerando quegli ossami calcinati dal tempo, ci facciamo ad immaginare quali fossero i fieri trogloditi, allorchè rosseggianti d'ocra, vestiti di pelli ferine, brandivano la terribile scure di pietra, affrontando orsi e lupi sulle aspre balze della Caprazoppa, la fantasia ce li raffigura magri, macilenti, colle chiome abbondanti ed incolte, la fronte bassa, gli zigomi salienti, il mento prominente, gli occhi infossati, e il volto improntato di selvaggia energia.

Antichità della stazione delle Arene candide.

Rimane ora a toccarsi uno dei punti più gravi ed importanti per la storia della caverna, rimane cioè a ricercarsi in qual periodo di tempo essa fu abitata e servì di sepolcro. Certo è che la massima parte dei manufatti ivi raccolti risale alla seconda

([1]) *Crania ethnica*, *Les cranes des races humaines*, 1re livraison pag. 44. Paris, 1873.

età della pietra o età *neolitica*. Ma questa espressione, come pure le altre di epoca *paleolitica*, di età del bronzo e di età del ferro, sono affatto convenzionali ed esprimono non già periodi cronologici ben definiti, ma piuttosto stadî successivi (non sempre necessarî) nello sviluppo dello spirito umano. Chi non sa che presso gli indigeni di alcune delle terre del Brasile, della Patagonia, della Papuasia, della Polinesia, della Nuova Zelanda è anche al dì d'oggi in pieno vigore l'età della pietra? Che l'Italia e la Grecia non conoscevano ancora l'uso del ferro, quando già la civiltà egiziana edificava le piramidi e i templi di Menfi? Però non senza ragione Paolo Lioy condanna tali espressioni che godono oggi di tanto favore e propone di sostituirle con quelle di *Litoplidi, Calcoplidi* e *Sideroplidi* (armati di pietra, di bronzo, di ferro) applicabili non più ai tempi, ma sibbene agli uomini [1].

Ciò premesso, nel caso speciale del Finalese, mi par probabile che lo stadio della pietra, mentre ebbe principio in tempi antichissimi, si continuò assai tardi e forse finchè i Liguri conservarono la loro indipendenza; perchè, come dissi, nello strato più superficiale della grotta, i prodotti della più schietta età neolitica si trovano commisti a manufatti propriamente romani. Posto che tale strato, della spessezza di mezzo metro, si sia formato dall'epoca della conquista romana fino ai nostri giorni, cioè in circa 20 secoli, saremmo condotti per analogia ad assegnare un'età sei volte maggiore agli strati più profondi. E per quanto concerne gli scheletri umani, siccome erano sottoposti a letti di terriccio stratificato di 50 centimetri, un metro, un metro e mezzo [2], dovremmo ascrivere loro, rispettivamente, un'antichità di 20, 40, 60 secoli.

Ma riflettendo che il continuo innalzarsi del suolo, laddove ciò accade per effetto di temporarie alluvioni, ha necessariamente per conseguenza di rallentare la sedimentazione e ad un certo punto d'impedirla, e tenendo conto dei dati cronologici che emergono dalla fauna fossile della caverna e dallo stato di conservazione delle ossa, è d'uopo argomentare che il computo ci trarrebbe a valori troppo elevati. A me parrebbe discostarmi meno dal vero dimezzando i 60 secoli e scemando d'un terzo i 40, ben si intende relativamente alle reliquie che giacevano sotto stratificazioni di un metro e un metro e mezzo di potenza.

Senonchè l'oscurità quasi completa nella quale ci troviamo, circa la legge che presiede all'accrescimento dei depositi della caverna e riguardo ai mutamenti avvenuti in sì lungo spazio di tempo, nelle condizioni fisiche della stessa, rende mal sicuri i criterî che servono di fondamento a queste induzioni e non ci consente di accogliere le cifre suesposte se non con ogni riserva e solo come un tentativo d'approssimazione.

---

[1] Paolo Lioy, *Le abitazioni lacustri*. Venezia, 1876.

[2] Uno degli scheletri fu trovato alla profondità di m. 2,20; ma ignoro qual fosse la spessezza della terra *intatta* e *stratificata* che lo ricopriva.

II.

CAVERNA DEL SANGUINETO O DELLA MATTA.

Questa si domandava altra volta, nel Finalese, *Arma del Sanguineto;* ma è piuttosto conosciuta sotto il nome di *grotta della Matta,* da che servì di rifugio ad una povera demente. Essa si apre sulla riva destra dell'Aquila ed è scavata in un calcare conchiglifero, probabilmente pliocenico.

La sua cavità principale richiama alla mente l'immagine d'un forno e misura nella maggior dimensione circa 22 metri e poco meno di 9 d'altezza. Vi si accede per un sentiero assai scosceso, il quale attraversa un arco naturale formato da un grosso masso che, scivolando dall'alto, rimase appoggiato al monte. Dalla parte di ponente siffatta cavità si continua in un'altra, assai più stretta e bassa, nella quale non si può penetrar che carponi.

Il suolo risulta di una terra grossolana, giallastra, sparsa di pietre, in cui, praticando scavi, s'incontrano zone di color più scuro, ceneri, ossa d'animali e cocci. Nella propaggine occidentale della grotta esso è coperto superficialmente di una spessa crosta stalagmitica. La terra giallastra fu riconosciuta in alcuni punti per oltre 2 metri di profondità.

Il primo ad imprendere ricerche scientifiche nella caverna della Matta fu il R. Don Perrando, il quale vi trovò oggetti di molto interesse che furono brevemente descritti in una sua Nota, presentata al Congresso preistorico di Bologna (¹), e sono ora visibili nella sua collezione privata a Sassello.

Dapprima, scandagliando il suolo della cavità principale, presso l'apertura, il nostro esploratore s'imbattè, alla profondità di 15 a 25 centimetri, in una cospicua massa di ceneri, poi, verso il mezzo della stessa cavità, nei resti di uno o di più focolari che contenevano, oltre alle ceneri, cocci, ossa spezzate e cotte, frammenti di calcare e di stalattiti, nonchè parecchi rozzi manufatti, cioè: punteruoli d'osso simili a taluni di quelli che già descrissi, una scheggia di silice, varî ciottoli levigati e certi pezzi di gneiss, logori sopra una delle loro faccie, che a me sembrano macine, e al raccoglitore pietre destinate ad ammollire e mondar le pelli. Proseguendo lo sterro verso l'apertura che mette in comunicazione i due scompartimenti della grotta, egli s'imbattè poscia in altri oggetti che portano le traccie della mano dell'uomo, tra i quali: pezzi di stoviglie, due rozze fusaruole di terracotta, un frammento osseo, un dente e due conchiglie artificialmente forati, per uso di pendagli o d'ornamenti. Ivi, penetrando cogli scavi più profondamente, gli venne fatto di scoprire, a circa un metro dalla superficie, sotto una spessa lastra di stalagmite, una mandibola di bambino e poco lungi, di contro ad uno scoglio sporgente, tre teschi umani, l'uno vicino all'altro. Uno di essi era posato, a quanto pare, sopra un vaso che conteneva materie organiche carbonizzate, nelle quali Don Perrando ravvisa residui di cibarie. Attorno e al di sotto di tali avanzi si raccolsero, nella terra mista di ceneri, altre ossa umane che sembrano aver subìto l'azione del fuoco e parecchi manufatti, cioè: due piccole

(¹) *Sur deux cavernes de la Ligurie.* Congrès international d'Anthropologie et d'Archéologie préhistoriques, compte-rendu de la cinquième session à Bologne (1871), p. 165.

ascie di pietra, un pezzo di vaso, un frammento d'osso sul quale son tracciati dei solchi, ed una spatola della medesima sostanza. Nel corso di queste indagini non si osservò alcuna traccia di metallo lavorato o adoperato dall'uomo.

Io visitai la caverna nell'agosto 1876, in compagnia del prof. Emanuele Celesia e dell'ing. Enrile e la trovai così sconvolta dalle anteriori investigazioni che mi parve non mettesse conto il tentarvi nuovi scavi sistematici. Tuttavolta feci assaggiare il terreno in varî punti della cavità principale e ne trassi un certo numero di ossa e di stoviglie. Le prime sono un radio ed una tibia d'un piccolo cervo ed alcune ossa di suino che si riferiscono parte al cinghiale comune, parte al porco domestico.

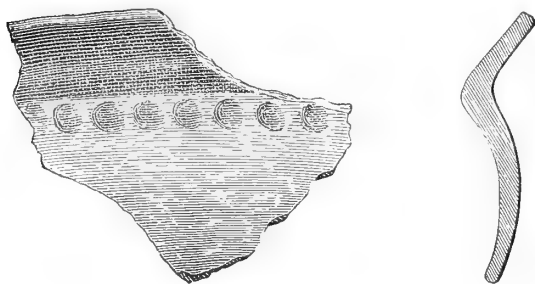
Quanto alle stoviglie, tutte foggiate senza il soccorso del torno e quasi sempre rozze e malcotte, appartengono a parecchi tipi fra loro molto diversi.

Tre cocci son resti di grosse pentole a manichi della forma più comune, e a pasta grossolana di color rossastro, contenente granelli quarzosi. Un altro coccio offre esempio di manico in forma di tubercolo ed è fatto coi medesimi materiali; alla superficie esterna di esso vedonsi chiaramente le impronte lasciate sulla pasta molle dalle dita dell'artefice. Merita poi di essere ricordato un certo frammento che presenta il margine piegato ad angolo, e faceva parte, secondo ogni probabilità, d'un vaso, la cui metà superiore era stretta e quadrangolare, e l'inferiore rotonda, ventricosa ed un po' carenata. Son venuto in siffatta opinione osservando un vaso di questa specie, quasi integro, raccolto nella stessa caverna dal R. D. Perrando. Già avvertii come un coccio consimile sia stato rinvenuto anche alle Arene candide. La pasta di tali stoviglie non è diversa da quelle delle altre già descritte.

Mi rimangono ancora a registrare due pezzi di terra cotta che appartengono a due vasi di forme non meno distinte. L'uno di questi era piccolo, subsferico e munito di un labbro verticale poco elevato. Esso aveva il margine semplice, portava uno o più manichi della solita fattura, ma piccolissimi ed era foggiato di pasta assai fina, rossastra, esternamente lisciata a spatola, con tanta cura da parer ingubbiata.

Fig. 4.

Pezzo di vaso — ½ della grand. nat.

(R. Museo preistorico di Roma).

L'altro coccio, di pasta nerastra ben cotta, ma grossolana, sembra parte di un vaso di mediocri dimensioni, il quale era in basso rotondeggiante e superiormente provvisto di labbro assai svasato, dell'altezza di 2 centimetri; nella parte del coccio che corrisponde alla base di questo labbro si osserva un fregio formato di una fila di piccoli incavi equidistanti che doveva girare attorno al vaso (fig. 4). Tali incavi sono evidentemente ottenuti colla pressione delle dita ed in ciascuno vedesi un solco in forma di V molto aperto, lasciato da un'unghia lunga e tagliente ([1]).

([1]) A proposito di queste impressioni noterò pure come sembrano fatte da dita assai piccole, il che può lasciar supporre che presso i cavernicoli la cura di fabbricar le stoviglie fosse affidata alle donne o ai fanciulli.

Gli oggetti d'antica industria raccolti in questa caverna dal R. D. Perrando e da me sono parte somigliantissimi, parte identici a quelli rinvenuti negli strati medî e profondi delle Arene candide, per cui si deve argomentare che risalgano alla medesima età. Nè dall'esame dei resti organici raccolti nelle due caverne si potrebbe giungere a diversa conclusione.

Sussiste però una differenza notevole tra il deposito archeologico dell'Arma del Sanguineto e quello delle Arene candide, inquantochè nel primo mancano i frammenti di stoviglie ed altri avanzi d'una industria comparativamente molto innoltrata che abbondano nel secondo (almeno nella parte più superficiale di esso).

Oltre a ciò, credo che la destinazione delle due grotte non fu sempre identica; quella delle Arene candide servì alternativamente e forse anche contemporaneamente di abitazione e di sepolcro; l'Arma del Sanguineto, a mio giudizio, fu solamente una tomba. I tre cranî e le altre ossa umane scoperte da D. Perrando non sono altro infatti che reliquie di tre cadaveri sepolti, con armi e supellettili, precisamente come i venti che giacevano nel suolo delle Arene candide. Ma questi quando furono disseppelliti si trovarono quasi tutti nella loro posizione naturale, mentre gli scheletri dell'Arma del Sanguineto soggiacquero evidentemente a qualche movimento del terreno o ad altro accidente che ne scompigliò le ossa.

Il deposito delle Arene candide è ovunque essenzialmente organico, dirò di più, *umano* ed attesta una lunga dimora dell'uomo. Nella principale cavità del Sanguineto il terreno è quasi privo di cocci e di avanzi organici, tranne in alcuni punti, ove rimangono residui di piccoli focolari, ed anche qui sono assai scarsi. Tra questi, d'altronde, non un solo *utensile,* non un arnese di rifiuto, simile a quelli descritti nella prima parte della mia Memoria. È dunque probabile che quanto si trova nella grotta vi sia stato deposto in occasione di riti funebri.

III.

CAVERNA DI POLLERA.

La caverna di Pollera o di Pian Marino, in vernacolo *Arma di Pollera*, si apre in una collina poco elevata, presso la quale è eretta la cappella di s. Carlo, sulla via che da Calice mette a Feglino. Da Finalborgo alla caverna si può giungere agevolmente in due ore di strada.

Mediante un'ampia apertura quadrangolare si penetra nella cavità più esterna della grotta, la quale ha il suolo pianeggiante e misura 40 metri di lunghezza, 15 di larghezza e poco meno di altitudine. Entrando appena in questa cavità, si trova tosto sul lato destro un vano irregolare, dal quale si scende per ripidissimo declive in un tenebroso baratro, così esteso che vi potrebbe capire una delle nostre maggiori cattedrali. La luce delle fiaccole, che il visitatore suol recar seco si perde in quell'immensità e non permette di apprezzare la straordinaria altezza della volta e la profondità degli androni. Le sue pareti tagliate a picco, ora nude, ora vestite di

panneggiamenti lapidei, i suoi umidi e scoscesi dirupi, i suoi massi accatastati e crollanti offrono ad ogni pie' sospinto aspetti nuovi e bizzarri.

Le pareti e la volta sono costituite del solito calcare pliocenico, il quale è qui arenaceo ed assai facile a disgregarsi, epperò credo che la caverna ebbe origine od almeno acquistò le sue dimensioni presenti pel disfacimento di questo materiale, operato dalle acque correnti.

Il suolo, assai inclinato e disuguale, è generalmente coperto di uno strato più o meno spesso di guano di pipistrello, fetidissimo e lubrico, da cui s'innalzano migliaia di moscerini. Nella parte inferiore della grotta, scorre con lieve mormorio un piccolo corso d'acqua, sopra un letto di ghiaie e di sabbie. Nel fondo della prima camera cioè di contro all'ingresso principale, mette capo un' altra spelonca più piccola, che merita di essere segnalata per la copia e la bellezza delle sue stalattiti e stalagmiti.

Anche la caverna di Pollera fu per la prima volta visitata con intenti scientifici dal R. D. Perrando, le cui investigazioni sortirono risultati migliori nel tratto compreso tra la camera esterna e la china per la quale si scende alla cavità principale. Ivi, appie' di un immane scoglio che minacciava rovina, il suolo fu scavato per più di tre metri e si misero così in evidenza varie stratificazioni contenenti resti dell'uomo e della sua industria; una delle superiori fornì tre pezzi di un cranio umano, una mandibola inferiore di iena, varie ossa di cinghiale e due pezzi di pietra appianati sopra una delle loro superficie. Da uno strato più profondo si trassero una scure di pietra verde e parte d'un altro strumento consimile.

Gli scavi posteriormente eseguiti nella grotta, alla mia presenza e col concorso del comm. Celesia, del sig. Boiga e di altre gentili persone, che prendevano il più vivo interesse alle mie ricerche, ebbero principalmente per oggetto di scandagliare il terreno, per verificare se per avventura non sarebbe stato utile di tentare un' esplorazione completa e sistematica del sotterraneo.

Le fosse più o meno profonde, praticate in cinque o sei punti della prima camera, nella quale mi pareva fosse più probabile la scoperta di antichi focolari o di tombe, diedero a conoscere che il terreno è quasi in ogni parte formato di terra nerastra, oscuramente stratificata e mista di pietruzze, con rare ossa infrante e cocci di antichi fittili. In mezza giornata di lavoro i tre uomini addetti agli scavi non riuscirono ad estrarre più di una ventina di pezzi degni di essere conservati.

Nella estremità della parte media della cavità, si trovò, ad un metro e 20 cent. di profondità, una piccola scheggia di piromaca giallastra, irregolarmente triangolare, forse un frammento di cuspide ad alette, ed è l'unico manufatto raccolto oltre ai frammenti di stoviglie. Questi sono avanzi di vasi non dissimili per la forma e la materia dai tipi più frequenti nella caverna delle Arene candide. Alcuni sono gli abituali manichi di pentola (*auricula pertusa*) di fattura assai rozza; altri son pezzi di vasi, di pasta fina e nerastra, a pareti sottili, a labbra lievemente svasate, a margini semplici, a fondo pianeggiante, ignoro se con manichi o senza; per lo più tali frammenti sono lucidati a spatola. Un terzo tipo è presentato da certi grossi cocci che offrono all' esterno un cordone in rilievo ornato di piccole cavità equidistanti, ottenute colla pressione della dita sulla pasta molle e sono avanzi

di pentole cilindriche, di grandi dimensioni, dalle pareti spesse e dalla pasta grossolana e mal cotta (fig. 5). Finalmente son da osservarsi un pezzo di vaso assai spesso a grosso cordone in rilievo, parallelo al margine, ma senza impressioni digitali, ed un coccio di scodella a fondo piatto e a pareti assai svasate. Di metallo non si rinvenne indizio alcuno.

Fig. 5.
Coccio di terra cotta
$\frac{1}{4}$ della grandezza naturale
(R. Museo preistorico di Roma)

Fra le ossa da me trovate nella grotta è compreso un pezzo di parietale sinistro umano (in cui si osservano parte dei margini destro e posteriore), il quale fu estratto a piccola profondità, presso l'apertura maggiore, unitamente a rimasugli di stoviglie non tornite.

I resti di bruti si riferiscono ai generi *Bos*, *Cervus* e *Sus* e sono precipuamente mandibole ed ossa lunghe, ma ridotte per lo più a frammenti di difficile determinazione (1).

IV.

CAVERNA DELLA ROCCA DI PERTI.

Questa grotta fu esplorata per la prima volta dal prof. Emanuele Celesia, in compagnia del sig. Giuseppe Boiga e dell'ing. Enrile. Essa è scavata nella così detta Costa del Curletto, sotto il monte Rocca di Perti, in cui s'interna per ben 100 metri, e si apre all'esterno a circa 300 metri sul livello del mare, per una sola apertura che misura presso a poco 6 metri di altezza ed altrettanti di lunghezza; tutto ciò, secondo le notizie datemi a viva voce dallo stesso prof. Celesia e pubblicate di poi nel giornale il *Diritto* (2). Il medesimo esploratore, avendo pur praticato qualche scavo nel suolo della caverna, vi scoperse alcuni avanzi d'industria umana, ossa di mammiferi e conchiglie e me li confidò acciocchè li esaminassi e li unissi alla collezione da me fatta nel Finalese, per conto del Ministero dell'Istruzione e a vantaggio del nuovo Museo preistorico di Roma.

Mentre mi professo gratissimo all'amico per l'interessante comunicazione, mi accingo a render conto brevemente delle mie osservazioni intorno agli oggetti raccolti.

Alcuni manufatti della grotta sono cocci di stoviglie. Uno di questi si distingue a tutta prima dagli altri pel suo color nerastro, per la sua lucentezza semimetallica e per certi solchi sottili, paralleli, equidistanti di cui è coperta la sua superficie interna, i quali furono certamente ottenuti col torno; la sua pasta è nera, omogenea e, sottoposta al saggio chimico, apparve costituita di pura grafite. Tanto basta per asserire che si tratta d'un pezzo di crogiuolo di data recentissima, analogo a quelli che servono tuttora alla fusione dei metalli preziosi. Il ritrovamento di siffatto coccio è indizio, se non prova, che la grotta servì di officina e di nascondiglio a falsi

(1) Il *Cervus* è indubbiamente l'*elaphus*.
(2) Paleontologia. Caverne ossifere della Liguria. *Il Diritto*, 1876, n. 353.

monetarî. Un altro coccio, cioè un frammento d'ansa, sia per la qualità della pasta, sia per la sua forma, non può considerarsi che come un resto di anfora romana.

All'arte cosidetta preistorica appartengono invece, senza dubbio, alcuni resti di vasi non torniti e mal cotti, la cui pasta assai grossolana è mista di sassolini. Il più notevole di questi frammenti è di color bruno, lisciato a spatola e presenta un grosso cordone in rilievo, ornato di impressioni equidistanti, ottenute premendo col dito la pasta ancora molle. Un altro vuol essere qui rammentato, perchè porta un piccolo manico riferibile al tipo solito delle caverne ligustiche; un terzo poi è un pezzo di fondo pianeggiante, cui va unita parte della parete.

In fatto di strumenti litici, non mi fu comunicato che un rozzo coltellino di arenaria a grana finissima, lungo 63 millimetri e largo 18, di sezione triangolare, appuntato ad una estremità e troncato all'altra. I due tagli di questo arnese sembrano un po' logorati dall'uso.

Fra gli oggetti raccolti dal comm. Celesia, sono poi compresi due piccoli ciottoli di spiaggia marina che probabilmente furono recati nella grotta per mano dell'uomo.

La fauna della caverna è rappresentata, nella raccolta sottoposta al mio esame, dai seguenti pezzi:

1. Parte d'un radio sinistro d'un grossissimo orso, probabilmente dell'*Ursus spelaeus*.
2. Parte d'una vertebra dorsale d'un orso più piccolo.
3. Un epistrofeo di ruminante (verosimilmente di cervo), sul quale si vedono incisioni trasversali, praticate da uno stromento da taglio.
4. Due valve di *Donax trunculus*, mollusco edule abbondante in tutti i bassi fondi arenosi del Mediterraneo.

Da quanto precede si può arguire che la caverna della Rocca di Perti, al pari di altre in Liguria, fu abitata o almeno visitata dall'uomo in diverse epoche e che il suolo della stessa ebbe a subire qualche artificiale sconvolgimento, in virtù del quale si trovano ora commisti oggetti di remota antichità ed altri comparativamente recenti.

Siffatte indagini, comunque poco estese, danno chiara prova che una completa esplorazione dell'Arma della Rocca di Perti offrirebbe un'ampia messe di oggetti pertinenti alla Paleontologia e all'Archeologia preistorica e pertanto m'auguro che il prof. Celesia non voglia arrestarsi in sì buon punto.

V.

CAVERNA DELLE FATE.

Posizione, estensione e contenuto della Caverna.

Questa è scavata nel Bricco di Peagna, sulla riva sinistra del Rio dei Ponci, proprio di contro al ponte romano di Verzi, e mette all'esterno per due aperture, l'inferiore delle quali è situata a forse 100 metri sul livello del torrente [1]. Essa

[1] Si tratta di una misura *a occhio* e quindi approssimativa.

dista due ore di buon cammino da Final Pia, un'ora appena da Calvisio e pochi momenti dall'alpestre borgo di Manie.

L' accesso della grotta è piuttosto facile, ma le sue due aperture principali, essendo occultate da folti cespugli, riesce malagevole il rintracciarle senza l' aiuto d'una guida.

Il primo a visitar la grotta fu, a mia cognizione, l'amico mio capitano Enrico d'Albertis, il quale vi penetrò dapprima solo, indi in compagnia dei signori Brown e Brooke e più recentemente, l'8 novembre 1876, vi ritornò seguito dagli stessi esploratori e dallo scrivente. Quest' anno mio fratello Alberto e in ultimo il R. D. Perrando, per mia istigazione, perlustrarono di nuovo la caverna e vi fecero alcuni scavi.

In ciascuna di queste gite si raccolsero, alla superficie del sotterraneo e più o meno profondamente nella terra che ne occupa le anfrattuosità, avanzi di mammiferi in grandissima parte riferibili al genere *Ursus*.

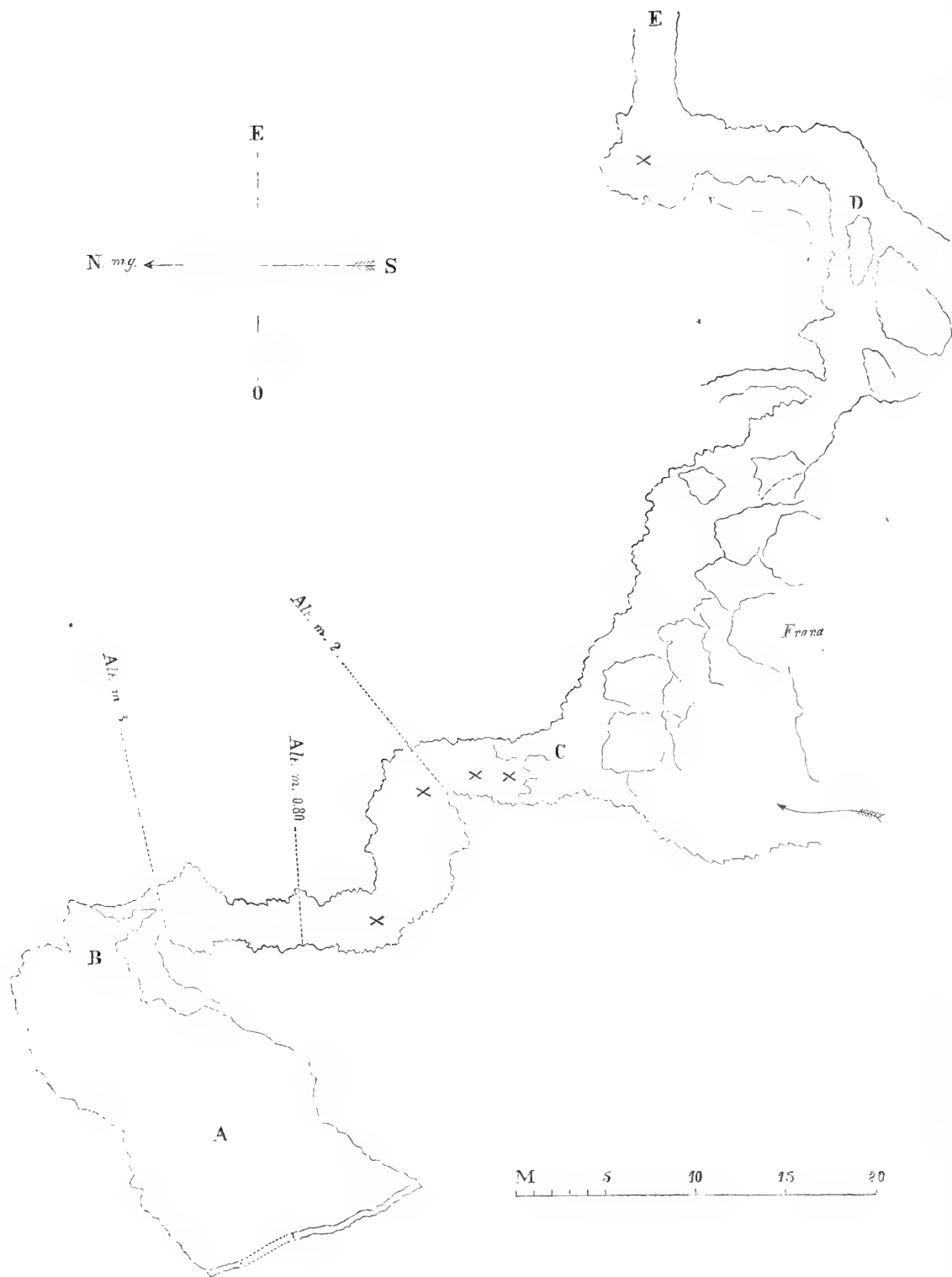
Il Bricco di Peagna, come quasi tutti i monti del Finalese, risulta alla parte inferiore di calcare assai antico, destituito di fossili e superiormente da una formazione pliocenica assai svariata nei suoi aspetti. La grotta è scavata in quest'ultima che ivi assume i caratteri di un conglomerato a grossi elementi.

L'apertura inferiore, fra le due suaccennate, è di forma semicircolare ed amplissima e fu chiusa parzialmente mediante un muricciuolo a secco, acciocchè potesse servire ad uso di ovile.

La prima cavità che s' incontra in A B (fig. 6) è larga in media 12 metri e profonda 20. A circa 2 metri d'altezza, sopra l'attuale livello del suolo, si vedono aderenti alle pareti i resti di un sepimento stalattitico, in cui sono incastonati denti d' orso e cocci di stoviglie; ciò in conseguenza di uno sterro artificiale, eseguito probabilmente all'epoca in cui fu edificato il muricciuolo. I denti d'orso e i cocci significano, come dimostrerò in seguito, che la grotta servì successivamente di covo alle belve e di dimora all'uomo.

In fondo a questo vestibolo, la parete che guarda il mezzogiorno offre una specie di scaglione, alto circa 2 metri sul suolo circostante, al di sopra del quale sbocca un angustissimo e tortuoso cunicolo, diretto presso a poco verso sud-est. Il primo tratto di esso, che misura circa 15 metri di lunghezza, si percorre carponi, poscia la volta stalattitica si innalza e le pareti si allontanano, talchè si può proseguire per altri 15 m. senza chinar la testa. Procedendo poscia nella medesima direzione, si penetra in una seconda trafila costituita da una cavità originariamente assai ampia, ora in gran parte ostruita da centinaia di grossi massi, attraverso i quali trapela in qualche punto la luce esterna. Oltre la frana la cavità si biforca: da un lato si continua in un angusto corridoio che volge prima a settentrione, poi a levante e infine sbocca in una serie di grandi spelonche ricche di stalattiti; dall'altro mette in un passaggio, il quale, piegando a ponente fra i massi dirupati, conduce finalmente all' esterno.

FIG. 6.

Pianta della caverna delle Fate (da un rilievo approssimativo del cap. D'Albertis).

Il suolo della grotta è ovunque assai ineguale e risulta di una terra grossolana, rossiccia, mista di massi angolosi, coperti in qualche punto di concrezioni stalattitiche.

Fra C e D (fig. 6), vale a dire nel tratto in cui avvenne lo scoscendimento, le ossa scarseggiano. Il punto estremo verso levante ove s'incontrano ancora è l'angolo formato dal corridoio D E. Le ossa giacenti nella caverna sono generalmente rotte, ma non molto alterate chimicamente; in molte si osservano segni di logoramento, nelle estremità articolari e talvolta le epifisi loro sono, per effetto del logoramento, quasi scomparse. Peraltro, stante l'abbondanza di tali fossili, non fu difficile di raccoglierne un buon numero d'interi e perfetti, massime fra i piccoli esemplari. Il loro colore è d'un giallo traente al bruno o al rossiccio e talvolta sono inquinati superficialmente da incrostazioni terrose e macchie carboniose. Essi allappano un poco alla lingua, ma questo carattere, al pari di altre particolarità dipendenti dal maggior o minor grado di freschezza, è assai variabile tra i diversi esemplari.

Le ossa raccolte dai miei amici e da me nella caverna delle Fate sono in numero di circa 450 ed appartengono a mammiferi di ogni età, dal poppante al vecchissimo (1). Sei di esse si riferiscono al genere *Felis*, due al genere *Cervus* e le altre senza eccezione sono avanzi d'orso.

Avanzi di Felini.

Tra le ossa di felini un esemplare assai caratteristico appartiene al *Felis spelaea* o leone delle caverne, gli altri cinque spettano al *Felis antiqua*.

Il primo è un grosso pezzo di mandibola inferiore, in cui si conserva quasi tutta la parte media dell'osso, col ferino e l'ultimo premolare in posto. Esso corrisponde per la forma e per le dimensioni all'esemplare figurato da Schmerling, nella sua classica opera sulle ossa fossili della provincia di Liegi (Vol. II, tav. XIV, fig. 11), senonchè il nostro fossile ha la dentatura un po' più robusta.

Il premolare, dalla base larga, dalla corona tricuspidale, il ferino, diviso in due lobi alti, compressi, a margini taglienti, trattandosi di un animale di mole così cospicua, non possono lasciar ombra di dubbio sulla identificazione del fossile. Dal confronto del pezzo ora descritto coll'osso omologo d'un leone adulto, risulta che il primo è comparativamente più robusto, più grosso e sopratutto più alto; il premolare vi apparisce più largo e più alto, il ferino offre tra i suoi lobi un angolo più aperto che è di 110°. V'ha tuttavia molta affinità (2).

Reco qui appresso le misure di questo fossile, suscettibili di presentare qualche interesse:

(1) In questo numero si tien nota dei denti e dei frammenti ossei determinabili.

(2) Il confronto fu fatto con due teschi di leoni d'Abissinia, posseduti dal Museo civico di Genova, e con un cranio della stessa specie e di località ignota, appartenente al Museo zoologico di questa R. Università.

Altezza della mandibola sotto il ferino	millim. 55
Altezza della mandibola sotto il premolare	» 57
Spessezza massima della mandibola sotto il ferino	» 26
Altezza della corona del premolare	» 17
Lunghezza del medesimo	» 29
Larghezza massima del medesimo	» 15
Altezza della corona del ferino	» 22
Lunghezza del medesimo	» 30
Larghezza massima del medesimo	» 16

Le ossa di *Felis antiqua* sono: una parte di mascellare superiore destro, con un dente in posto, due mezze mandibole inferiori, ciascuna delle quali è armata del proprio ferino e dell'ultimo premolare, e due atlanti.

Nel primo pezzo il dente superstite è il secondo premolare, cui manca una porzione della corona (Tav. IV. fig. 1). L'alveolo del primo premolare è obliterato, quello del canino non ha di notevole che la sua ampiezza e la direzione prossima alla orizzontale. La mandibola inferiore destra è quasi completa, ma un po' sbocconcellata all'estremità posteriore. Del suo canino non rimane che la radice, grossa e profonda; il secondo premolare e il molare (ferino) sono perfettamente conservati (Tav. IV, fig. 3).

L'altra mezza mandibola manca dell'estremità anteriore ed è un po' guasta posteriormente; i due denti che vi rimangono, cioè il secondo premolare e il ferino, sono assai logori e smussati per vecchiaia.

A tutta prima si può avvertire che questi avanzi non possono appartenere al leone delle caverne, perchè sono troppo piccoli e relativamente poco robusti. Offrono invece la più stretta somiglianza colle ossa omologhe della pantera e corrispondono perfettamente alle descrizioni e alle figure del *F. antiqua* che si considera da taluni come il rappresentante fossile del vivente *F. pardus* [1].

Istituito il confronto fra le mezze mandibole della grotta delle Fate e quelle d'una grossa pantera d'Abissinia che figura nella collezione del Museo civico di Genova, le prime appariscono un po' più grandi e più forti; il corpo loro è comparativamente più alto e un po' più convesso nel margine inferiore, i denti sono in proporzione più spessi, è un po' maggiore la distanza fra l'apofisi coronoide e il ferino e finalmente l'incavatura alla parte posteriore della mascella, sulla faccia esterna di essa, sembra alquanto più profonda. Tali differenze, peraltro, son così lievi che non bastano ad escludere i dubbî affacciati riguardo alla legittimità del *F. antiqua*, per dissipare i quali sarebbe necessario paragonar fra loro scheletri completi dei due tipi; ma ciò essendo impossibile, il miglior partito mi sembra per ora quello di conservar provvisoriamente, nella nomenclatura, il *F. antiqua*.

[1] Si veda in proposito: Gervais, *Recherches sur l'ancienneté de l'homme et la période quaternaire*, pag. 67, tav. XIII. Paris, 1867. — Hamy, *Précis de Paléontologie humaine*, pag. 172. Paris, 1870.— Lartet, *Carnassiers et Rhinocéros fossiles du midi de la France*. Annales des sciences naturelles, vol. VIII, pag. 170.

Questa specie fu segnalata da Falconer e Busk presso Gibilterra (nella grotta di Genista) da Marcel de Serres, Dubreuil e Jeanjean a Lunel-Vieil, da Gervais a Mialet, da Fontan nella grotta superiore di Massat. È probabilmente la medesima di cui Bourguignat scoprì alcune ossa nella caverna di Mars, presso Saint-Cézaire, (Alpi marittime) e che Lartet descrisse col nome di *Felis leopardus fossilis,* seguìto da un punto d' interrogazione.

Quanto al gran *Felis* delle caverne, la sua distribuzione geografica era invero estesissima, giacchè fu segnalato nelle località di Clermont-sur-Ariège, Ver, Grenelle, Rigabe, Lherm, Lunel-Vieil, Mialet, Aurignac, Les Eyzies, Echenos, Nizza (Francia), Goffontaine, Montfat (Belgio), Gaylenreuth, Sundwich, Bauman, Scharrfeld (Germania), Kirkdale, Kent's-Hole, Oreston, Gower, Wokey (Inghilterra). Nelle tre prime località si trovò in depositi alluvionali, nelle altre in grotte o spaccature.

Seguono le dimensioni della mezza mandibola destra di *Felis antiqua*:

Distanza fra l'alveolo del canino e l'estremità dell'apofisi coronoide.	millim.	127
Distanza fra l' alveolo del ferino e l'estremità dell'apofisi coronoide .	»	58
Distanza fra l'alveolo del canino e quello del secondo premolare . .	»	32
Altezza della mandibola sulla perpendicolare abbassata dalla estremità dell'apofisi coronoide	»	63
Spessezza massima del corpo dell'osso, misurata sotto il premolare. .	»	19
Larghezza della corona del ferino	»	22
Altezza della medesima	»	15

Avanzi d'Orso.

Le ossa e i denti d'orso raccolti nella caverna rappresentano almeno 26 individui dei due sessi e d'ogni età, i quali si riferiscono quasi tutti ad una varietà dell'*Ursus spelaeus.* Alcuni avanzi, per verità poco caratteristici, accennano ad un'altra forma, più rara, un po' diversa.

Cranî. Uno dei due cranî raccolti spetta evidentemente ad un individuo che può già dirsi adulto, quantunque non abbia raggiunto tutto lo sviluppo di cui era suscettibile. Infatti le sue suture sono saldate, la dentizione è completa; ma le ossa sono ancora sottili e le creste craniensi poco estese. L'altro, all' incontro, appartiene decisamente ad un giovane. Il primo adunque si presta assai meglio alle osservazioni ed ai confronti che possono condurre alla determinazione della specie.

Questo cranio, che ha le dimensioni dei maggiori dell'orso ordinario, non arriva a quelle che abitualmente raggiungono i teschî d'*U. spelaeus* (Tav. V, fig. 1, 2).

In confronto del primo, la sua scatola craniense è più alta ed anche *un po' più ristretta*, come strozzata nella parte mediana, quantunque in complesso possa dirsi più ampia; la sua fronte è al di sopra *convessa* e all' innanzi più prominente, presentando inoltre due gobbe frontali sufficientemente distinte. La cresta sagittale [1]

[1] Per evitare le circonlocuzioni attribuisco alle creste il nome delle suture cui corrispondono.

è nel nostro fossile meno alta che nell' *arctos* adulto, massime alla parte posteriore, ma si avanza anteriormente più che non faccia in questa specie; la cresta lambdoidea è più spessa ed insieme meno sviluppata, meno elevata alla parte media e non tanto sinuosa. L'osso occipitale è più ristretto e meno inclinato dall'indietro in avanti; il foro occipitale è più ampio, i condili offrono maggiore sviluppo e solidità.

Le orbite sono più ampie nel cranio fossile che nel fresco e di forma diversa; nel primo il margine anteriore del frontale è quasi piegato ad angolo e perciò le occhiaie assumono in esso una forma subquadrata caratteristica che non hanno nel secondo. Il muso sembra un po' più lungo che nell'*arctos*; ed apparisce tale, quantunque il fossile sia un po' mutilato all'estremità anteriore. Le due serie dei molari nel cranio del Finalese sono *più lontane* e più *convergenti in avanti* che non nel cranio dell' orso vivente; i canini sono più robusti; il ferino ha il lobo anteriore più sollevato e il tallone meno sviluppato; l'ultimo molare, in proporzione più lungo, *non è contratto posteriormente*; lo spazio fra i ferini e i canini è assai maggiore.

L' orso delle Fate ha la scatola craniense comparativamente assai più ampia, meno alta e molto meno strozzata nel mezzo di quella dell' *Ursus spelaeus* tipico; la sua cresta sagittale è assai meno lunga (circa della metà) e più bassa e si suddivide anteriormente in due rilievi che poco innanzi svaniscono. Mentre nell' orso delle caverne la cresta suddetta raggiunge talvolta $^2/_3$ della lunghezza totale del cranio prima di dividersi, nel mio fossile non arriva che ad un $^1/_3$ di tal lunghezza (1).

La cresta lambdoidea, assai poco sviluppata e leggermente sinuosa, presenta, veduta di prospetto, un *angolo ottuso*; quella dell'*U. spelaeus* tipico, oltre ad essere più estesa e sinuosa, offre invece un *angolo acuto*. Nell'ultima forma l'occipitale è più inclinato e i condili dell'occipite sono più robusti e salienti.

Nel mio fossile, inoltre, la regione anteriore del cranio è meno rigonfia, le gobbe frontali sono *meno prominenti*, la regione interfrontale *meno incavata*, le arcate zigomatiche non sono tanto protratte (2), il muso è meno largo anteriormente, la base del cranio è più larga, specialmente alla parte mediana. Estendendo il confronto ai denti del mascellare superiore, l'ultimo e il penultimo molare si mostrano un po' più brevi e i canini meno robusti.

Il cranio n. 2 non ha le suture ossificate e però, come dissi, spetta evidentemente ad un individuo giovane. Esso conserva tuttavolta i caratteri generali del n. 1, da cui differisce perchè è comparativamente un po' più allungato e sottile, perchè ha la fronte meno prominente e per certe particolarità delle creste sagittali e lambdoidea: la prima è più elevata, un po' sinuosa ed accenna alla parte anteriore (verso la sutura

(1) È probabile che alcune di tali differenze dipendano, almeno in parte, dalla diversa età degli esemplari confrontati. Il cranio che mi servì di termine di paragone appartiene infatti ad un individuo assai vecchio. Questo cranio proviene da una grotta dei Pirenei e forma parte della raccolta del Museo civico di Genova

(2) Tali arcate non sussistono più che in parte. Tuttavia, da quanto rimane si può scorgere l'accennata differenza.

fronto-parietale) ad una biforcazione, si continua, cioè, in due lievissimi rilievi che finiscono al di sopra dell'orbita corrispondente; la cresta lambdoidea è sottile, ondulata, e poco elevata. Il punto ove convergono le due creste, anzi le tre, contando anche l'occipitale, breve e poco sentita, offre un ingrossamento, il quale è portato alquanto all'indietro.

Nei due teschi ora descritti non si conservano le estremità dei mascellari superiori e quindi non si può vedere quanti e quali sieno i denti anteriori. Ma gli alveoli di questi denti si osservano perfettamente in due frammenti di mascellari, l'uno destro, l'altro sinistro, compresi nella mia raccolta. Il primo offre l'alveolo del canino, che è assai ampio e quelli di tre incisivi; il secondo ha *solo* gli alveoli del canino e di due incisivi. In entrambi poi il margine esterno dell'osso, fra il canino e il ferino, è *affatto destituito* dei piccoli premolari e dei loro alveoli.

Misure del cranio d'orso n. 1.

Lung. del margine incisivo alla sommità della cresta occipitale, circa (1)	mill.	420
Larghezza del cranio fra le apofisi postorbitali del frontale	»	121
Distanza fra la linea che unisce le suddette apofisi e la cresta occipitale.	»	208
Larghezza del cranio fra le arcate zigomatiche (2)	»	225
Altezza verticale del cranio a livello della spina occipitale	»	94
Altezza del punto più prominente del cranio	»	155
Altezza del cranio nel mezzo della linea che riunisce le due apofisi postorbitali	»	150
Maggior diametro trasversale della scatola cerebrale	»	105
Lunghezza basale del cranio fra il margine inferiore del foro occipitale e il margine inferiore degli alveoli degli incisivi, circa (3)	»	380
Larghezza del palato fra le corone degli ultimi molari	»	56
Minor diametro trasversale tra i temporali	»	80
Spazio longitudinale occupato dai tre molari superiori	»	76
Larghezza del foro occipitale	»	32

Mandibole. Tra complete e quasi intere potei esaminare non meno di 5 mezze mandibole dell'orso delle Fate ed altri 12 frammenti più o meno voluminosi.

Le suddette mezze mandibole, in confronto di quelle dell'*U. arctos*, sono più grosse, più robuste e più *alte*, le loro apofisi coronoidi sono più estese, i condili più spessi e forti. I molari sono in esse più larghi; *l'ultimo non è mai ristretto posteriormente.* Il ferino è sempre, in proporzione, *più largo nella base* e presenta generalmente un tubercolo maggiore conico e due minori arrotondati, nonchè un piccolo tallone. Fra il ferino e il canino della stessa parte, il margine dell'osso è d'ordinario meno incavato

(1) Qui è detto circa, perchè manca il margine incisivo.
(2) Anche questa misura è incerta, essendo le arcate incomplete.
(3) L'incertezza dipende dalla circostanza già addotta al n. 1.

e non offre, in ogni caso, che un solo alveolo o un solo premolare gemmiforme, mentre nell'*arctos* tali denti o gli alveoli che li rappresentano, allorchè son caduti, si trovano spesse volte in numero di due o tre. I canini sono generalmente più robusti, più lunghi e meno assottigliati nella corona.

Anche le mandibole, come i cranî, offrono più stretti rapporti colle parti omologhe dell' *Ursus spelaeus* che con quelle dell' *Ursus arctos*. Si verificano in esse i caratteri generali del primo, colla differenza che sono in complesso più piccole e meno robuste, specialmente nei condili; l'apofisi coronoide è meno prominente e non tanto incavata alla base. Nella massima parte delle mandibole il margine superiore dell'osso compreso fra il ferino e il canino è appena un po' concavo, come nell' *U. spelaeus;* in una è invece assai arcuato come nell' *U. arctos*.

Seguono le misure di alcune mezze mandibole delle Fate:

		N. 1	N. 2	N. 3
Lunghezza fra l'estremità superiore dell'apofisi coronoide e il margine anteriore dell'alveolo del canino	mill.	254	278	238
Altezza fra il margine inferiore dell'osso e il superiore dell'apofisi coronoide	»	125	132	117
Altezza dell'osso sulla perpendicolare abbassata dal margine anteriore dell'alveolo dell'ultimo molare	»	71	73	60
Distanza fra il margine posteriore dell'alveolo dell'ultimo molare e il margine anteriore dell'alveolo del ferino	»	94	100	90
Distanza fra quest'ultimo margine e il canino	»	52	56	54
Lunghezza dell'ultimo molare	»	25	27	24
Larghezza dell'ultimo molare	»	18	18 ½	17
Lunghezza della corona del canino	»	40	38	34
Distanza fra la base del condilo e la punta dell'apofisi coronoide	»	80	85	79

Quanto ai denti, ciascuna delle nostre mezze mandibole è munita di due grossi molari, di un ferino e di un canino; ma in tre, un po' all'indietro del canino, vi è l'alveolo di un piccolo premolare gemmiforme, in una l'alveolo è obliterato e in un'altra il piccolo premolare è in posto. I molari ripetono, in piccolo, le forme di quelli del grande orso delle caverne; se però si volesse sottilizzare, si potrebbe dire che sono comparativamente un po' più stretti; l'ultimo molare non è mai molto attenuato posteriormente come nell'*arctos* e come in certe varietà dello *spelaeus*.

Il ferino è assai più variabile degli altri denti ed offre, si può dire, tutte le gradazioni fra il dente a tre grosse colline maggiori e a tallone sporgente dello *spelaeus* e quello ad un solo tubercolo dell'*arctos*. In generale questo dente ha nei fossili di cui tengo discorso due tubercoli anteriori piccoli ed arrotondati, un tubercolo mediano esterno, robusto e conico ed un tallone posteriore appena accennato, cui s'accompagna talvolta un rilievo interno, lievissimo, poco distinto dalla collina principale. Passando in rassegna i ferini isolati raccolti nella caverna, si osserva che ve ne ha uno il quale non differisce guari dal dente omologo dell'*arctos* ed altri invece che presentano più o meno accentuate le caratteristiche dello *spelaeus* (Tav. V, fig. 5, 6).

I canini in posto che osservai tra i miei fossili ripetono le forme generali di quelli dell' *U. spelaeus,* ma sono d'ordinario meno robusti (Tav. V, fig. 4). Tra i denti isolati, alcuni però hanno la corona tanto assottigliata e la radice così debolmente compressa, che sembrano riferirsi ad altra specie (Tav. V, fig. 3).

Rispetto ai denti isolati delle due mascelle basterà per adempiere al mio assunto che io porga le dimensioni del maggiore e del minore di ciascuna specie [1].

Dimensioni dei denti d'orso trovati nella caverna delle Fate.

Denti anteriori.

		Lunghezza	Larghezza	Spessezza	Lunghezza della corona	Larghezza alla base della corona	OSSERVAZIONI
Incisivi esterni superiori	maggiore mill.	57	16	14	22	15	
	minore »	47	12½	10	18	13	
Incisivi interni superiori	maggiore »	34	10	7	9	10	Manca circa una metà della corona.
	minore »	27	9½	6	13	9½	
Incisivi interni inferiori.	»	28	8	3	10	8	
Canini superiori . . . . ,	maggiore »	110	36	24	43	26	Ve ne sono alcuni più voluminosi, ma non interi.
	minore »	105	29	19	35	24	Nella mia raccolta ve ne ha forse di più piccoli; non è certo però che appartengano alla mascella superiore.
Canini inferiori	maggiore »	96	29	19	37	25	
	minore »	84	19½	13½	33	22	

[1] Questi denti sono circa un centinaio e, tra sani e guasti, vi son compresi 45 canini.

Denti posteriori.

		Lunghezza della corona	Larghezza della corona	Altezza della corona	OSSERVAZIONI
Premolari superiori (ferini)	maggiore mill.	19	14½	10½	
	minore »	16	11	11	
Premolari inferiori (ferini)	maggiore »	14	9½	10	Questo presenta un tubercolo grande, due piccoli ed un tallone.
	minore »	12	8½	6½	È munito di un tubercolo maggiore, di uno minutissimo e di un piccolo tallone. La sua radice è semplice ([1]).
Penultimi molari superiori	maggiore »	25	18	10	
	minore »	24½	17½	10	
Terzultimi molari inferiori	maggiore »	29	14	11	
	minore »	26	12	10½	
Penultimi molari inferiori	maggiore »	29	17	11	
	minore »	27	16½	9	
Ultimi molari superiori . .	maggiore »	45½	22	8	
	minore »	39½	21	9½	
Ultimi molari inferiori. . .	maggiore »	26	18	8½	
	minore »	21½	16½	9	

Vertebre. Ne ho avuto sotto gli occhi non meno di 97, quasi tutte intiere e in discreto stato di conservazione. Si verificano fra queste notevolissime differenze di dimensioni; ma ciò non basta, io credo, per ammettere che la caverna abbia dato ricetto a più d'una specie d'orso. D'altronde i caratteri differenziali di queste ossa furono poco studiati e non somministrano criterî sicuri. Tra le vertebre figurano tre atlanti quasi intatti che corrispondono perfettamente per forma e dimensioni a quelli rappresentati dallo Schmerling nella fig. 1, tav. XXXIII della sua classica opera ([2]). La lunghezza del più voluminoso raggiungerebbe, se fosse completo, 175 millimetri. Gli epistrofei, nel numero di 4, ma incompleti, corrispondono presso a poco alla fig. A della tavola precitata; senonchè sono piccoli e il corpo loro sembra più breve. Le

([1]) Si tratta proprio di un ferino?

([2]) Sono invece proporzionatamente più bassi dell'atlante figurato nella *Paléontologie lombarde.*

altre vertebre cervicali, dorsali e lombari sono generalmente minori delle omologhe figurate dallo Schmerling; le caudali mancano.

Omeri. Ne ebbi 9 della parte destra, di cui 2 interi, e 11 della sinistra, di cui uno solo intatto. Fra questi si osservano esemplari di varie dimensioni, ma poco diversi nelle proporzioni relative delle varie parti. In generale corrispondono alla fig. 2 della tav. XXIII di Schmerling, quantunque un po' minori; uno di essi sembra invece coincidere colla fig. 2 della tav. XXIV. Due omeri, di cui non si conserva che il capo articolare, hanno la fossa olecranica attraversata da un foro di 2 centimetri di diametro nell'uno e di un centimetro nell'altro.

I due pezzi ora ricordati sono di mezzana grandezza e forse un po' meno robusti degli altri; ma non vi si osserva alcun'altra particolarità degna di nota.

Dimensioni		N. 1	N. 2
Lunghezza	mill.	420	339
Contorno dell'osso ov'è più sottile	»	160	120
Maggior diametro dell'articolazione superiore	»	102	85
Maggior larghezza dell'art. inferiore	»	118	97

Cubiti. Ne ebbi 3 destri e 4 sinistri, quasi completi, e non meno di 8 frammenti. Quantunque appartenenti probabilmente ad individui di varie età e dei due sessi, queste ossa offrono tra loro lievi differenze. Esse corrispondono in generale alla fig. 1 della tav. XXVI di Schmerling, senonchè sarebbero un po' meno robuste dell'esemplare figurato. Alcuni frammenti accennano piuttosto alla forma effigiata nella fig. 2, tav. XXV.

Dimensioni		
Lunghezza	mill.	342
Larghezza dell'olecrano	»	44
Corda della grande cavità sigmoide	»	65
Contorno dell'osso ov'è più sottile	»	98
Diametro maggiore della testa dell'ulna	»	51

Radî. Tra queste ossa, di cui esaminai 6 esemplari completi (3 destri e 3 sinistri) e 11 frammenti, si manifesta una forma robusta ed una forma gracile, di cui non potrei dire con sicurezza se non appartengono a due specie o varietà o piuttosto ad individui di sesso diverso. Il tipo robusto somiglia alla fig. 1, tav. XXVII di Schmerling, colla differenza che sembra più torto e un po' più piccolo dell'esemplare rappresentato; il tipo gracile si distingue dal primo, non solo per le dimensioni minori e per la sottigliezza, ma perchè è più schiacciato ed ha la carena più ottusa.

Dimensioni dei due tipi		N. 1 (1)	N. 2 (2)
Lunghezza	mill.	300 (3)	270
Larghezza dell'articolazione superiore	»	54	42

(1) Tipo robusto. — (2) Tipo gracile. — (3) Circa, perchè manca un pezzetto.

Circonferenza sotto la tuberosità bicipitale	»	89	74
Circonferenza alla parte media	»	94	73
Larghezza dell'articolazione inferiore	»	63 [1]	59

Femori. Ne conosco 5 soli intieri, 2 destri e 3 sinistri, e 21 pezzi quasi tutti assai voluminosi. Anche qui si distingue una forma robusta ed una forma gracile, tra le quali intervengono differenze sensibili. La prima coincide colla fig. 1, tav. XXX di Schmerling. La seconda, più sottile e più piccola, ha il piccolo trocantere più prossimo alla fossa digitale che non nell'altra; in complesso sembra consimile al femore dell'*U. arctos* vivente e non corrisponde ad alcuna delle figure di Schmerling. Le seguenti dimensioni si riferiscono solo al tipo robusto.

Dimensioni

Lunghezza	mill.	438
Contorno a livello del piccolo troncatere	»	162
Contorno ove l'osso è più sottile	»	120
Larghezza dell'articolazione inferiore	»	99
Larghezza della testa del condilo	»	54

Tibie. Fra le 10 intere e i 14 pezzi raccolti sono rappresentati individui poppanti, adulti e vecchi. Le loro diafisi sono più o meno grosse, in confronto delle epifisi; ma, io credo, per effetto di variazioni individuali. Le tibie della nostra caverna sono diverse da quelle figurate nella fig. 2, tav. XXXI di Schmerling, in cui la diafisi è oltremodo robusta e schiacciata alle due estremità, ma piuttosto si accostano alle figure 3 e 4 della stessa tavola.

Dimensioni		N. 1	N. 2
Lunghezza	mill.	298	121
Larghezza della testa superiore	»	120	50
Diametro antero-posteriore della testa superiore	»	77	
Diametro maggiore della testa inferiore	»	78	40
Circonferenza della diafisi nel punto corrispondente al minor diametro	»	110	

Fibule. Una destra e una sinistra quasi intere ed alcuni pezzi.

Dimensioni

Lunghezza	mill.	232
Larghezza dell'articolazione superiore	»	22
Larghezza dell'articolazione inferiore	»	29
Circonferenza dell'osso alla parte media	»	45

Altre ossa. Le zampe anteriori sono rappresentate nella raccolta d'ossa di cui porgo l'elenco da 3 scafoidi-semilunari, 3 pisiformi e 12 metacarpiani (non contando alcuni esemplari dubbî). Alle zampe posteriori vanno attribuiti 4 calcanei destri, 4 calcanei

[1] Approssimativamente, perchè la testa articolare non è completa.

sinistri, un astragalo, un primo ed un terzo cuneiforme, più di 30 metatarsiani (tra i quali non potrei assicurare che non fosse compreso anche qualche pezzo del metacarpo) e 11 falangi, di cui 6 ungueali.

Non ebbi ad osservare differenze di molto rilievo tra queste ossa e i pezzi omologhi dell' *U. spelaeus*. Però i metacarpiani e i metatarsiani mi sembrano, in generale, più piccoli e più sottili.

Non ebbi che sole 3 scapole in cattivo stato di conservazione e da una di queste, meno incompleta delle altre, traggo l'altezza dell'acromion che è di 67 millimetri e il diametro maggiore della cavità glenoidea che è di 71.

La mia raccolta manca affatto di pezzi dello sterno. I frammenti di coste vi sono all'incontro numerosissimi, ma non si prestano ad osservazioni comparative di qualche interesse. I pezzi pertinenti al bacino sono parecchi e poco perfetti; tuttavolta, in due di essi verificai che la cavità cotiloide misura 67 millimetri di diametro e 48 di profondità.

Finalmente i miei amici ed io trovammo nella grotta delle Fate anche tre ossa del pene, quasi perfette, nelle quali, cioè, manca soltanto l'estremità appuntata. La lunghezza del maggiore, tenendo conto della parte mancante, è di 200 millimetri; la sua circonferenza all'estremità ingrossata è di millimetri 50.

L' *U. Bourguignati*, Lartet, della caverna di Mars (Alpi marittime), l'*U. priscus*, Goldfuss, che alcuni ritengono specificamente identico all' *arctos*, di cui sarebbe l'antenato, l'*U. planifrons*, Denny, si distinguono dalla specie sopradescritta, perchè offrono il carattere comune di avere il cranio poco saliente nella curva superiore, in essi cioè la regione frontale non subisce il rialzamento brusco proprio alle specie d'orso attuali e all' *U. spelaeus*. L' *Ursus priscus*, d'altronde, aveva la fronte pianeggiante, come lo notano Cuvier e Lartet.

Recentemente il sig. J. R. Bourguignat ebbe a scoprire in una magnifica grotta dell'Algeria quattro specie d'orsi fossili che denominò *Lartetianus, Letourneuxianus, Faidherbianus e Rouvieri* (1). La prima soltanto, per le proporzioni delle ossa, offre qualche analogia coll' *U. spelaeus* e per conseguenza colla varietà sopradescritta. Uno dei pezzi principali dell' *U. Lartetianus* illustrati dal Bourguignat consiste in un frammento della regione alveolare superiore, con un pezzo dell'arcata zigomatica. Or bene, l'inserzione di quest'arcata dista dalla base dell'ultimo molare di 14 millim., mentre nell'orso del Finalese ne dista 22, cioè 6 meno che nello *spelaeus* tipico. Quest'inserzione corrisponde nelle due specie alla parte media dell'ultimo molare, mentre nell'orso delle caverne si trova un po' più innanzi, vale a dire sopra il terzo anteriore del dente suddetto.

L'ultimo molare superiore del *Lartetianus* differisce poi molto dal dente omologo dell'orso delle caverne tipico e tanto più dalla varietà Finalese, perciocchè è assai più ristretto posteriormente e di forma che tende alla triangolare.

Gli omeri dell'orso d'Algeria hanno la fossa olecranica perforata, come due degli

(1) J. B. Bourguignat, *Souvenir d'une exploration scientifique dans le nord de l'Afrique*, pag. 390 e seguenti. Paris, 1868-1870.

esemplari della mia raccolta; ma questi, d'altra parte, si differenziano dai primi per la maggiore obliquità e larghezza dell'articolazione inferiore. Nè minor diversità si verifica, nelle tibie, secondo le figure di queste ossa presentate dal sig. Bourguignat ([1]).

L' *U. Rouvieri* e l' *U. Faidherbianus* sono due piccolissime specie dotate di caratteri talmente spiccati che non è possibile confonderle con altre. L' *U. Letourmeuxianus*, quantunque più prossimo allo *spelaeus* ed alle sue varietà, se ne distingue facilmente per la forma accorciata del muso e per molte altre particolarità, la cui enumerazione sarebbe qui affatto superflua.

Da quanto posso inferire, dopo l'esame superficiale dei resti d'orso della caverna di Laglio ostensibili nella collezione del Museo civico di Milano, e dopo aver consultato la descrizione che ne diede il prof. Cornalia nella *Paléontologie lombarde* ([2]), l'orso di questa provenienza non sarebbe perfettamente conforme al tipo dello *spelaeus* e differirebbe altrettanto dalla varietà ligustica. Nel cranio dell'orso lombardo la cresta sagittale è assai più breve che d'ordinario, si biforca cioè presso il vertice della cresta lambdoidea in due rami assai divergenti; nel cranio del Finalese la biforcazione si verifica invece in avanti e i due rami sono comparativamente meno estesi; nel primo inoltre la cresta lamdboidea, veduta di prospetto, forma un angolo acuto, laddove è ottusa nel secondo. Le mandibole inferiori appariscono nella varietà di Laglio più alte e brevi che non in quella delle Fate.

Finalmente le ossa sopradescritte, quantunque sieno da me in gran parte riferite all'*U. spelaeus*, non coincidono coi pezzi omologhi di questa specie, estratti dalla caverna di Cassana, dal Savi e dal Capellini, ed illustrati da questi naturalisti ([3]). Per citare alcune fra le molte differenze riscontrate, dirò che in un osso dell'orso di Cassana, conservato nel Museo geologico della R. Università di Genova, l'arcata zigomatica ha origine in un punto che corrisponde alla parte anteriore dell'ultimo molare, mentre nel fossile del Finalese quest'arcata s'inserisce sopra la parte media del dente suddetto, il quale inoltre è assai meno assottigliato posteriormente. La mandibola inferiore del primo è in confronto dell'osso omologo del secondo più lunga, meno arcuata inferiormente e il suo margine anteriore offre molto minore obliquità.

Resti di Cervi.

Oltre all'orso ed ai felini, due ossa rinvenute nella caverna accennano a due altre specie di mammiferi e sono una scapola (in cui manca parte della lamina dilatata), che non differisce sensibilmente dall'osso omologo del *Cervus elaphus;* ed una mezza mandibola superiore che sembra di capriolo. La prima allappa alla lingua ed è coperta d'incrostazioni terrose simili a quelle che aderiscono alle ossa d'orso e per tal motivo inclino a ritenerle della medesima età; la seconda dal

([1]) Opera citata, tav. III, fig. 7, 8.

([2]) *Monographie des mammifères fossiles de la Lombardie,* par Mr E. Cornalia. Milan 1860-65.

([3]) P. Savi, *Sopra una caverna ossifera stata scoperta in Italia.* Nuovo giornale dei letterati italiani vol. XI, 1825. — G. Capellini, *Nuove ricerche paleontologiche nella caverna ossifera di Cassana* (Riviera di levante), lettera al prof. M. Lessona, estr. dalla *Liguria medica.* Genova, 1859.

color più chiaro, dalla maggiore levigatezza, dalla lieve alterazione subìta in confronto delle altre ossa, mi parrebbe invece più recente.

I ruminanti cui appartengono queste ossa possono aver servito di cibo all'uomo o di pasto alle belve; ma non v'ha alcun indizio per cui sia da ritenersi vera l'una ipotesi più che l'altra.

Traccie dell' uomo.

Che l' uomo in tempi assai remoti abbia trovato ricovero nella grotta delle Fate si può inferire da che la terra rossiccia ossifera accumulata nel fondo della cavità contiene minuzzoli di carbone e cocci di stoviglie, come pure da altre osservazioni che addurrò in seguito. Il carbone non è raro nella caverna, specialmente nei punti in cui s'incontrano le ossa, e vi si presenta ora in stratarelli di uno o due centimetri di spessezza, ora confuso cogli altri elementi del terreno. I cocci si trovano qualche volta nella terra, col carbone, ma più comunemente alla superficie. Dalle condizioni della località, dall'aspetto irregolare ed eterogeneo del giacimento si deve necessariamente concludere che tanto le ossa quanto il carbone, i cocci e la terra, provengono dalla parte più elevata della spelonca, ora impraticabile a cagione di una frana, e di colà furono promiscuamente trascinati dalle acque nella regione in cui si trovano.

Esaminando i cocci e le ossa d'orso, non si può a meno di avvertire che i primi sembrano troppo freschi per essere contemporanei dei secondi (poichè anche la terra cotta va soggetta a certe alterazioni); d'altra parte, riescirebbe difficile a comprendersi come quando l'*Ursus spelaeus*, specie estinta, infestava ancora la Liguria, l'uomo fosse già tanto avanzato nelle arti manuali da produrre siffatte stoviglie [1]. Nel caso presente, peraltro, questa promiscuità è probabilmente accidentale e dipende dalla frana anzidetta che sconvolse e confuse due giacimenti di diversa età. La caverna servì in prima di covo agli orsi, ai leoni, alle pantere, poi, questi scomparsi, dopo lungo volgere di tempi, fu occupata dall'uomo.

I pochi cocci raccolti, sono identici a quelli che trovansi più comunemente alle Arene candide e all'Arma del Sanguineto, sono cioè resti di rozze pentole foggiate senza l'aiuto del torno e cotte sulla brace. Alcuni pezzi offrono un manico che è la consueta *auricula pertusa;* uno solo presenta altresì un rudimento d' ornato, cioè tre solchi graffiti che si dipartono da uno dei soliti manichi e convergono all'orlo del vaso, il quale è minutamente crenato.

È probabile che risalga alla medesima età preistorica od esostorica un'altra opera umana, veduta dal R. D. Perrando, che consisterebbe, da quanto egli me ne disse, in una cavità elissoidale di alcuni centimetri di profondità, praticata artificialmente in un masso di pietra arenacea. Si tratterebbe di una vera *pierre à bassin.* Terminerò il breve elenco segnalando un ciottolo ovoide di quarzite bianca, da me raccolto, il quale senza dubbio fu portato nella caverna per mano dell'uomo.

[1] Il compianto dott. Regnoli osservò in una caverna delle Alpi Apuane ossa d'*Ursus spelaeus* commiste ad arnesi dell'età neolitica, ma le sue conclusioni in ordine alla contemporaneità di questi oggetti non furono accettate dai paleontologi.

Mentre io ritengo che i cocci sopradescritti sono più recenti dell'*Ursus spelaeus,* non è men certo per me che colà questa fiera ebbe ad imbattersi coll'uomo, e ne fa fede un pezzo di mandibola inferiore, sulla cui superficie interna furono tracciati dei solchi e dei tagli, mentre l'osso era ancora fresco (fig. 7). Da qualche tempo si è molto usato ed abusato delle scalfitture, osservate sulle ossa fossili, per dimostrare la coesistenza dell'uomo coi grandi mammiferi estinti, talchè siffatto criterio è caduto un po' in discredito. Tuttavolta non posso esimermi dal far cenno di quest'oggetto, il cui significato è per me evidente. I solchi sono in numero di 10 o 11, rettilinei, netti, lunghi dagli 8 ai 15 millimetri, alcuni profondi, altri superficiali e li credo praticati coll'intento di scarnar l'osso; quantunque si possa ragionevolmente obbiettare che la sostanza alimentare aderente ad una mandibola d'orso sia invero scarsissima.

FIG. 7.
Pezzo di mandibola d'orso con incisioni
$\frac{1}{2}$ della grandezza naturale.
(R. Museo preistorico di Roma)

Non deve far maraviglia, d'altronde, che l'uomo vivesse nel Finalese contemporaneamente all'orso delle caverne, mentre risulta dalle ricerche eseguite dal signor E. Rivière nelle famose grotte dei Balzi Rossi, presso Ventimiglia, che giacevano colà associati scheletri umani, utensili paleolitici ed avanzi d'*Ursus spelaeus*, di leone e di iena delle caverne [1].

[1] E. Rivière, *Découverte d'un squelette humain de l'époque paléolithique dans les cavernes des Baussé-Roussé*, pag. 37. Menton, 1873.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Oggetti raccolti nella caverna delle Arene candide.

Tavola I.

1 Lesina d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
2 Punta di lancia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
3 Punta di lancia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
4 a 6 Cucchiaio (?) d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
5, 6, 7, 8, 9 Punte di freccia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
10 Scheggia d'osso appuntata — R. Museo preistorico di Roma.
11 Ago crinale d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
12 Punta di freccia d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
13 Scalpello d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
14 Lama di pugnale d'osso — R. Museo preistorico di Roma.
15 Pendaglio formato con tre denti di lupo forati — R. Museo preistorico di Roma.

N. B. Tutti questi oggetti sono rappresentati in grandezza naturale.

Tavola II.

1 Coccio di terra cotta con fregio — R. Museo preistorico di Roma
2 *a*, *b*, Base di un'anforetta o di un calice di vetro — R. Museo preistorico di Roma.
3 Coccio di terra cotta con ornati — R. Museo preistorico di Roma.
4 Valva di *Pectunculus* forata e ornata di solchi — Collezione del R. D. Perrando.
5 Vaso di terra cotta — R. Museo preistorico di Roma.
6 *Conus mediterraneus* forati — R. Museo preistorico di Roma.
7 Frammento di vaso con fori ed ornati — Museo civico di Genova.
8 Frammento di vaso con orlo crenato e fori — R. Museo preistorico di Roma.
9 Cucchiaio (?) di conchiglia — R. Museo preistorico di Roma.
10 Pendaglio (?) in terra cotta — R. Museo preistorico di Roma.
11 Articolo di monile di conchiglia — Museo civico di Genova.
12 Valva di *Cardium* forata ad uso d'ornamento — R. Museo preistorico di Roma.
13 Valva di *Pectunculus* forata — R. Museo preistorico di Roma.

N. B. Le figure 5, 7, 8 hanno dimensioni di metà più piccole delle reali; le altre sono in grandezza naturale.

Tavola III.

1 *a*, *b*, Accetta-scalpello di diorite affanitica — R. Museo preistorico di Roma.
2 Frammento d'anello di giadeite — Museo civico di Genova.
3 Ascia di pietra verde — R. Museo preistorico di Roma.
4 Ascia di anfibolite — R. Museo preistorico di Roma.
5 Nucleo di piromaca — Museo preistorico di Roma.
6 *a*, *b*, Accetta di giadeite — R. Museo preistorico di Roma.
7 *a*, *b*, Coltellino di piromaca — R. Museo preistorico di Roma.
8 Accetta di diorite — R. Museo preistorico di Roma.
9 *a*, *b*, Coltellino di selce bionda — Museo civico di Genova.
10 *a*, *b*, Oggetto di serpentina — R. Museo preistorico di Roma.

N. B. Tutti questi oggetti sono rappresentati in grandezza naturale.

Oggetti raccolti nella caverna delle Fate.

Tavola IV.

1 Frammento di mascellare sup. di *Felis antiqua*, Cuv. (grand. nat.).
2 Atlante di *Felis antiqua* (grand. nat.).
3 Mezza mandibola inf. di *Felis antiqua* (grand. nat.).

Tavola V.

1, 2 Cranio di *Ursus spelaeus*, Blum., var. ($\frac{1}{2}$ delle dimens. nat.).
3 Canino inf. di *Ursus sp.* ($\frac{1}{2}$ della grand. nat.).
4 Canino sup. di *Ursus spelaeus*, var. ($\frac{1}{2}$ della grand. nat.).
5, 6 Ferini dell'*Ursus spelaeus*, var. (grand. nat.).

N.B. Gli originali delle figure comprese nelle tavole IV e V sono ostensibili nel Museo geologico-mineralogico della R. Università di Genova.

Lit. Armanino Genova

1
2a
2b
3
4
5
6
7
8
9
10
10b
11
12
13

1a

1b

2

3

4

5

6a

6b

7a

7b

8

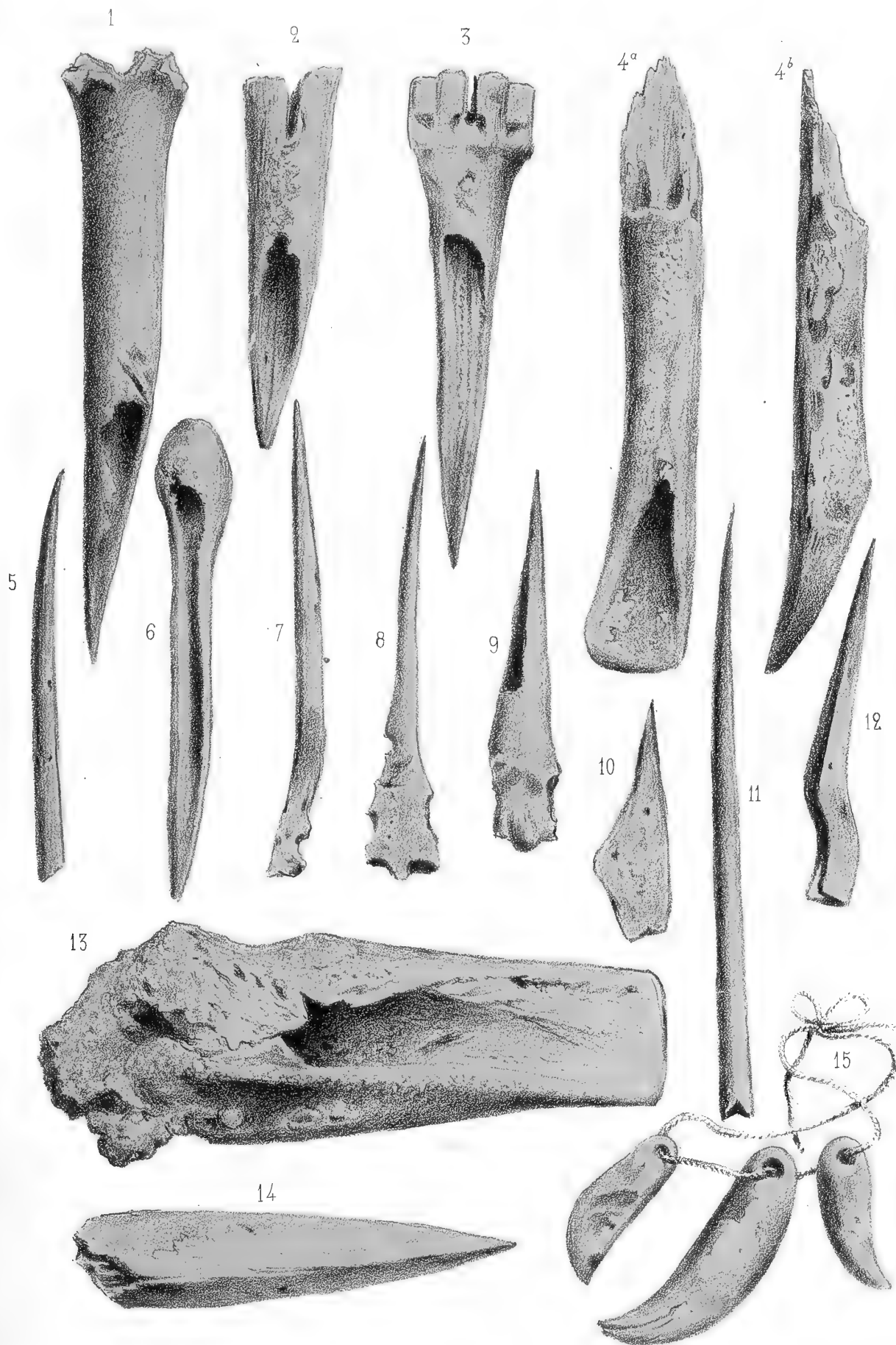
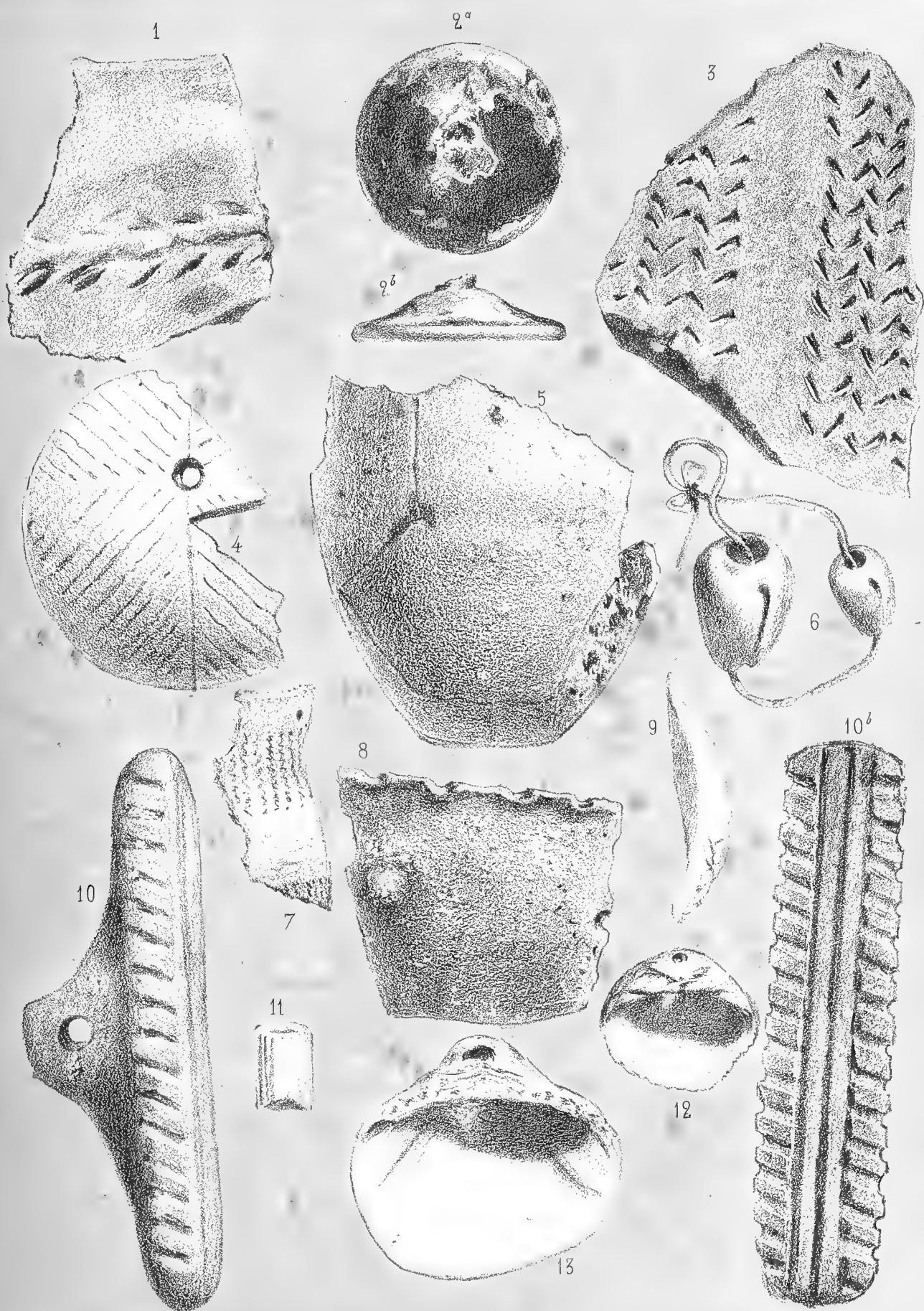
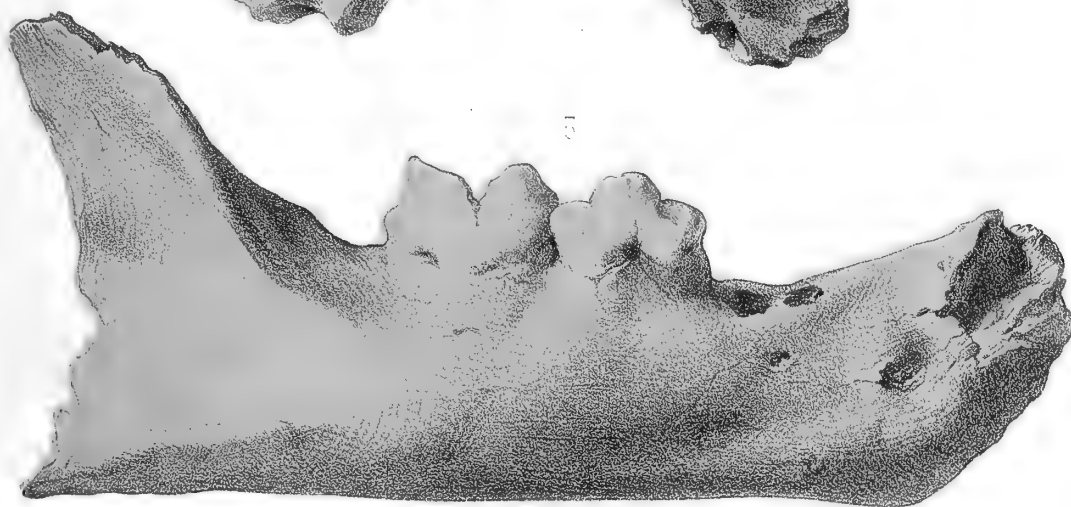
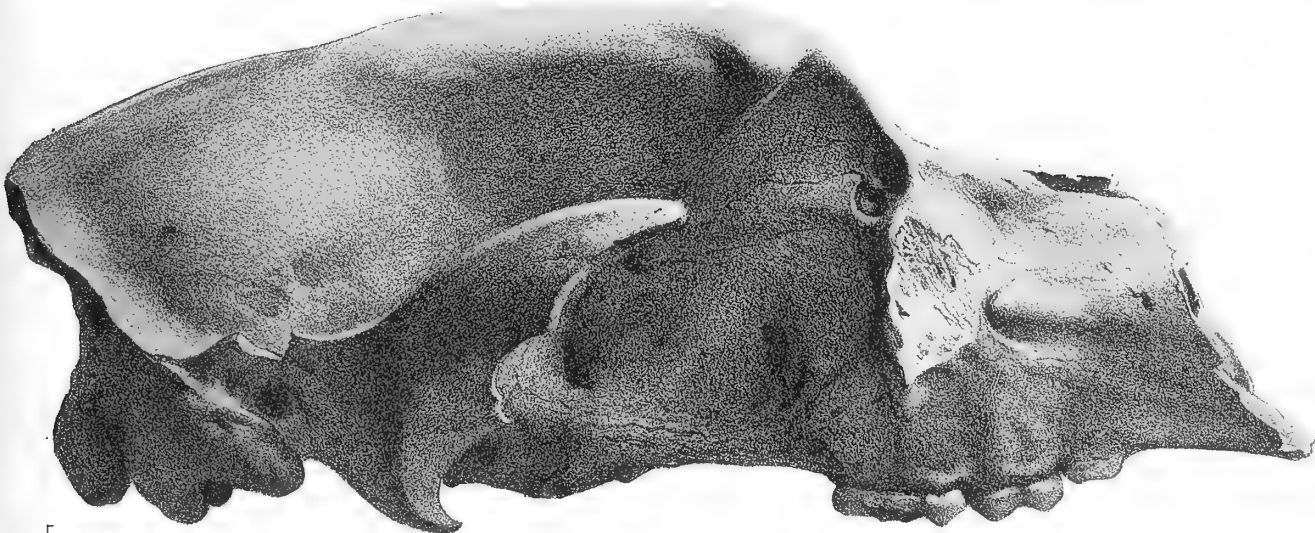
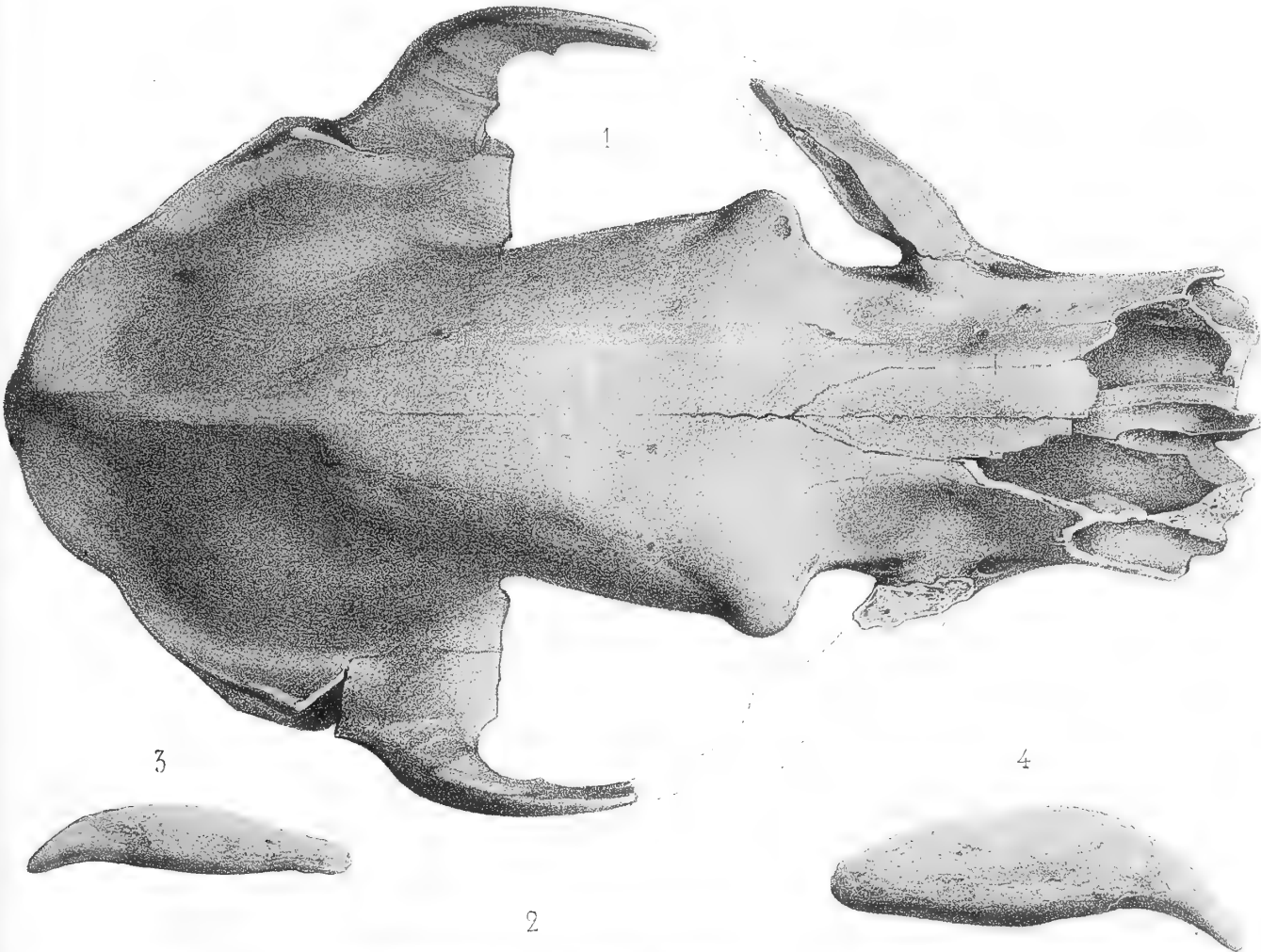
9a

9b

10a

10b

1
5

1
2
3
4
5
6

Ricerche chimiche su minerali e roccie dell'Isola di Vulcano.

Memoria del Socio ALFONSO COSSA, presentata dal Socio Q. SELLA

nella seduta del 2 dicembre 1877.

I.

Allume Potassico contenente allumi di tallio, rubidio e cesio.

I. In un saggio di allume potassico dell'isola di Vulcano (Isole Lipari) scopersi nel 1873 la presenza del tallio mediante l'osservazione spettroscopica. Non pubblicai allora il risultato di questa osservazione perchè il tallio, quantunque sott'altra forma, era già stato trovato da Crookes nello zolfo di Vulcano. — Nel mese di luglio di quest'anno (1877), ripetendo le osservazioni incominciate quattro anni prima, trovai che l'allume di Vulcano oltre al contenere realmente il tallio allo stato di allume tallico, racchiudeva pure traccie di allume di cesio e di rubidio e solfato di litio.

Esaminai in seguito un campione di allume potassico commerciale ottenuto nella fabbrica di Vulcano, che ora appartiene al signor Stewenson di Glascow. Da 180 grammi di quest'allume (quantità di cui poteva disporre) ottenni 15 grammi di un allume così ricco di cesio e di rubidio, che la presenza di questi due metalli si rendeva evidente ad un occhio esercitato dal solo colore della fiamma, senza bisogno di ricorrere all'analisi prismatica. — Successivamente potei esaminare campioni di allume naturale della stessa provenienza e conservati nei musei di Milano, di Pavia e di Torino. Il campione del museo dell'Università di Torino cortesemente comunicatomi dal professore Spezia, differisce dagli altri perchè è costituito da una massa compatta di un aspetto simile a quello che presenta l'allume quando si rappiglia per raffreddamento dopo aver subìto la fusione acquea. Le prime osservazioni fatte su questo campione mi diedero un risultato negativo, ma in seguito nei cristalli meno solubili ottenuti dopo ripetute cristallizzazioni potei osservare distintamente anche in questo come negli altri campioni, le linee brillanti caratteristiche del tallio, del cesio e del rubidio.

I risultati delle mie osservazioni che accertavano per la prima volta la presenza di composti di cesio, di rubidio, di litio, e di una combinazione solubile di tallio nei prodotti di Vulcano, furono riassunti in una Nota preventiva indirizzata al comm. Q. Sella e pubblicata durante le ferie accademiche nella Gazzetta ufficiale del Regno del 25 agosto 1877 [1].

[1] Esprimo la più viva riconoscenza all'egregio capitano del 48° reggimento di fanteria Serafino Frattola il quale oltre all'avermi offerta la più squisita ospitalità in Lipari, mi accompagnò nelle varie escursioni fatte a Vulcano prestandomi validissimo aiuto.

Devo pure ringraziare il Signor Narleau direttore della fabbrica di allume e di acido borico a Vulcano, il quale pose generosamente a mia disposizione gran parte delle materie prime necessarie alle mie ricerche.

Non avrei potuto mantenere la promessa fatta in quella comunicazione preventiva, di presentare cioè all'Accademia dei Lincei una Memoria più dettagliata insieme a preparati dei metalli rari or ora nominati, se il Ministro d'Agricoltura informato favorevolmente intorno a questi primi studî non mi avesse lasciato tempo e dato generosamente i mezzi di potermi recare a Vulcano per raccogliere i materiali necessarî per continuare le ricerche incominciate.

La varietà delle forme litologiche che ho potuto osservare a Vulcano, e la importanza dei prodotti dei fumaioli ancor poco studiati sotto il punto di vista chimico, mi hanno suggerito il proponimento di allargare il campo degli studî che mi era prefisso iniziando delle ricerche chimiche su minerali e roccie di Vulcano. A ciò mi spinse anche la speranza di avere risultati che possano soddisfare alle intenzioni di coloro che mi aiutarono e mi incoraggiarono a proseguir nelle ricerche di chimica mineralogica.

II. Prima di riferire le osservazioni che ho finora eseguite sull'allume, che è il minerale che forma il primo argomento di queste mie ricerche, credo non inutile di enumerare brevemente gli studî chimici finora eseguiti intorno all'isola Vulcano.

Le ricerche chimiche che a mia notizia furono fin quì intraprese sui prodotti naturali di Vulcano si riducono alle seguenti.

Spallanzani nei suoi *Viaggi alle due Sicilie* descrive alcune ricerche da lui eseguite sul grado di maggiore o minore fusibilità delle lave, desumendo da questo carattere un criterio per giudicare della loro ricchezza in silice. Merita di essere notato che in queste sue ricerche l'illustre naturalista modenese cimentò le lave non solo alle fiamme ordinarie, ma eziandio al calore vivissimo che ottiensi da una combustione avvivata con gaz ossigeno ([1]).

Le ricerche fatte precedentemente da Dolomieu sono pure limitate, ma però riescono più interessanti di quelle dello Spallanzani; inquantochè il geologo francese colpito dall'alterazione che nelle lave di Vulcano aveva prodotto l'acido solforico, trattò con questo acido campioni diversi di lave non alterate, e seppe così distinguere quelle che producevano solamente allume, da altre che davano origine anche a gesso oppure resistevano all'azione scomponitrice dell'acido. Nella denominazione d'allume il Dolomieu comprendeva evidentemente anche il solfato d'alluminio e l'allume sodico ([2]).

Secondo quanto nota il Dana nel suo trattato di Mineralogia, l'acido borico nell'Isola Vulcano sarebbe stato scoperto per la prima volta dal dottor Holland nell'anno 1813. Ma il Dana che è solitamente molto esatto nelle citazioni, non indica la fonte da cui attinse questa notizia; e perciò mi manca il mezzo di verificare se il merito della priorità di questa scoperta si debba attribuire all'Holland oppure a Lucas il quale in una lettera indirizzata il 31 luglio 1819 da Messina ad

([1]) Spallanzani. Viaggi alle due Sicilie ed in alcune parti dell'Appennino. Pavia MDCCXCV Tomo II, Capitolo XIII e XIV.

([2]) Voyage aux iles de Lipari fait en 1781; ou Notices sur les Iles Æoliennes pour servir à l'histoire des Volcans. Paris MDCCLXXXIII.

Arago [1] racconta di avere insieme al farmacista messinese Gioacchino Arrosto, scoperto tra le materie saline che tappezzano il fondo e le pareti del cratere di Vulcano, dell'acido borico sotto forma di squammette bianche.

Nel 1822 Stromeyer analizzò l'acido borico di Vulcano [2] e due anni dopo nella seduta del 3 aprile 1824 comunicò alla R. Società delle scienze di Gottinga, di avere scoperto del solfuro di selenio aderente al cloruro d'ammonio sublimato dell'isola Vulcano [3]. Stromeyer ritenne da prima questa sostanza per cloruro ferrico, ma ne riconobbe poi la vera natura all'odore caratteristico dei composti di selenio quando sono abbruciati in contatto dell'aria, ed alla reazione osservata cimentando con solfito potassico la soluzione nitrica del solfuro di selenio.

Negli anni 1855 e 1856 Carlo Saint-Claire Deville [4] analizzò le miscele gazose che erompono da molti fumaioli in Vulcano. In uno di questi fumaioli trovò un deposito costituito di diverse materie disposte nell'ordine seguente: 1.° Zolfo. 2.° Sale ammonico contenente traccie di jodio probabilmente allo stato di joduro d'ammonio, e ricoperto da una patina di solfuro di arsenico contenente piccole quantità di selenio e di fosforo allo stato di fosfato calcico. 3.° Conglomerato di zolfo, acido borico e frammenti di roccia. 4.° Deposito superficiale d'acido borico puro. — Nei prodotti di Vulcano il jodio, il fosforo e l'arsenico vennero messi in evidenza per la prima volta da Deville.

Warington in una Memoria pubblicata nel 1854 [5] asserisce d'aver trovato che l'acido borico di Vulcano contiene traccie di azoturo di boro. Questo è un fatto molto interessante perchè confermerebbe l'ipotesi sostenuta da Wöhler, da Deville [6] ed anche dal prof. Bechi, secondo la quale l'acido borico deriverebbe dallo scomporsi che fa l'azoturo di boro sotto l'azione del vapor d'acqua in acido borico ed ammoniaca; e non dalla scomposizione del solfuro di boro in solfuro d'idrogeno ed acido borico, come si ritiene da Dumas e da altri.

Verso l'anno 1862, Crookes che divide con Lamy l'onore della scoperta del tallio, trovò coll'analisi spettrale traccie di questo metallo nello zolfo di Vulcano.

A. Baltzer [7] visitò il cratere di Vulcano il 3 novembre dell'anno 1873 cioè pochi giorni dopo l'eruzione di ceneri e projettili del 19 ottobre. Osservò nelle ceneri eruttate cristalli di tridimite, e sottopose all'analisi chimica queste ceneri ed alcune

(1) *Extrait d'une lettre de M. Lucas fils à M. Arago.* — Annales de chim. et de phys. Tome XI pag. 443 (1819).

(2) *Untersuchungen über die Mischung der Mineral-Körper und anderer damit verwandten Substanzen.*

(3) *Untersuchung des in der Gegend von Clausthal vorkommenden Selenblei,* von Stromeyer und Hausmann, *nebst einer Notiz über das auf der Insel Vulcano vorkommende Schwefelselen.* Pogg. Annalen. Vol. 2 pag. 410.

(4) *Neuvième lettre à M. Elie de Beaumont sur les phénomènes éruptifs de l'Italie méridionale;* par Charles Sainte-Claire Deville. Compte-rendu de l'Ac. des Sciences. Vol. XLIII pag. 681 (1856.)

(5) *On the Production of Boracic Acid and Ammonia by Volcanic Action.* Chemical Gazette 1854 pag. 419.

(6) Vedi Ann. der Chem. und Pharm. Vol. 105 pag. 69.

(7) *Geognostisch-chemische Mittheilungen über die neuesten Eruptionen auf Vulcano und die Producte derselben* von A. Baltzer. Zeitschrift d. deutschen geol. Gesellschaft. Vol. XXVII (1875) pag. 36.

delle lave più recenti. Ma le sue ricerche sono incomplete perchè in esse gli alcali sono determinati cumulativamente per differenza. Un'analisi completa delle lave lo avrebbe senza dubbio condotto alla scoperta del cesio e del rubidio [1].

III. I depositi principali di allume nell'isola di Vulcano si trovano nelle grotte del Faraglione, e nella cavità del gran cratere. Il Faraglione detto anche Rocca dell'allume [2] è un ammasso di roccie trachitiche decomposte per la massima parte dall'acido solforico. Esso è situato al limite meridionale dello stretto istmo che unisce Vulcanello a Vulcano, e si protende lateralmente verso il mare formando gran parte del braccio occidentale del porto di levante. L'allume potassico nelle grotte del Faraglione è intimamente commisto a solfato d'allumina, a gesso, a sale ammoniaco; e difficilmente si trova ora in uno stato tale da potere con vantaggio essere isolato.

Nella parete interna settentrionale del cratere di Vulcano vi è una plaga piuttosto estesa detta *la Schicciola* che è costituita da una roccia bianca compatta a cui aderisce in strati di varia grossezza l'allume potassico. Da più luoghi della *Schicciola* sgorga a stille un liquido avente una reazione fortemente acida, denso qualche volta a segno di rappigliarsi in stalattiti coniche a zone concentriche, come ne fa fede il saggio che presento all'Accademia. Ma in altri punti della stessa località il liquido che stilla attraverso le fessure della roccia contiene oltre all'allume potassico, solfato d'alluminio ed allume di sodio, i quali essendo molto più solubili si separano spontaneamente dall'altro sale o si raccolgono a piedi della parete del cratere formando un tappeto di una materia cristallizzata in aghi finissimi, oppure formano lo strato più esterno della materia cristallina aderente alla roccia. Questi sali più solubili sono qua e là colorati leggermente in giallo da composti di ferro, o in verde da rame. In un saggio al cannello fatto su un campione di queste materie trovai pure del cobalto la di cui presenza ho ripetutamente constatato con prove fatte per via umida.

L'allume della *Schicciola* osservato tale e quale viene staccato dalla roccia con un buon spettroscopio dà appena un indizio della presenza del tallio. Il sale di sodio che lo inquina impedisce la manifestazione delle linee diversamente colorate caratteristiche degli altri metalli che esso contiene. Separando con ripetute cristallizzazioni i cristalli meno solubili e sottoponendo questi all'analisi spettroscopica, si osservano in modo distinto, oltre all'unica linea del tallio, le linee α e β del cesio e del rubidio,

[1] Non avendo potuto consultare l'opera di Abich, *Vulkanische Erscheinungen* 1841, non conosco se oltre alle analisi delle roccie di Lipari, questo distinto mineralista abbia pure esaminato alcune tra le roccie di Vulcano.

La descrizione geologica più dettagliata dell'Isola Vulcano è quella compresa nella Memoria seguente di Federico Hoffmann: *Ueber die geognostische Beschaffenheit der Liparischen Inseln. Schreiben an Herrn Leopold von Buch* — Poggendorff Annalen. Vol. 26.° pag. 1-89. Leipzig 1822.

Anche il professore G. von Rath visitò il 9 aprile 1869 l'isola Vulcano e pubblicò una brevissima notizia tolta dal suo libro di annotazioni compilate durante il viaggio, in una lettera diretta al Prof. Leonhard ed inserita a pag. 62 del Neues Jahrbuch fur Mineralogie und Geologie, per l'anno 1874.

[2] Nel dialetto siciliano *Faraglione* è un appellativo comune agli ammassi di roccie che formano scogli o rupi scoscese. Così gli *Scogli dei Ciclopi,* notissimi per i bei cristalli di analcime, che stanno dicontro ad Aci Trezza si chiamano comunemente i *Faraglioni della Trezza.*

le quali ultime, a motivo della loro vicinanza e del potere dispersivo non sufficiente degli spettroscopî che qualche volta si adoperano per ricerche analitiche, appaiono come riunite formando un'unica linea larga e molto brillante. — Per togliere ogni dubbio sull'identità delle linee caratteristiche dei metalli rari ora nominati, non mi fidai solamente del carattere desunto dalla loro posizione rispettiva misurata per mezzo della scala micrometrica projettata sullo spettro, ma osservai ancora la coincidenza perfetta di due spettri sovrapposti, dei quali uno proveniva dall'allume di Vulcano, l'altro da composti ben accertati di tallio, cesio e rubidio.

La ricchezza in cesio e rubidio varia nelle diverse località della *Schicciola*. Da due chilogrammi e mezzo di minerale ottenni una volta duecento grammi di un allume ricco di cesio a segno da palesare tutte e due le linee caratteristiche del cesio e del rubidio. Non ho ancora terminato le operazioni necessarie per determinare con qualche precisione la quantità di questi corpi. Se è facile il separare e l'isolare il tallio, riesce difficile il separare senza perdite il cesio ed il rubidio dal potassio, e difficilissimo poi il dividere il cesio dal rubidio. Posso però affermare che l'allume di Vulcano, fatta eccezione del polluce, trovato in piccolissima quantità nell'isola d'Elba, è la materia prima più ricca da cui si possa finora estrarre il cesio ed il rubidio. Attualmente si ottengono i composti di questi due metalli o dai residui del trattamento della lepidolite, o da acque minerali, che ne contengono traccie minime, e richiedono lunghe operazioni per separarli dagli altri corpi ai quali sono accompagnati. Nell'allume invece la concentrazione dei metalli rari si può fare per semplice cristallizzazione. È appunto in questo modo che io ho potuto ottenere dall'allume della *Schicciola* un allume di cesio, rubidio e tallio, di cui presento all'Accademia un saggio, esente da allume potassico e ricco di cesio a segno da lasciar scorgere oltre le linee α e β anche le altre linee secondarie.

Coll'allume di Vulcano ho già preparato una discreta quantità di cloroplatinato di rubidio e di cesio esente affatto del corrispondente sale di potassio. Da questo cloroplatinato col metodo suggerito da Bunsen ho potuto separare il rubidio dal cesio. La separazione di questi metalli sottoponendo a successive cristallizzazioni frazionate l'allume misto di cesio e di rubidio non riesce mai completa. — Ho cercato di separare il cesio dal rubidio col metodo proposto dal professore F. Stolba di Praga ([1]) che consiste nelle operazioni seguenti. Si scioglie la mescolanza dei due allumi di cesio e di rubidio nell'acido cloridrico molto concentrato, ed alla soluzione calda si aggiunge del tetracloruro di stagno. Si lava il precipitato cristallino con acido cloridrico concentrato; si discioglie il precipitato nell'acqua calda appena inacidita con acido cloridrico, e nella soluzione si riprecipita il cloruro doppio di cesio e di stagno. Ma operando esattamente e più d'una volta nel modo ora descritto ho sempre osservato che insieme al cloruro di cesio e di stagno precipitava il cloruro di stagno e rubidio. — Questo risultato negativo conferma quanto venne già asserito da Godeffroy, che cioè, contrariamente a quanto venne indicato da Stolba, il cloruro di stagno e di rubidio è, come il sale corrispondente di cesio, insolubile nell'acido cloridrico concentrato ([2]).

([1]) *Ueber die Nachweisung des Cäsium als Cäsiumzinnchlorid.* — Dingler politech. Journ. Vol. 197 pag. 336 e Vol. 198 pag. 225.

([2]) *Antimonchlorid als Reagens für Cäsiumsalze.* — Berichte der deutsch. Chem. Gesellschaft. Vol. VII pag. 375 e Vol. VIII pag. 9.

Invece la separazione riesce facile e completa versando del pentacloruro d'antimonio in una soluzione cloridrica dei due allumi di cesio e di rubidio. In questo caso precipita solamente sotto forma di piccioli cristalli il cloruro di antimonio e di cesio $Sb\ Cl_3$, 6 $Cs\ Cl$ studiato per la prima volta da Godeffroy, mentre il sale corrispondente di rubidio è solubilissimo nell'acido cloridrico concentrato e rimane disciolto nelle acque-madri.

IV. La roccia a cui aderisce l'allume della *Schicciola* è stata semplicemente attraversata dalla soluzione di allume cesifero; oppure è essa stessa che decomposta dall'acido solforico ha fornito i materiali necessarî alla formazione dell'allume? Per risolvere questo quesito importantissimo ho sottoposte a lunghe e ripetute lavature frammenti della roccia per liberarli da ogni traccia di allume. La roccia ridotta in fina polvere fu ancora lavata con acqua distillata bollente, finchè nelle acque di lavatura, anche coll'analisi spettrale, non si aveva più indizio di potassio, e quindi fu decomposta con acido solforico ed acido fluoridrico. Lisciviata la massa con acqua bollente, dopo di avere eliminato gran parte dell'eccesso di acido solforico, ottenni una soluzione che convenientemente concentrata depose dopo due giorni dei bellissimi cristalli ottaedrici di allume potassico, i quali più volte ricristallizzati ed osservati collo spettroscopio manifestarono in modo evidente la presenza del cesio e del rubidio. Dunque questi due metalli si trovano molto probabilmente sotto forma di silicati nella roccia esaminata.

L'esame chimico di questa roccia mi fece conoscere un altro fatto importante. Le acque madri dalle quali eransi separati i primi cristalli di allume e che contenevano in gran copia solfati di alluminio e di sodio, e traccie di solfato di litio, trattate con acido solfidrico diedero un precipitato di solfuro d'arsenico misto a solfuro di selenio. Ho ripetuto tre volte questo esperimento dopo essermi accertato della purezza dei reattivi adoperati, ed ebbi sempre un eguale risultato. Finora non ho potuto stabilire con certezza sotto qual forma il selenio e l'arsenico si trovano nella roccia.

La roccia della *Schicciola* ha un colore bianco che tende leggiermente al giallognolo, fonde difficilmente in scheggie sottili producendo uno smalto bianco. La determinazione del peso specifico fatta alla temperatura di + 12° C. diede i risultati seguenti:

con grammi	3,510	 2,009
»	4,555	 2,011
»	8,294	. . . . 1,942.

L'alterazione che ha subìto la roccia per l'azione dell'acido solforico ne rende difficile l'esame microscopico. Osservai finora tre sezioni sottili, e mi pare che si possa classificare questa roccia nel gruppo delle Lipariti. In una pasta microfelsitica che non depolarizza la luce trovansi immagliati cristalli di feldispato ortotomo di cui alcuni presentano dei geminati secondo la legge di Carlsbad. Il quarzo si trova principalmente sotto forma di tridimite; non contiene cavità con liquidi, ma corpuscoli poliedrici. Osservai pure in questa roccia dei piccolissimi cristalli isometrici di cui finora non seppi riconoscere la specie mineralogica.

Finora ebbi agio di esaminare tre lave non alterate di Vulcano, e dopo averle trattate convenientemente con acido solforico ottenni dei cristalli d'allume nei quali riusciva evidente la presenza del cesio e del rubidio (1).

V. Sui bordi di un fumaiolo situato nel fondo del cratere di Vulcano trovasi una materia spugnosa di un colore rossigno alla superficie e cinereo cupo nell'interno. La sua tessitura è cristallina e subito si appalesa come una materia non omogenea. L'analisi chimica mi ha dimostrato che essa è composta di zolfo, solfuro d'arsenico, solfuro di selenio, acido borico, cloruro d'ammonio, solfato di litio ed allume di tallio e di cesio, e traccie di allume di rubidio e di potassio. Trattando questa materia con acqua bollente si separano i solfuri di arsenico e di selenio. La soluzione debolmente concentrata lascia facilmente deporre gli allumi di tallio e di cesio pochissimo solubili.

Un'altra materia simile alla precedente, eccettuata la mancanza dei solfuri di arsenico e di selenio è ancora più ricca di allume tallico e di cesio. La quantità di cristalli che presento all'Accademia appena inquinati da poco solfato di litio, fu ottenuta con circa due grammi di materia. Queste due sostanze costituirebbero una sorgente di tallio e cesio ancora più ricca dell'allume della *Schicciola.* Ho notato che in queste materie porose che tappezzano le pareti di alcuni fumaioli e che hanno l'apparenza di allume usto, la quantità del cesio supera sempre quella del rubidio.

VI. Il solfato di alluminio mescolato a traccie d'allumi abbonda anche nelle molte acque minerali che sgorgano in parecchi luoghi dell'isola. A sud-ovest del Faraglione, poco lungi dalla fabbrica dove si purificano l'acido borico e lo zolfo, trovasi un pozzo profondo 3 metri, largo 2 metri e lungo metri 2,60. In questa cavità si raccoglie uno strato d'acqua alto mezzo metro. Dal fondo del pozzo si svolgono continuamente e in così gran copia delle bolle di gaz, da far apparire che l'acqua sia in piena ebollizione. — Sainte-Claire Deville chiamò molto a proposito questa sorgente *la grotta del Cane dell'isola di Vulcano,* perchè esaminando i gaz che da essa si svolgevano riconobbe che essi erano per la massima parte costituiti da acido carbonico.

Ho creduto interessante di ripetere le analisi di questi gaz vent'anni dopo le ricerche del Deville.

Ecco i risultati delle osservazioni fatte nelle due occasioni.

9 luglio 1856 — Deville.

Temperatura del gaz + 25°.

	I	II	III
Acido carbonico	86,0	83,0	86,0
Ossigeno	0,4	0,0	0,0
Azoto	13,6	17,0	14,0
	100,0	100,0	100,0

(1) L'analisi minuta di queste roccie e di quella della *Schicciola* formerà argomento di un altro mio lavoro che intendo di pubblicare tra breve.

17 ottobre 1877 — Cossa.

Temperatura dell'acqua 22° —

	I	II
Acido carbonico	78,0	80,0
Ossigeno	0,5	0,6
Azoto	21,5	19,4
	100,0	100,0

VII. L'estrazione dell'allume nelle isole Eolie è un'industria antica. Si ritraeva l'allume non solo dall'isola Vulcano, ma fino ad un certo tempo anche in Lipari e precisamente nella località detta *la Perrera*. Parlano in modo indubbio dell'allume di Lipari, Dioscoride, Plinio e Diodoro Siculo il quale ultimo asserisce che i Romani levavano un grosso tributo da questo sale, e nello stesso tempo i Liparoti ne ricavavano gran profitto [1]. Giorgio Agricola enumerando le diverse località italiane dove si fabbricava allume ricorda Messina in Sicilia; ma non si comprende se egli voglia alludere all'allume importato a Messina dalle isole Lipari, oppure a quello proveniente da Roccalumera piccolo paese vicino ad Alì nel circondario di Messina, che ricevette appunto il suo nome dalle cave di allume.

La fabbricazione dell'allume nell'isola Vulcano ricevette un grande sviluppo quando nel 1813 il Governo borbonico cedette alla famiglia Nunziante di Napoli il cratere e le sue adiacenze, col privilegio del monopolio della fabbricazione e dello smercio dell'allume per tutto il Regno delle due Sicilie. Il prezzo dell'allume di Vulcano ascendeva allora a 30 ducati (138 lire) per ogni cantaro di 89 chilogrammi. Il modo di estrazione dell'allume non consisteva solamente nella lisciviazione e cristallizzazione dell'allume naturale come fu da alcuni asserito. Per utilizzare anche il solfato d'allumina commisto all'allume potassico, si aggiungeva al liscivio del minerale delle ceneri di sarmenti di viti le quali, come è noto, sono ricche di potassa, oppure del cloruro ammonico; si otteneva così un allume potassico misto ad allume ammoniacale. Abolito dopo il 1860 questo privilegio, l'industria dell'allume cessò ben presto di essere produttiva e venne dopo poco tempo del tutto abbandonata [2].

VIII. L'illustre professore R. Bunsen al quale mi feci premura di inviare un saggio di allume di cesio, rubidio e tallio estratti dall'allume naturale di Vulcano, ebbe la cortesia di farmi sapere con una sua lettera che egli aveva confermato i risultati delle mie osservazioni, e mi fece conoscere che il professore Laudoltt di Aquisgrana già da qualche tempo aveva osservato la presenza di cesio e di rubidio in un allume commerciale di cui non ha potuto constatare la provenienza. Questo allume

[1] « Aluminis famigeratum metallum, unde magnum Romani vectigal et Liparaei incredibiles quaestus faciunt ». Bibl. hist. V. 10.

[2] Nell'isola Vulcano si estraggono attualmente acido borico e cloruro d'ammonio.

però, soggiunge il Bunsen, non può provenire da Vulcano perchè esso non contiene il tallio la di cui presenza caratterizza l'allume di questa ultima località. Mi invitò quindi a fare delle ricerche sull'allumite o sulle acque madri delle allumiere della Tolfa per scoprire se per avventura anche questo allume contenesse i metalli rari che io trovai nell'allume di Vulcano. Finora ho potuto appena provare l'allumite della Tolfa, ma negli esperimenti fatti su un chilogramma di materia non potei riscontrare la presenza di cesio e rubidio e nemmeno di tallio.

La viscosità e l'elasticità susseguente nei liquidi.
Ricerche sperimentali del dott. ANTONIO ROITI,

prof. nell'Istituto Tecnico di Firenze.

Memoria approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 gennaio 1878.

---

§ 1.

La maggiore o minore viscosità si spiega, com'è noto, ammettendo con Newton che due strati di un medesimo liquido incontrino nello spostarsi uno rispetto all'altro un attrito A proporzionale alla loro superficie s, alla loro velocità relativa v ed inversamente proporzionale alla loro distanza d, talchè sia:

$$A = \mu \frac{s v}{p} \tag{1}$$

ove μ rappresenta il coefficiente di viscosità o di attrito interno. E questa formula fu trovata d'accordo coll'esperienza, se non in tutti i casi [1], almeno in quelli nei quali la velocità relativa v era piccola.

Esistono, oltre ai liquidi propriamente detti, altri corpi i quali, benchè solidi, pure presentano talora tutte le caratteristiche della fluidità, colla sola differenza che si deformano con estrema lentezza. Così per esempio la pece nera, fragile rispetto alle azioni brusche, si mostra fluida quando sia assoggettata a forze continue: per effetto della gravità, poco a poco assume la forma del recipiente, acquista una superficie libera orizzontale, sgorga in goccie per le aperture, ecc. Il sig. A. v. Obermayer [2], esaminato l'attrito interno di diverse qualità di pece nera e dello storace, fu condotto a dichiarare che questi corpi deformandosi seguono le stesse leggi della viscosità dei liquidi.

Anche i metalli ed altri solidi effluiscono dagli orifici, quando sieno sottoposti a forti pressioni; ma le esperienze fatte da Tresca [3] sopra questo soggetto non consentono che si decida se il loro attrito interno segua in tal caso quelle leggi medesime.

Si suole del pari invocare l'attrito interno per ispiegare lo smorzamento delle oscillazioni dei fili metallici, il quale è molto maggiore che non sarebbe se si opponesse al moto la sola resistenza del mezzo e dei punti d'appoggio. A dir vero alcuni, sulle traccie di Weber [4] che la scoprì, attribuiscono più direttamente tale smorzamento alla elasticità di seconda specie o elasticità susseguente (*elastische Nachwirkung* de' Tedeschi), ossia a quella proprietà che hanno i solidi di non obbedire ad un'azione deformatrice e

(1) Vedi la mia Memoria: *Sul moto dei liquidi nei tubi cilindrici.* Nuovo Cimento, Ser. 2ª Vol. IV, 1870. — Annali d. R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. I.

(2) Obermayer, *Ein Beitrag zur Kenntniss der zähflüssigen Körper.* Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Aprile, 1877.

(3) Tresca, Compt. rend. Vol. LIX e LX.

(4) W. Weber, *De fili bombyciani vi elastica.* Comm. Soc. Gott. Vol. VIII p. 80, 1841. Pogg. Ann. Vol. XXXIV p. 247, Vol. LIV p. 1.

di non ritornare poi alla forma primitiva, che in un tratto di tempo più o meno lungo, il quale può contarsi a settimane e anche a mesi. Ma sino a questi ultimi tempi si riteneva con Thomson [1] e O. E. Meyer che anche il fenomeno della elasticità susseguente fosse un semplice effetto dell'attrito interno: anzi O. E. Meyer [2] ne svolse una teoria matematica, prendendo le mosse dalla legge (1) che regola l'attrito de' liquidi, teoria che sembrava appoggiata dalle successive ricerche sperimentali di Neesen [3]; quando Boltzmann [4] mise in evidenza che il semplice attrito, inteso in questo modo, non è sufficiente a rendere ragione di tali fenomeni, e diede un saggio di una nuova teoria della elasticità susseguente, sul quale ritorneremo più oltre.

Intanto basti mettere in chiaro che si hanno altri esempî di corpi i quali non seguono la formola (1), e fra questi citeremo il sego e l'argilla plastica che, come constatò A. v. Obermayer, non si comprimono sotto un certo peso, ma o lo reggono senza deformarsi, oppure si schiacciano.

Ora, in alcune ricerche da me iniziate col fine di verificare sperimentalmente l'azione elettromagnetica che, stando alla teoria, una corrente deve esercitare sopra i punti interni del conduttore da essa percorso, m'imbattei in un fenomeno che perturbava le mie misure in guisa impreveduta, e che mi parve degno di uno studio alquanto accurato, perchè accennava ad azioni, che si destano nei liquidi, diverse dalla comune viscosità e molto analoghe alla elasticità susseguente, osservata finora nei soli corpi solidi.

Ad un filo di bozzolo avevo sospeso uno specchietto rigidamente connesso con un'asticella metallica verticale, avente l'estremità inferiore saldata nel punto di mezzo di un ago magnetico perpendicolare ad essa, e però orizzontale. Ago e asticella erano zincati alla galvanoplastica, ed erano immersi in una cassetta di vetro contenente una soluzione satura e neutra di solfato di zinco, nella quale potevo far passare una corrente fra elettrodi di zinco amalgamato. In altre esperienze l'ago era verniciato e fissato ad un'asticella di vetro, anzichè di metallo. Leggevo le deviazioni corrispondenti ai varî punti occupati dai poli dell'ago nella sezione del conduttore. Se non che, di mano in mano ch'io progrediva nelle mie determinazioni, osservava che l'ago giungeva alla deviazione definitiva con una lentezza sempre maggiore, e poi all'atto che interrompeva la corrente, esso non ritornava alla posizione di riposo che dopo un tempo via via più lungo. Anzi, se mentre era fra quelle due posizioni estreme, gli davo un impulso, lo vedeva compiere una serie di oscillazioni intorno ad una posizione intermedia.

Allora dovetti rinunziare all'idea di studiare più da vicino questo fenomeno singolare, perchè il gabinetto di fisica dell'Istituto Tecnico, per la prossimità della Via

(1) W. Thomson, *On the elasticity and viscosity of metals.* Phil. Mag. Vol. XXX Ser. 4. July 1865 p. 63.

(2) O. E. Meyer, *Theorie der elastischen Nachwirkung.* Pogg. Ann. Vol. CLI p. 108, 1874.

(3) F. Neesen, *Beitrag zur Kenntniss d. elast. Nachw. bei Torsion.* Pogg. Ann. Vol. CLIII p. 498, 1874.

(4) L. Boltzmann, *Zur Theorie d. elast. Nachw.* Berichte der k. Akad. zu Wien. Bd. LXX. Pogg. Ann. Ergänz. Bd. VII pag. 624, 1876.

s. Gallo molto frequentata, e per la costruzione infelicissima dello stabile, va soggetto ad incessanti e fortissime trepidazioni che, durante il giorno, rendono assolutamente impossibile qualsiasi misura delicata. Ma essendomi procurato nelle vacanze autunnali un locale conveniente, ripresi il soggetto: ed ora pubblico i risultati ottenuti in questo tempo; perchè, anche incompleti come sono, mi sembrano meritevoli di qualche attenzione e, d'altro canto, fino alle nuove vacanze mi trovo nell'impossibilità di completarli.

§ 2.

Le seguenti osservazioni furono fatte nella villa del sig. Malenotti, a Colline, Comune del Galluzzo presso Firenze. Lo stabile è di costruzione solida e lontano dalle strade carreggiabili: la stanza che vi scelsi è a pianterreno, esposta a nord-nord-est talchè, avendo cura di chiudere le imposte nelle ore mattutine, le variazioni di temperatura non arrivavano che in casi eccezionali ad 1° C. in ventiquattr'ore.

Tanto l'apparecchio col liquido, quanto il cannocchiale e la scala erano sopra sostegni interamente di terra cotta, per eliminare gli spostamenti che probabilmente si sarebbero prodotti adoperando il legno.

Ho dovuto rinunziare a servirmi del magnetismo terrestre come forza direttrice, a causa delle inferriate, e, peggio ancora, dei copiosi ferramenti ond'erano munite le imposte e le porte; ed ho avuto ricorso alla sospensione bifilare, constatando poi che in tal modo avevo raggiunto maggior costanza nell'intensità della forza.

L'apparecchio, del quale mi sono valso, è composto della cassetta di vetro con piedi a vite, che serve nelle esperienze di Plateau sulle figure di equilibrio de'liquidi. Nel foro centrale del coperchio, pure di vetro, ho fissato la canna guernita in cima di ghiera metallica e cerchio diviso, che fa parte dell'elettrometro di Thomson, costruito dal meccanico Desaga di Heidelberg dietro le indicazioni di Kirchhoff. L'asticella cilindrica, che scorre a sfregamento dolce nella ghiera e che porta l'indice, è forata lungo il proprio asse pel tratto inferiore: ivi sulla base del cilindro, parallelamente ad essa e di faccia al foro, ho saldato un filo di rame del diametro di $0^{mm},75$, in guisa da lasciare scoperto il foro da una parte e dall'altra. Ho passato su questo filo di rame una bava di filugello, della quale ho annodati insieme i due capi, e vi ho appeso in basso con un gancio lo specchietto che si prolunga in una bacchetta cilindrica di vetro, fusa all'estremità inferiore, cosicchè riesce terminata da mezza sfera. Mi assicurava che la bacchetta prendesse la posizione verticale, quand' era sospesa, osservandone l'imagine riflessa sul mercurio.

La distanza fra il punto di sospensione del filo di bozzolo e il punto d'attacco dello specchietto era di 470^{mm}.

In mezzo alla cassetta di Plateau si trovava un bicchiere cilindrico di 70^{mm} di diametro (in una sola serie di osservazioni ho sostituito al bicchiere una vaschetta di vetro larga 103^{mm}), e la bacchetta veniva a pescare più o meno nei liquidi che vi introducevo. La cassetta conteneva inoltre un termometro diviso in quinti di grado, ed un altro bicchiere per accogliere sostanze disseccanti, acqua od altri liquidi, secondo i casi. Sul coperchio e davanti alla canna di vetro aveva fissato un secondo specchio, verso il quale puntando il cannocchiale, poteva assicurarmi che nel corso delle osservazioni non avvenivano spostamenti.

Nelle esperienze mi sono servito successivamente di tre diversi specchietti uniti a tre diverse bacchette, e questi apparecchi saranno indicati in seguito con I, II, III.

Il I pesava $3^{gr.},95$, aveva la bacchetta del diametro di $4^{mm},9$, il gancio, che serviva ad attaccarlo e però determinava la distanza fra i due tratti del filo all'estremità inferiore, era grosso $0^{mm},4$ e quando oscillava nell'aria presentava una durata d'oscillazione semplice $\tau = 7'',46$, ed un decremento logaritmico $\lambda = 0,0092$, chiamando così il logaritmo volgare del rapporto fra due ampiezze consecutive.

L'apparecchio II pesava $3^{gr.},83$, il diametro della bacchetta di vetro era di $5^{mm},5$, il gancio aveva la grossezza di $0^{mm},5$; nell'aria satura di vapore compieva un'oscillazione semplice in $\tau = 7'',47$ e presentava un decremento logaritmico $\lambda = 0,0119$, alla temperatura di $25°,5$.

Per l'apparecchio III: Peso $5^{gr.},98$, grossezza della bacchetta $5^{mm},5$, grossezza del gancio $0^{mm},3$; $\tau = 9'',03$; $\lambda = 0,0072$ nell'aria satura di vapor acqueo alla temperatura di $12°,8$.

I numeri dati per τ e λ sono le medie di molte osservazioni fatte anche in giorni diversi e sempre concordantissime.

Sul lembo del circolo diviso aveva fissate due morsette, contro le quali veniva ad appoggiarsi l'indice connesso col punto di sospensione de' fili, affinchè in ciascuna serie di osservazioni riuscisse costante il più possibile lo spostamento angolare che si dava all'apparecchio. E procedevo nel modo seguente. Cominciavo ad osservare, stando al cannocchiale, la posizione d'equilibrio per parecchi minuti di seguito, e talvolta anche per ore intere, al fine di apprezzare bene entro quali limiti fossero comprese le perturbazioni accidentali dovute a piccoli squilibri di temperatura che potevano destare delle correnti nell'aria o in seno al liquido, od anche a qualche leggiera trepidazione, specialmente nelle giornate ventose. Accertata la posizione di riposo, metteva in moto un metronomo, faceva cenno all'assistente d'avvicinarsi cautamente all'apparecchio; e ad un colpo convenuto del metronomo, egli spostava l'indice della sospensione bifilare dall'una all'altra delle morsette fissate sul disco diviso, ed io segnavo un punto sul conta-secondi di Breguet; poi l'assistente si allontanava dall'apparecchio per registrare le varie divisioni della scala, ch'io gli dettava mentre segnavo sul cronometro l'istante della loro coincidenza col reticolo del cannocchiale. Dopo qualche giorno di esercizio, tutto procedeva esattamente.

Per prepararmi la via alla spiegazione e discussione dei fenomeni che hanno tutto l'aspetto della elasticità susseguente, anzichè seguire l'ordine cronologico, comincierò col citare quelle osservazioni che accennano al solo attrito ordinario, le confronterò colla teoria matematica, la quale ne riceverà nuovo appoggio; e in pari tempo apparirà manifesto il grado di precisione di queste esperienze.

§ 3.

Fra gli altri anche Kirchhoff (¹), partendo dalle equazioni generali della idrodinamica nelle quali è tenuto conto dell'attrito conforme alla ipotesi espressa dalla (1) del § 1, ha trattato il caso di una sfera, immersa in un liquido viscoso indefinito, che oscilli attorno ad un suo diametro per effetto di una forza direttrice costante α^2, o

(¹) Gustav Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 381. Leipzig, 1876.

in altre parole, di un momento di rotazione $\alpha^2 \vartheta$, ove ϑ è lo spostamento angolare al tempo t; e ponendo la condizione che la velocità svanisca all'infinito, e sia uguale a quella della sfera nello strato che la tocca, è arrivato alle seguenti due soluzioni del problema:

$$\vartheta = Ce^{(a^2 - b^2)t} \cos 2\, abt \tag{2}$$

$$\vartheta = Ce^{-b^2 t}, \tag{3}$$

ove le costanti dipendono da α^2, dalla densità e dal coefficiente d'attrito del liquido, dal diametro e dal momento d'inerzia della sfera.

Ora io penso che queste formole si possano estendere anche al caso di un solido qualunque di rivoluzione che oscilli attorno al proprio asse entro un liquido, ed allora le costanti saranno naturalmente funzioni dei parametri di questo solido.

Inoltre risulta dal processo de' calcoli di Kirchhoff che esse debbano valere anche se il liquido, anzichè omogeneo, sia di densità e di viscosità variabili attraverso ai varî strati piani perpendicolari all'asse di rivoluzione. Ciò non di meno può sorgere dubbio se sieno applicabili al caso di più liquidi non miscibili sovrapposti, perchè allora intervengono nel fenomeno nuovi fattori dei quali i calcoli non tengono conto: voglio dire la tensione *capillare* delle superficie di separazione, e la curvatura dei menischi in prossimità del corpo solido. Ma se ben si riflette intorno alle proprietà della tensione superficiale, siffatto dubbio deve svanire.

Infatti lo strato superficiale di un liquido è bensì dotato di tensione, ed anzi spesso si suole paragonare ad una membrana elastica, ma non è men vero che tale confronto è tutt'altro che esatto; giacchè la forza elastica che si desta nella membrana dipende dalla sua maggiore o minore distensione e può esser diversa nelle varie direzioni, mentre la tensione di una lamina liquida rimane costante comunque si distenda, ed in ogni punto è la stessa in tutte le direzioni: per conseguenza dalla tensione superficiale non può derivare nessun lavoro resistente quando si tratti semplicemente di trasferire da un punto ad un altro della superficie libera (o di separazione fra due liquidi) le particelle che la compongono.— Non si richiede lavoro che quando si aumenta la superficie libera, lavoro che gl'Inglesi chiamano *energia superficiale di capillarità*.

Siamo condotti a queste conclusioni da tutte le ricerche sperimentali finora eseguite, e siamo quindi autorizzati a ritenere che lo strato, il quale separa due liquidi non miscibili, non alteri, pel solo fatto della tensione, le condizioni matematiche del problema. E se esso è diversamente denso e vischioso di ciascuno de' due liquidi, come risulterebbe da certe indagini che riferiremo in seguito, ciò non produrrà altro effetto che di aggiungere un nuovo strato diverso, a quelli che già si dovrebbero considerare se tale circostanza non si verificasse.

Quanto poi alla curvatura del menisco in vicinanza del corpo solido, è probabile che, per ragione di simmetria attorno all'asse di rotazione, e perchè non viene mai alterata durante il moto oscillatorio, essa non faccia che introdurre dei nuovi parametri nell'espressione delle costanti che compariscono nelle (2) e (3).

Tutte queste considerazioni m'indussero ad applicare le due formole al caso mio del cilindro che, parzialmente immerso in un liquido relativamente molto esteso, oscilla attorno al proprio asse, verticale, per effetto della sospensione bifilare; ed il risultato fu soddisfacentissimo, come si vedrà dai numeri che riferirò fra poco.

Veramente in questo caso il momento di rotazione è proporzionale al seno dello spostamento angolare, ma trattandosi sempre di piccolissime oscillazioni, si può ritenere proporzionale all'angolo, finchè rimangono costanti la lunghezza, la distanza, la tensione e la elasticità de' due fili. Per lo stesso motivo è affatto superfluo ridurre la durata d'oscillazione ad archi infinitesimi. Invece bisogna correggere le letture fatte direttamente sulla scala del cannocchiale, per ridurle ad archi. Ed a tal fine avverto che la scala, divisa in millimetri, era alla distanza $r = 1400^{mm}$ dallo specchietto mobile; che nei prospetti seguenti ho preso per unità una divisione della scala e che per conseguenza i decimi sono stimati ad occhio. Se la lettura fatta sulla scala è distante di n divisioni dal punto che si trova sotto l'asse del cannocchiale, la distanza angolare m corrispondente è data da:

$$m = n - \frac{n^3}{3r^2},$$

ed i numeri seguenti sono tutti corretti a questo modo: ma la correzione non arriva a 0,1 che oltre i 70^{mm} e non supera 1^{mm} che ben di rado.

Per l'applicazione della (2) noteremo che, indicata con τ la durata di un'oscillazione semplice e con δ il decremento logaritmico delle ampiezze, cioè il logaritmo naturale del rapporto k fra due ampiezze consecutive, risulta:

$$(4) \qquad \tau = \frac{\pi}{2ab}; \; \delta = (b^2 - a^2)\,\tau = \frac{b^2 - a^2}{2ab}\,\pi$$

e quindi la (2) diventa:

$$(5) \qquad \vartheta = C e^{-\frac{\delta}{\tau} t} \cos \frac{\pi}{\tau} t.$$

Prendendo a contare il tempo dall'istante in cui si sposta la sospensione bifilare da una posizione A all'altra B, C rappresenta la prima mezza oscillazione semplice; e se lo spostamento fosse istantaneo, dovrebbe trovarsi C esattamente uguale alla differenza delle due letture corrispondenti alle due posizioni di riposo A, B. Ma invece esso richiede un certo tempo (qualche decimo di secondo), e però, prescindendo anche dalle piccole perturbazioni inevitabili, quali sarebbero urti, scosse ecc., prodotte dall'assistente che s'avvicina e dà lo spostamento all'apparecchio, la forza direttrice non agisce con tutta la propria intensità sul principio della prima mezza oscillazione, come si suppone nella formola; e per conseguenza si può prevedere che questa dia per C un valore un poco maggiore del vero.

Dopo 24 ore che lo specchietto III (§ 2) era sospeso nell'apparecchio in un ambiente, reso saturo di vapor acqueo coll'aver versato nel bicchiere laterale dell'acqua piovana ed introdottovi un rotolo di carta bibula che occupava tutta l'altezza della cassetta, il 24 ottobre ho mesciuto nel bicchiere con una pipetta tanto olio d'uliva vergine (raccolto quest'anno dalla fattoria Bartolini di Bagnolo), previamente filtrato attraverso a carta svedese, fino al punto che vi pescasse solamente in parte la mezza sfera che termina la bacchetta di vetro. Alle $7^h\,55'$ pom. l'apparecchio fu abbandonato a sè; alle $10^h\,10'$ pom. il reticolo del cannocchiale coincideva colla divisione 391, 3 della scala, essendo la temperatura di $12^\circ,9$. E la mattina successiva furono fatte le osservazioni seguenti:

Tabella I.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
30 ottobre	Punti di riposo		Deviaz. estr.		Ampiezze		Differenze
12°.7	oss. α_0	calc. α'_0	oss. D_n	calc. ξ_n	oss α_n	calc. α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$
10h.50′ a.	A=392,2						
51	2						
52	2						
53	2						
54	2						
55	2						
56	2						
57	2						
58	3						
59	3						
11. 0	3						
1	2						
2	3						
2′.55″	3						
3′. 1″	Appoggio l'indice del micrometro da A, contro B.						
		B.					
10″,3			143,3	—89,83			
		224,2			138,0	137,83	— 0,2
19, 6			272,3	+48,00			
		4			73,4	73,61	+ 0,2
28, 8			198,9	—25,61			
		4			39,1	39,28	+ 0,2
38, 0			238,8	+13,67			
		3			21,0	20,96	0,0
47, 1			227,0	— 7,29			
		3			11,2	11,18	0,0
56, 3			228,2	+ 3,89			
		2			6,1	5,97	— 0,1
4′. 5″,6			222,1	— 2,08			
		2			3,3	3,19	— 0,1
14, 9			225,4	+ 1,11			
		3			1,7	1,70	0,0
24, 1			223,7	+ 0,59			
		3			1,0	0,91	— 0,1
33, 3			224,7	+ 0,32			
		3			0,6	0,49	— 0,1
?			224,1	— 0,17			
		2			0,2	0,26	+ 0,1
?			224,3	+ 0,09			
5′. 0″	B=224,2						
6	2						
7	3						
8	2						
9	3						
10	3						
11	3						
12	3						
13	3						
14	3						
15	3						
16	3						
3h.p.0	6						
4. 33	2						
5. 43	2						
9. 53	2						
12°.8							

$$\tau = \frac{73,8}{8} = 9'',23.$$

Decremento logaritmico a base 10, in media $\lambda = \delta \lg e = 0,2728$.

Gli altri numeri della precedente Tabella I furono ottenuti coll'ordine che segue:

1. . . . . Colonna VI. $\quad (-1)^n \alpha_n = D_n - D_{n+1}$

2. . . . . $\quad C = \dfrac{\sum\limits_1^{11}{}_n \alpha_n}{(1+e^{-\delta})\sum\limits_1^{11}{}_n e^{-n\delta}} = 168,57$

3. . . . . Colonna V. $\quad \vartheta_n = (-1)^n C e^{-n\delta}$

4. . . . . Colonna VII. $\quad (-1)^n \alpha'_n = \vartheta_n - \vartheta_{n+1}$

5. . . . . Colonna III. $\quad \alpha'_0 = \dfrac{D_n - \vartheta_n + D_{n+1} - \vartheta_{n+1}}{2}$.

La distanza angolare fra la posizione d'equilibrio iniziale $A = 392,2$ e la finale $B = 224,3$ è $167,9$, e quindi presenta una differenza in meno di soli $0,7$ sul valore ricavato per C dalle osservazioni rimanenti, differenza che, quantunque di pochissimo superiore agli errori d'osservazione, è tuttavia nel senso delle nostre previsioni.

Pel resto l'accordo fra l'esperienza e la formola (2) non potrebbe esser davvero migliore, come appare dalla colonna VIII che contiene le differenze fra le ampiezze calcolate e le osservate; e dalla colonna III la quale indica come subito fin dal principio, il moto oscillatorio si compiesse intorno alla posizione definitiva d'equilibrio.

Il 30 ottobre alle 10 pom. ho aggiunto 10 c. c. d'olio e la mattina successiva ho fatto le osservazioni della Tabella II.

Siccome in questo caso non si dispone che di due ampiezze, e la seconda $< 1^{mm}$ non è stimata che ad occhio, così sarà più esatto dedurre il decremento logaritmico λ dalla costante C e per questa ricorrere all'osservazione precedente, che cioè deve risultare pochissimo maggiore della differenza fra le due posizioni di riposo:

$$395,5 - 226,0 = 169,5.$$

Assumeremo dunque $C = 170$, e per avere l'ampiezza d'oscillazione durante lo spostamento del micrometro, aggiungeremo al valore di C la differenza fra il primo punto di ritorno D_1 ed il punto di riposo finale A:

$$170 + 405,5 - 395,5 = 180.$$

Allora sarà:

$$\lambda = \text{lg. } 180 - \text{lg. } 10,3 = 1,2425;$$

e calcoleremo gli altri numeri come nel caso precedente.

Tabella II.

31 ottobre — 12°,8	Punti di riposo oss.	Punti di riposo calc. ϱ'_0	Deviaz. estreme oss. D_n	Deviaz. estreme calc. ϑ_n	Ampiezze oss. α_n	Ampiezze calc. α'_n	Differenze $\alpha'_n - \alpha_n$
11h. 6′ a.	$B = 225{,}8$						
7	9						
8	9						
9	226,0						
10	0						
11	0						
12	0						
13	0						
14	0						
15	0						
16	0						
17	0						
18	0						
18′.58″,5	1						
19. 4, 5	Appoggio l'indice da *B* contro *A*.						
16, 6		*A*	405,5	—9,72	10,3	10,28	0,0
29, 0		395,8	395,2	+0,56	0,5	0,59	+ 0,1
42, 1		395,7	395,7	—0,03			
20′ 0″	$A = 395{,}6$						
21	6						
22	5						
23	5						
24	5						
25	5						
26	5						
27	5						
28	5						
29	5						
30	5						
31	5						
32	5						
33	5						
34	5						
12°,8							

$$\tau = \frac{24{,}5}{2} = 12'',25; \ \lambda = 1{,}2425.$$

Alle 1 pom. del 31 ottobre aggiunsi altre 10 c. c. d'olio, e il moto osservato la sera stessa alle 8 $^1/_4$ era divenuto aperiodico, talchè erano da confrontarsi le osservazioni colla formola (3), la quale si può anche scrivere così:

$$(6) \qquad \lg y = \lg C - t \,.\, b^2 \lg e \qquad\qquad (7) \qquad t = \frac{\lg C - \lg y}{b^2 \lg e}\,.$$

Applicando il metodo de' minimi quadrati alla (6), ho determinato i valori delle costanti colle formole:

$$(8) \quad \lg C = \frac{(\Sigma t^2{}_n)\,(\Sigma \lg y_n) - (\Sigma t_n)\,(\Sigma t_n \lg y_n)}{n \Sigma t^2{}_n - (\Sigma t_1)^2}; \qquad b^2 \lg e = \frac{(\Sigma t_n)\,(\Sigma \lg y_n) - n \Sigma t_n \lg y_n}{n \Sigma t^2{}_n - (\Sigma t_n)^2}$$

senza però tener conto del valore di y corrispondente a $t = 0$; e poi li ho introdotti nella (7) per calcolare t.

Nella seguente Tabella III t è espresso in secondi ed è contato dall'istante, nel quale veniva spostato l'indice della sospensione bifilare, e che è segnato in capo a ciascuna colonna; le y sono le distanze angolari dalla posizione d'equilibrio finale.

Tabella III.

31 ottobre 8h15'3" pom. — 12°,8

y	t oss.	t calc.	Diff.
169,4	0,0		
91,0	5,0	5,08	+0,1
31,1	10,4	10,31	—0,1
11,1	15,4	15,34	—0,1
3,1	21,5	21,55	+0,1
1,1	26,6	26,61	0,0

$b^2 = 0,2052$ $C = 258,1$

12°.8

1. novembre 10h40'6" a. — 12°,8

y	t oss.	t calc.	Diff.
168,8	0		
58,7	7,4	7,56	+0,2
28,0	10,9	11,02	+0,1
31,1	14,9	14,57	—0,3
4,2	20,1	19,90	—0,2
1,2	25,5	25,76	+0,3

$b^2 = 0.2137$ $C = 295,2$

12°,9

Alle 11h15' a. aggiungo altri 10 c.c. d'olio.

2 novembre 10h43'58" a. — 13°,0

y	t oss.	t calc.	Diff.
170,3	0		
89,9	6,8	6,70	—0,1
70,0	8,8	8,76	0,0
50,0	11,8	11,67	—0,1
30,0	15,9	16,08	+0,2
20,0	19,6	19,58	0,0
10,0	25,4	25,57	+0,2
6,0	29,8	29,98	+0,2
3,0	35,8	35,97	+0,2
1,0	45,8	45.46	—0,3

$b^2 = 0,1158$ $C = 193,1$

13°,0

Alle 11h12' a. aggiungo altri 10 c.c. d'olio.

2 novembre 5h58'4" p. — 13°,1

y	t oss.	t calc.	Diff.
169,0	0		
120,7	5,0	5,03	0,0
80,8	9,4	9,55	+0,2
55,8	13,8	13,74	—0,1
40,9	17,3	17,25	0,0
26,0	22,3	22,37	+0,1
20,1	24,9	25,27	+0,4
13,1	30,1	30,17	+0,1
8,2	35,6	35,39	—0,2
6,2	38,8	38,55	—0,2
4,2	43,3	42,95	—0,3
2,2	50,2	50,25	+0,1
1,3	56,6	56,19	—0,4

$b^2 = 0,0886$ $C = 188,5$

13°,2

9h25' p. aggiungo 10 c.c. d'olio.

4 novembre 10h45'2" a. — 12°,4

y	t oss.	t calc.	Diff.
169,5	0		
99,2	8,8	8,92	+0,1
79,3	12,3	12,28	0,0
59,3	16,4	16,44	0,0
49,3	18,8	19,09	+0,3
39,3	22,4	22,34	—0,1
29,3	26,6	26,54	—0,1
19,3	32,8	32,52	—0,3
12,3	39,2	38,98	—0,2
9,3	43,3	42,98	—0,3
6,3	48,9	48,56	—0,3
4,3	53,8	54,03	+0,2
2,3	62,7	63,00	+0,3
1,3	71,0	71,18	+0.2

$b^2 = 0,0698$ $C = 186,7$

12°,6

Se si tien conto della difficoltà maggiore di far le letture in questo caso, si deve riconoscere che anche la formola (3) del moto aperiodico corrisponde egregiamente alla realtà.

Ho un'altra serie di esperienze simile alla precedente, fatta dal 7 al 18 settembre con olio d'uliva vergine della fattoria Corsini a Mezzomonte e collo specchietto II, a temperature prossime ai 20°. Ma siccome i risultati non differiscono dai precedenti, così stimo inutile riferirla per intero, e mi limito a dire che dopo aver tracciate una sopra l'altra le 4 curve rappresentanti le ultime esperienze fatte in condizioni identiche il giorno 13 alla temperatura di 21°, 8 a 21°, 9; il 14 dai 21°, 4 ai 21°, 6; il 15 dai 21°, 5 ai 21°, 8 (il 16 e 17 riposo) ed il 18 settembre dai 20°, 3 ai 20°, 5; ho potuto constatare che le varie misure erano benissimo concordanti, perchè quelle curve non arrivavano mai a scostarsi di un tratto corrispondente ad una divisione della scala.

Non credo superfluo citare ancora qualcuna delle esperienze fatte sull'acqua, molto meno vischiosa dell'olio, alle quali è applicabile la formola (2) del moto periodico.

Ho adoperato lo specchietto I, ma il filo di bozzolo era 5^{cm} più corto di quando aveva determinato la durata di oscillazione e il decremento logaritmico riportati al § 2. L'acqua distillata, invece che nel bicchiere centrale, era contenuta nella vaschetta del diametro di 103^{mm}. Procedei colle più scrupolose cautele per lavare perfettamente e il recipiente e la bacchetta di vetro, per filtrare più volte l'acqua, per tenerla esposta il meno possibile all'aria libera, per chiudere perfettamente la cassetta di Plateau. Queste operazioni vennero eseguite la mattina del 24 agosto; ed alle $10^h\,35'$ ant. l'apparecchio fu abbandonato a sè.

Lo stesso giorno e i giorni successivi furono fatte le esperienze spostando l'indice del micrometro dall'una all'altra posizione d'equilibrio: cosicchè gli spostamenti avvenivano alternativamente un giorno a destra e il successivo a sinistra.

Dal seguente specchio appare come non si possa dedurne un'influenza spiccata del tempo sulla durata d'oscillazione e sul decremento logaritmico.

Tabella IV.

24 agosto $5^h\,47'$ p.	25 agosto $9^h\,24'$ a.	26 agosto $9^h\,44'$ a.	27 agosto $9^h\,39'$ a.	28 agosto $9^h\,41'$ a.	29 agosto $9^h\,38'$ a.
26°,1	25°,5	25°.5	25°,3	25°,6	25°,6
$\tau = 7'',53$ $\lambda = 0,0405$	$\tau = 7'',68$ $\lambda = 0,0414$	$\tau = 7'',62$ $\lambda = 0,0443$	$\tau = 7'',74$ $\lambda = 0,0436$	$\tau = 7'',75$ $\lambda = 0,0445$	$\tau = 7'',75$ $\lambda = 0,0443$
25°,8	25°,8	25°,8	25°,5	25°,8	25°,8

Trascriverò per intero i soli numeri dell'ultimo giorno, più che altro, per mettere in evidenza come fin da principio le oscillazioni avvenissero intorno alla posizione definitiva di equilibrio.

Tabella V.

Punti di riposo		Deviazioni estreme		Ampiezze		Diff.	29 agosto
oss.	calc. α'_0	oss. D_n	calc. ϑ_n	oss. α_n	calc. α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$	
A_1=432,2	. . . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .		9h38′12″; 25°,6
		?	—261,83		498,25		? Esce dalla scala
		380,6	+236,42		449,90		
		?	—213,48		406,25		
		337,7	+192,77		366,83		
		?	—174,06		331,23		
	B = 145,3	302,3	+157,17	298,8	299,09	+0,3	
	4	3.5	—141,92	270,0	270,07	+0,1	
	4	273,5	+128,15	243,7	243,86	+0,2	
	5	29,8	—115,71	220,1	220,19	+0,1	
	3	249.9	+104,48	199,0	198,83	—0,2	
	5	50,9	— 94,35	180,0	179,55	—0,4	
	5	230,9	+ 85,20	162,6	162,13	—0,5	
	3	68,3	— 76,93	146,5	146,40	—0,1	
	4	214.8	+ 69,47	132,0	132.20	+0,2	
	5	82,8	— 62,73	119,2	119,37	+0,2	
	4	202,0	+ 56,64	107,7	107,78	+0,1	
	5	94,3	— 51,14	97,4	97,32	—0,1	
	5	191,7	+ 46,18	87,9	87,88	0,0	
	5	103,8	— 41,70	79,4	79,35	0,0	
	5	183,2	+ 37,65	71,8	71,65	—0,1	
	5	111,4	— 34,00	64,8	64,70	—0,1	
	4	176,2	+ 30,70	58,6	58,42	—0,2	
	3	117,6	— 27,72	52,8	59,75	0,0	
	4	170,4	+ 25,03	47,5	47,63	+0,1	
	4	122,9	— 22,60	42,9	43,01	+0,1	
	5	165,8	+ 20,41	38,7	38,84	+0,1	
	4	127,1	— 18,43	34,9	35,07	+0,2	
	3	162,0	+ 16,64	31,7	31,67	0,0	
	4	130,3	— 15.03	28,7	28,60	—0,1	
	4	159,0	+ 13,57	25,9	25.82	—0,1	
	3	133,1	— 12,25	23,2	23,31	+0,1	
	3	156,3	+ 11,06	20,9	21,05	+0,2	
	3	135,4	— 9,99	18,9	19,01	+0,1	
	3	154,3	+ 9,02	17,1	17,12	0,0	
		137,2	— 8,10				
B = 145,2	. . . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	10h20′ a.; 25°,8

$A—B$=287,0; e il calcolo dà C=290,0, ossia alquanto maggiore, come avevamo preveduto.

§ 4.

Finora abbiamo trovato che si verifica senz' alcuna eccezione la teoria matematica della viscosità, che parte dall' ipotesi di Newton espressa dalla (1), § 1; e quindi rimangono confermate le nostre previsioni che la superficie libera di un liquido, quantunque dotata di tensione, pure si debba comportare precisamente come uno degli strati interni; senza però che ne venga pregiudicata la questione se lo strato superficiale sia diverso per densità e viscosità dagli strati inferiori.

Che la densità debba essere diversa è ammesso necessariamente in ogni teoria della capillarità, e che sia diversa anche la viscosità, fu opinato prima da Cartesio, Rumford e da altri fisici, e poi fu ammesso da Plateau in seguito ad alcune sue ricerche, sulle quali sarà bene che ci tratteniamo alquanto.

Plateau [1] metteva in bilico un ago romboidale di declinazione sopra un pernio coincidente coll'asse di un vaso cilindrico; per mezzo di una calamita conduceva l'ago nella posizione perpendicolare al meridiano magnetico; mesceva un liquido nel vaso fino a che toccasse la sola faccia inferiore dell'ago; aspettava che il liquido si mettesse in quiete; lasciava libero l'ago e misurava il tempo da questo impiegato a percorrere i primi 85°. Poi ripeteva la medesima determinazione avendo aggiunto tanto liquido da sommergere l'ago per intero.

Così egli constatò che per alcuni liquidi quel tempo era maggiore nel primo caso che nel secondo, mentre per altri accadeva l'opposto; e ne conchiuse che quelli hanno maggiore e questi minor viscosità nello strato superficiale che nell'interno della loro massa. Indi ponendo in relazione siffatta viscosità diversa con la tensione superficiale, fece una ingegnosa teoria della formazione più o meno facile delle lamine liquide e della loro maggiore o minore persistenza, corredando la propria esposizione di copiose e minute osservazioni di fatti.

Due anni dopo il prof. Luvini [2] espresse il dubbio che i fenomeni descritti da Plateau fossero semplici effetti di viscosità; e ciò fondandosi sopra i risultati delle proprie esperienze, nelle quali aveva sostituito all'azione direttrice del magnetismo terrestre la torsione del filo metallico di una bilancia di Coulomb, sospendendovi orizzontalmente delle lastre di sostanze e forme diverse. Egli trovò che la velocità angolare diminuiva da un'esperienza all'altra, sebbene tutte le condizioni rimanessero apparentemente inalterate, e ne inferì che la resistenza al moto aumenta colla durata dell'esposizione del liquido all'aria (o ad un altro gas indifferentemente), e del suo contatto col solido. Riflettendo poi che tale aumento di resistenza non si può attribuire ad una variazione nella tensione superficiale la quale, anzichè aumentare, diminuisce col tempo [3], il prof. Luvini conchiuse che le cause del fenomeno devono essere l'imbrattamento della superficie libera e l'adesione via via crescente fra il liquido e il solido.

Gli effetti relativamente grandi prodotti anche da minime impurità delle superficie liquide, sono ormai noti generalmente dopo i lavori di Tolimson e di Quincke [4], ed è pur noto a tutti che basta tener immerso per lungo tempo un solido nell'acqua, perchè ne venga perfettamente bagnato; ed allora spostando il solido nel liquido, si può ammettere che lo strato aderentevi si sposti con esso, e però in tal caso il coefficente d'attrito esterno si suole ritenere uguale a quello di viscosità: mentre invece quando il solido non venga bagnato, e quindi la sua superficie scorra sul liquido, bisogna mettere in calcolo un coefficente speciale. Per questa ragione ho sempre avuto cura, a meno che non ne faccia espressa avvertenza, di tenere la bacchetta di vetro immersa almeno per 24^h nel liquido da sperimentare.

(1) Plateau, *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur*, 8e Série. Mém. de l'Acad. R. de Belgique T. XXXVII, 1868.

(2) Luvini, *Esperienze ed osservazioni sull'adesione fra solidi e liquidi*. Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino, 1870. Philosophical Magazine for September 1870.

(3) Hagen, *Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten*. Annalen von Poggendorff Vol. LXVII p. 1. 1845.

(4) Tolimson, Philosoph. Magaz. for October 1861, and 1868. — Quincke, *Ueber die Capillaritäts-Erscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten*, Pogg. Ann. Vol. CXXXIX p. 1, 1870. — N. Cimento Ser. 2 Vol. IV p. 70.

Mi par dunque indubitato che l'aderenza e l'imbrattamento superficiale del liquido abbiano dovuto esercitare un'influenza non lieve sui risultati sperimentali di Plateau, ma non per questo valgono a negare il concetto della viscosità superficiale.

L'influenza poi della forma della lastra era prevedibile, ed il prof. Luvini volle distinguere la resistenza *superficiale* dalla resistenza *lineare*, e trovò che il *contorno* di un disco circolare ruotante sul proprio centro alla superficie di un liquido, non incontra che poca o punta resistenza; mentre le porzioni dei contorni inclinate sulla direzione del moto incontrano una resistenza uguale a quella delle loro projezioni sulla normale alla direzione medesima.

Più tardi il prof. Marangoni pubblicò una sua Memoria ([1]) sullo stesso argomento, senza conoscere quella del prof. Luvini, ed anch'egli segnalò l'influenza dell'imbrattamento superficiale: anzi mostrò con molta sagacia che, avendo la superficie imbrattata una tensione minore della superficie fresca, dallo spostamento dell'ago di Plateau, che mette a nudo gli strati sottostanti, deve risultare un eccesso di tensione contraria al moto: talchè la superficie si deve contenere come se fosse dotata di elasticità vera e propria. Con questo concetto, ch'egli chiama della *elasticità superficiale*, e colla deformazione dei menischi il prof. Marangoni spiega i varî fatti osservati da Plateau, e non crede che si debba ammettere con lui una viscosità *superficiale* diversa dalla viscosità *interna*.

Senza entrare della discussione particolareggiata del lavoro del prof. Marangoni e della risposta che vi fece Plateau ([2]), mi fermerò sopra le determinazioni del primo che si riferiscono ad un disco di ottone il quale, secondo che affiorava od era immerso in un dato liquido, impiegava tempi diversi a ruotare di un certo angolo per effetto dell'azione terrestre su di un ago magnetico rigidamente connesso col disco. Il rapporto fra i due tempi risultò costantemente < 1, e precisamente compreso fra 0,86 e 0,68 pei varî liquidi cimentati, essendo maggiore pei meno vischiosi, indifferentemente poi se fossero di quelli ai quali Plateau attribuisce un eccesso o un difetto di viscosità superficiale sulla viscosità interna.

Ora, se si ritiene che nel primo caso il liquido possa considerarsi limitato dalla sola superficie libera ed esteso indefinitamente per ogni altro verso, e nel secondo sia invece infinito in tutte le direzioni; e se inoltre si trascurano le perturbazioni possibili dovute alle condizioni speciali in cui si trova lo strato della superficie: torna evidente che nel primo caso la resistenza dev'essere la metà che nel secondo. E se il prof. Marangoni la trovò maggiore, si può tutto al più supporre che ciò derivi in gran parte dall'attrito dell'aria sulla faccia superiore del disco e dalle resistenze della sospensione; ma non mi pare che si possa dedurne con certezza una viscosità maggiore alla superficie che nell'interno, e neppure che tale eccesso di viscosità si possa negare.

Il problema rimane adunque insoluto tanto per le superficie fresche quanto per le imbrattate, sebbene questo caso del disco sia appunto quello il quale, studiato più

([1]) Marangoni, *Sul principio della viscosità superficiale dei liquidi stabilito dal sig. J. Plateau.* N. Cimento S. 2. Vol. V, VI, aprile 1872.

([2]) J. Plateau, *Réponse aux objections de M. Marangoni contre le principe de la viscosité superficielle des liquides.* Bulletins de l'Acad. R. de Belgique, 2.e Série T. XXXIV, novembre 1872. — N. Cimento S. 2. Vol. VII, VIII p. 370.

minuziosamente, prometta di darne la chiave; perchè in esso non intervengono nè le deformazioni del menisco, nè la cosidetta *elasticità superficiale* del prof. Marangoni, la quale è dovuta all'imbrattamento e per manifestarsi richiede che gli strati inferiori del liquido siano messi allo scoperto.

Molto simile a questo del disco è il caso mio del cilindro parzialmente immerso, ed ora riferirò alcune esperienze dalle quali risulta chiaramente come una superficie liquida possa in alcune circostanze acquistare, piuttosto che un semplice aumento di viscosità, tutte le caratteristiche di quelle peculiari azioni molecolari che si sono finora osservate in varî solidi; come i metalli, il vetro e la gomma elastica, e che si sogliono comprendere nella denominazione di elasticità susseguente.

§ 5.

Comincierò con una serie di esperienze da me fatte collo specchietto I (§ 2) sull'acqua distillata, senz' usare la cautela di filtrarla e di proteggerla dal pulviscolo atmosferico prima di rinchiuderla nella cassetta di vetro.

Questa serie abbraccia un tempo piuttosto lungo, e precisamente dal 25 luglio al 24 agosto: e credo bene di riferirla con qualche diffusione per mostrare come gradatamente vada destandosi e poi aumentando la disposizione molecolare che ci preoccupa, e così gettare un poco di luce sul fenomeno ancora tanto oscuro della elasticità susseguente.

Il 25 luglio alle $8^h\,9'$ ant. ho introdotto l'acqua nel bicchiere, e nel giorno stesso e nei successivi 26 e 27 ho fatto delle esperienze preliminari per ricercare la posizione più acconcia ove fissare le morsette sul disco diviso e dove collocare il cannocchiale.

Nel prospetto seguente sono registrate alcune esperienze de' primi giorni, riserbando le altre pel § 6. In capo a ciascuna esperienza è notata l' ora nella quale avvenne lo spostamento della sospensione bifilare, appoggiando l'indice dall'una morsetta all'altra.

La prima colonna contiene le deviazioni estreme D_n quali furono osservate sulla scala, ma corrette per ridurle ad archi. Nella seconda colonna si trovano le ampiezze d'oscillazione, dalle quali fu dedotto il valor medio del decremento logaritmico λ, segnato in basso. I numeri ω_n della terza colonna, che rappresentano le posizioni istantanee d'equilibrio attorno alle quali si compiono le singole oscillazioni, furono calcolati con la nota formola

$$\omega_n = D_{n+1} + \frac{D_n - D_{n+1}}{1 + k}$$

ove k è il rapporto medio fra due ampiezze consecutive: oppure, gli ultimi, furono osservati direttamente quando le oscillazioni erano cessate, ed allora accanto a ciascuno è segnato l'istante dell'osservazione.

La differenza fra ciascuna ω_n e l'ultima determinata è inscritta nella quarta colonna ed è preceduta dal segno $+$ o $-$ secondo che la posizione istantanea d'equilibrio era compresa fra la iniziale e la finale, oppure si trovava oltre quest'ultima.

Riferisco per brevità la prima esperienza di ciascun giorno omettendo le altre, ma indicando in basso di ciascuna colonna l'ora nella quale l'apparecchio fu abbandonato a sè: talchè da quell'ora all'altra segnata in capo alla colonna seguente, tutto era rimasto in assoluto riposo.

Tabella VI.

27 luglio 6h9′50″ pom.

D_n	α_n	ω_n	
401,6		B	
76,1	325,5	236,2	+0,2
391,5	315,4	6,3	+0,3
87,2	304,3	6,9	+0,9
381,8	294,6	6,9	+0,9
96,4	285,4	6,8	+0,8
373,7	277,3	7,3	+1,3
104,7	269,0	7,0	+1,0
363,7	259,0	6,3	+0,3
113,4	250,3	6,5	+0,5
356,8	243,4	6,9	+0,9
121,0	235,8	7,0	+1,0
348,5	227,5	6,6	+0,6
128,3	220,2	6,7	+0,7
341,7	213,4	6,7	+0,7
135,3	206,4	6,8	+0,8
334,8	199,5	6,7	+0,7
141,2	193,6	6,4	+0,4
328,7	187,5	6,5	+0,5
147,2	181,5	6,5	+0,5
322,9	175,7	6,5	+0,5
151,4	171,5	5,8	−0,2
317,4	166,0	5,7	−0,3
158,1	159,3	6,5	+0,5
312,5	154,4	6,6	+0,6
36 oscillazioni semplici			
259,8			
213,2	46,6	6,1	+0,1
258,2	45,0	6,1	+0,1
214,6	43,6	6,0	0,0
256,9	42,3	6,1	+0,1
216,0	40,9	6,1	+0,1
255,4	39,4	236,0	0,0

$\lambda = 0,0141$

11h0′ p.

28 luglio 7h10′45″ ant.

D_n	α_n	ω_n	
324,9		A	
492,8	167,9	411,0	+0,3
332,9	159,9	0,9	+0,4
485,3	152,4	1,0	+0,3
340,1	145,2	0,8	+0,5
478,8	138,7	1,2	+0,1
346,7	132,1	1,1	+0,2
472,2	125,5	1,0	+0,3
352,5	119,7	0,8	+0,5
466,2	113,7	0,8	+0,5
358,0	108,2	0,7	+0,6
461,1	103,1	0,8	+0,5
362,0	99,1	0,3	+1,0
456,3	94,3	0,3	+1,0
367,3	89,0	0,7	+0,6
453,3	86,0	1,4	−0,1
371,1	82,2	1,2	+0,1
448,6	77,5	0,8	+0,5
5 oscillazioni semplici			
381,8			
438,9	57,1	1,1	+0,2
384,5	54,4	1,0	+0,3
436,6	52,1	1,2	+0,1
386,9	49,7	1,1	+0,2
434,1	47,2	1,1	+0,2
389,4	44,7	1,2	+0,1
432,0	42,6	1,2	+0,1
391,3	40,7	1,1	+0,2
430,3	39,0	1,3	0,0
393,3	37,0	1,3	0,0
428,4	35,1	1,3	0,0
395,0	33,4	1,3	0,0
426,9	31,9	1,3	0,0
396,5	30,4	1,3	0,0
425,4	28,9	1,3	0,0

$\lambda = 0{\cdot}0218$

7h19′ p.

29 luglio 10h35′50″ ant.

D_n	α_n	ω_n	
381,6		B	
120,6	261,0	244,4	−0,2
356,4	235,8	4,5	−0,1
143,4	213,0	4,5	−0,1
336,1	192,7	4,7	+0,1
162,0	174,1	4,6	0,0
319,4	157,4	4,7	+0,1
177,3	142,1	4,7	+0,1
305,7	128,4	4,8	+0,2
189,9	115,8	4,8	+0,2
294,8	104,9	5,0	+0,4
200,0	94,8	5,0	+0,4
285,3	85,3	4,8	+0,2
208,4	76,9	4,9	+0,3
277,9	69,5	4,9	+0,3
215,0	62,9	4,8	+0,2
271,8	56,8	4,9	+0,3
220,7	51,1	4,9	+0,3
266,8	46,1	4,9	+0,3
225,1	41,7	4,9	+0,3
262,7	37,6	4,9	+0,3
228,8	33,9	4,9	+0,3
259,3	30,5	4,8	+0,2
231,6	27,7	4,7	+0,1
256,5	24,9	4,7	+0,1
233,9	22,6	4,6	0,0
254,2	20,3	4,6	0,0
236,0	18,2	4,6	0,0
252,0	16,0	4,4	−0,2
11h39′30″ a.		oss. 244,6	0,0

$\lambda = 0,0444$

11h45′0″ p.

30 luglio 10h29′2″ ant.

D_n	α_n	ω_n	
483,3		A	
346,1	137,2	406,8	+3,9
456,3	110,2	7,6	+3,1
369,4	86,9	7,8	+2,9
438,9	69,5	8,2	+2,5
384,3	54,6	8,4	+2,3
427,8	43,5	8,6	+2,1
393,5	34,3	8,7	+2,0
421,1	27,6	8,9	+1,8
399,5	21,6	9,1	+1,6
416,7	17,2	9,1	+1,6
403,1	13,6	9,2	+1,5
414,0	10,9	9,2	+1,5
405,6	8,4	9,3	+1,4
412,4	6,8	9,4	+1,3
407,0	5,4	9,4	+1,3
411,2	4,2	9,4	+1,3
408,1	3,1	9,5	+1,2
10h43′0″		oss. 410,7	0,0

$\lambda = 0,1009$

6h20′ p.

—

31 luglio
Completo riposo

1 agosto 10h11′6″ ant.

D_n	α_n	ω_n		λ_n
324,9		B		
212,1	112,8	258,5	18,5	0,1794
286,7	74,6	256,0	16,0	1371
232,3	54,4	4,7	11,7	1829
268,0	35,7	3,3	14,3	1311
241,6	26,4	2,5	12,5	1886
258,7	17,1	1,7	11,7	1224
245,8	12,9	1,1	11,1	2130
253,7	7,9	0,4	10,4	0914
247,3	6,4	249,9	9,9	2264
251,1	3,8	9,5	9,5	0747
247,9	3,2	9,2	9,2	2498
249,7	1,8	9,0	9,0	0249
248,0	1,7	8,7	8,7	2762
248,9	0,9	8,5	8,[illegible]	0,9128—1
247,8	1,1	8,3	8,3	
		oss.		
10h13′.25″		217,0	7,0	
14′. 9″		246,0	6,0	
15. 7		245,0	5,0	
17. 1		244,0	4,0	
19. 39		243,0	3,0	
23. 50		242,0	2,0	
32. 10		241,0	1,0	
39. 30		240,0	0,0	
11h 2′.50″		240,0	0,0	

$\lambda = 0,1557, \quad \tau = 6''706$

Da una prima ispezione del prospetto si scorge come λ, e quindi lo smorzamento, vada via via aumentando. La prevalenza dei segni + nella IV colonna indica che le oscillazioni, contrariamente a quanto avveniva nelle esperienze de' paragrafi precedenti, tendono a compiersi intorno ad una posizione intermedia: ma la piccolezza di quei valori e la loro irregolarità nei primi tre giorni non permetterebbero ancora di stabilire questo fatto con certezza.

Invece nel quarto giorno (30 luglio) lo spostamento progressivo della posizione d'equilibrio non lascia verun dubbio.

Nell'esperienza del 1 agosto ho poi aggiunto una quinta colonna per segnarvi i decrementi logaritmici dedotti da due ampiezze consecutive: e mostrare come sieno soggetti alle seguenti leggi, verificate senza eccezione anche in tutte le altre numerosissime esperienze delle quali non do cenno.

1. Chiamando *andata* l'ampiezza dell'oscillazione semplice che si compie verso la posizione finale d' equilibrio, e *ritorno* quella diretta verso la posizione iniziale; si scorge che il decremento logaritmico, e quindi il rapporto, di ciascun ritorno all'andata successiva è minore dei due decrementi, da andata e ritorno, fra i quali è compreso. In guisa che, se non vi fosse smorzamento, il ritorno sarebbe minore dell'andata.

2. I rapporti dei ritorni alle andate vanno diminuendo; mentre invece vanno aumentando i rapporti delle andate ai ritorni. Cosicchè bisogna conchiudere che le ampiezze di ritorno decrescono più rapidamente di quelle dell'andata.

Ora, esaminando i risultati numerici che esprimono le osservazioni fatte da F. Neesen sul *cautsciuc* (1), si vede che essi pure seguono queste due leggi.

Lo spostamento continuo della posizione di equilibrio, registrato nella quarta colonna del 1 agosto, è abbastanza rilevante e seguita anche dopo che le oscillazioni sono spente.

§ 6.

Ma avanti di procedere nella relazione delle mie esperienze, stimo opportuno di dare un cenno della teoria proposta da Boltzmann per ispiegare la elasticità susseguente: e così risparmierò delle inutili ripetizioni di numeri, giacchè di fronte ai risultati dell'osservazione potrò mettere subito i risultati teorici corrispondenti.

Le ricerche di Weber e di Kohlrausch (2) condussero a formole d'interpolazione le quali, se anche le esprimono bene, sono destituite affatto di ogni carattere teorico; e le considerazioni di quegli scienziati, che fanno risiedere la causa del fenomeno nelle rotazioni delle molecole, sono ingegnose, ma naturalmente non danno formole da potersi cimentare coll'esperienza.

Le misure fatte dal F. Neesen sulla gomma elastica ed espresse con buona approssimazione da una sola funzione esponenziale per tempi brevi, e dalla somma di due per tempi più lunghi, sembravano venire in appoggio dalla teoria di O. E. Meyer fondata

(1) Si trovano registrati da pag. 510 a pag. 515 del Vol. CLIII degli Annali di Poggendorff.

(2) F. Kohlrausch, *Ueber die elast. Nachw. bei der Torsion.* Pogg. Ann. Vol. XIX p. 337. 1863. — *Beiträge zur Kenntniss der elast. Nachw.* Pogg. Ann. CXXVIII p. 1. 1866. — *Experimental Untersuch. ü. d. elast. Nachw. bei d. Torsion, Ausdehnung und Biegung.* Pogg. Ann. CLVIII p. 337, 1876.

sopra il semplice attrito interno. Ma Kohlrausch [1] mostrò come l'accordo potesse esser fortuito, appunto perchè veniva rappresentato un piccolo tratto del moto e perchè bisognava determinare molte costanti; ed in seguito Neesen medesimo [2] convenne che quelle sue espressioni non avevano altro valore che di formole d'interpolazione.

Dimostrato da Boltzmann come non basti la semplice viscosità interna a spiegare la elasticità susseguente, furono da lui gettate le basi di una teoria, la quale quantunque non assegni le cause *fisiche* del fenomeno, pure ne raccoglie le leggi sotto un punto di vista che promette bene [3].

Boltzmann parte dal concetto che la forza necessaria per produrre una data deformazione di un corpo, non dipenda unicamente dalle tensioni attuali delle sue parti, ma anche dalle anteriori; e che una tensione eserciti un'influenza tanto minore quanto maggiore è il tempo decorso da che ebbe luogo. E precisamente la forza deformatrice dovrebbe risultare scemata da una deformazione, avvenuta precedentemente nello stesso verso, di una quantità proporzionale alla grandezza e alla durata di quella deformazione, e ad una funzione del tempo decorso da che essa ebbe luogo: funzione questa dipendente dalla natura del corpo e da determinarsi sperimentalmente.

Restringendoci al caso nostro che le deformazioni consistano in rotazioni delle parti di un sistema attorno ad un asse: supponiamo che al tempo τ e durante l'elemento $d\tau$ lo spostamento angolare sia dato da ω. Per effetto di questo spostamento il sistema, ricondotto dopo il tempo $t-\tau$ nella propria posizione naturale di equilibrio, eserciterebbe, stando alle ipotesi fatte, un momento di rotazione dato da

$$a.\omega.\psi\,(t-\tau)\,d\tau.$$

Se dunque la deformazione ω ha perdurato tutto il tempo $T=\theta'-\theta$ e se si ammette con Boltzmann che le azioni susseguenti si sovrappongono senza turbarsi, l'intero momento susseguente, destato dalla deformazione ω, sarà:

$$D_t = a\omega \int_{\theta}^{\theta'} \psi\,(t-\tau)\,d\tau$$

e questa espressione, se si conta il tempo dall'istante $\theta'=0$ in cui cessò la deformazione ω e si pone $\theta=-T$, $t-\tau=\chi$, prende la forma:

$$D_t = a\omega \int_{t}^{t+T} \psi\,(\chi)\,d\chi. \tag{9}$$

Quindi a mantenere il sistema nella propria posizione naturale di equilibrio sarebbe necessario un momento uguale e contrario a D_t: momento che andrebbe scemando col tempo. Se invece il sistema fosse abbandonato a sè, conserverebbe uno spostamento angolare ω_t tale da soddisfare alla relazione

$$D_t = b_t\,\omega_t\,, \tag{10}$$

[1] F. Kohlrausch, *Bemerkungen z. Hrn. Neesen's Beobachtungen ü. elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLV p. 579, 1875.

[2] F. Neesen, *Ueber elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLVII p. 595, 1876.

[3] F. Neesen (Pogg. Ann. CLVII p. 579) modifica alquanto la teoria di Boltzmann, ma non sostanzialmente sotto l'aspetto matematico; e mira a stabilire che la causa fisica sia un'azione vicendevole delle molecole che si urtano nei loro moti.

avendo indicato con b_t la forza direttrice al tempo t (nel caso di un filo sarebbe il suo modulo di torsione). Se poi supponiamo b_t costante, oppure le sostituiamo la media b dei valori che assume durante il tempo considerato, potremo scrivere:

$$D_t = b\omega_t;$$

e per conseguenza lo spostamento rimanente al tempo t, dopo cessata la torsione costante ω, sarà espresso da

$$\omega_t = \frac{a\omega}{b}\int_t^{t+T} \psi(\chi)d\chi, \tag{11}$$

e lo spostamento angolare dalla posizione, che aveva il sistema quando fu abbandonato a sè, sarà dato da

$$\omega'_t = \omega\left[1 - \frac{a}{b}\int_t^{t+T} \psi(\chi)d\chi\right]. \tag{12}$$

Se la deformazione ω ha avuto luogo per un tempo lunghissimo, talchè si possa porre $T = \infty$, l'ultima espressione si muterà nell'altra:

$$\omega''_t = \omega\left[1 - \frac{a}{b}\int_t^{\infty} \psi(\chi)d\chi\right] \tag{13}$$

ossia, ponendo

$$C = 1 - \frac{a}{b}\int_\rho^{\infty} \psi(\chi)d\chi$$

ove ρ è una costante arbitraria $< t$,

$$\omega''_t = \omega\left[c + \frac{a}{b}\int_\rho^{t} \psi(\chi)\,d\chi\right]. \tag{14}$$

Dalle esperienze di Neesen [1] risulterebbe

$$\psi(t) = pe^{-qt} \tag{15}$$

e quindi la (11) per $T = \infty$ si trasformerebbe in

$$\omega_t = \frac{ap}{bq}\,\omega e^{-qt} \tag{16}$$

perfettamente identica alla (3) del § 3, che abbiamo veduto verificarsi nel caso che il sistema abbia una forza direttrice costante e sia soggetto alla semplice viscosità dei liquidi. E siccome le esperienze di Neesen espresse dalla (16) avevano una breve durata dopo il cessare della deformazione, così appare anche da ciò che l'elasticità susseguente non si può considerare come derivante dall'attrito se non nei primi tempi e tutto al più quale prima approssimazione.

Streintz [2] trovò il decremento logaritmico indipendente dalla durata di oscillazione, e Boltzmann ne dedusse come probabile [3]:

$$\psi(t) = \frac{B}{t} \tag{17}$$

[1] F. Neesen, *Berl. Monatsberichte*, febb. 1874.

[2] H. Streintz, *Ueber die Dämpfung der Torsions Schwingungen von Drähten*. Sitzb. d. k. Akad. z. Wien. Vol. LXIX, marzo, 1874.

[3] P. M. Schmidt (*Ueber die innere Reibung fester Körper*. Ann. di Wiedemann. Vol. II p. 48, 241, 1877), mette in dubbio la legge di Streintz e l'argomentazione che vi applica Boltzmann.

per cui la (9) diverrebbe:

$$D_t = a\omega \lg \frac{t+T}{t} \tag{18}$$

che si trova in buon accordo colle esperienze fatte da Kohlrausch sul vetro fin dal 1863; ma non con quelle da lui fatte sull'argento e sull'ottone, perchè pare che in tal caso non regga l'ipotesi della sovrapposizione delle azioni susseguenti [1]. Similmente la (11) diverrebbe per la (17):

$$\omega_t = \frac{a\omega}{b} \lg \frac{t+T}{t} \tag{19}$$

e una formola analoga a questa, per T piuttosto piccolo, fu verificata dallo stesso Boltzmann sul vetro, e da Finger [2] sulle corde d'acciaio inglese da pianoforte.

Quando poi sia $T=\infty$ oppure per $t=0$, le formole (9), (11), (12), non sono più applicabili se si pone semplicemente $\psi(t) = \frac{B}{t}$, perchè danno valori infiniti. In tal caso bisogna sostituire alla costante B una funzione $f(t)$ che per valori moderati di t sia quasi costante, e per t grandissimo vada diminuendo fino a zero: come sarebbe per esempio $A e^{-kt}$ ovvero $\frac{A}{t^k}$ per k piccolissimo; ed inoltre bisogna ricorrere all'artifizio che diede la (14), la quale diventa allora:

$$\omega''_t = \omega \left[c + \frac{a}{b} \lg \left(\frac{t}{\rho} \right) \right]. \tag{20}$$

Ma è sempre da tener presente che queste formole (18), (19), (20) sono solamente approssimate, e non possono sussistere nè per valori troppo piccoli, nè per valori troppo grandi di t. E con questa restrizione vedremo che risponde alle nostre esperienze l'ultima, la quale si può porre sotto la forma:

$$\omega_t = M + N \lg t, \tag{21}$$

indicando con lg il logaritmo volgare.

Nel prospetto seguente la prima parte di ciascuna colonna si riferisce al primo stadio dell'esperienza, cioè quando il sistema oscilla, e però le ω_t sono le posizioni istantanee d' equilibrio attorno alle quali avvengono le singole oscillazioni e sono dedotte come le ω_n del prospetto precedente; la seconda parte corrisponde al secondo stadio, quando le oscillazioni sono spente, e però quelle ω_t sono osservate direttamente.

Il tempo è contato in secondi, le ω_t come al solito in millimetri della scala, ma ridotte ad archi. Le costanti M ed N sono calcolate col metodo de' minimi quadrati.

[1] F. Kohlrausch, l. c. Pogg. Ann. Vol. CXIX p. 336. — *Beitrag zu Boltzmann's Theorie der elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLX p. 225, 1877.

[2] Jos. Finger, *Zur elast. Nachwirkung des tordirten Stahldrahtes.* Sitzb. d. k. Akad. z. Wien Vol. LXXII, luglio 1875.

Tabella VII.

1 agosto $10^h 11' 6''$ ant.
Appoggio contro B

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
27″	155,2	155,3	+0,1
33	157,7	156,9	—0,8
39	159,0	158,3	—0,7
45	160,4	159,5	—0,9
51	161,2	160,5	—0,7
57	162,0	161,4	—0,6
63	162,6	162,2	—0,4
69	163,3	163,0	—0,3
75	163,8	163,6	—0,2
81	164,2	164,2	0,0
87	164,5	164,8	+0,3
93	164,7	165,4	+0,7
99	165,0	165,9	+0,9
105	165,2	166,4	+1,2
111	165,4	166,8	+1,4

$\tau = 6'',00$
$M = 128,48$; $N = 18,744$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
139″	166,7	167,0	+0,3
183	167,7	167,7	0,0
241	168,7	168,5	—0,2
355	169,7	169,5	—0,2
513	170,7	170,6	—0,1
764	171,7	171,6	—0,1
1264	172,7	173,0	+0,3

$M = 153,6$; $N = 6,254$
$6^h 10'$ pom.

—

2 agosto — Riposo

3 agosto $9^h 12' 11''$ ant.
Appoggio contro A

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
2,5	139,5	139,5	0,0
3,5	142,5	142,8	+0,3
4,5	145,4	145,1	—0,3
5,5	147,2	147,1	—0,1
6,5	148,8	148,6	—0,2
7,5	150,0	150,0	0,0
8,5	151,2	151,2	0,0
9,5	152,1	152,3	+0,2
10,5	153,2	153,2	0,0
11,5	153,9	154,0	+0,1

$\tau = 6'',1875$
$M = 113,46$; $N = 21,935$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
181″	161,0	162,3	+1,3
209	162,0	162,7	+0,7
249	163,0	163,2	+0,2
303	164,0	163,8	—0,2
367	164,9	164,4	—0,5
463	165,9	165,1	—0,8
594	166,9	165,9	—1,0
870	167,9	167,0	—0,9
1243	168,3	168,1	—0,2
1549	168,9	168,7	—0,2
1592	168,9	168,8	—0,1
2209	169,2	169,8	+0,6
2564	169,8	170,2	+0,4
2839	169,9	170,6	+0,7

$M = 146,62$; $N = 6,931$
$10^h 10'$ ant.

La sera del 3 agosto ho aggiunto 66^{cc} di acqua distillata, avendo cura che la pipetta toccasse il fondo del bicchiere, così da turbare il meno possibile la superficie libera del liquido. Alle $6^h 40'$ pom. l'apparecchio fu abbandonato a sè coll'indice appoggiato contro la morsetta B. — La mattina successiva alle $10^h 47'$ ant., quando nel cannocchiale si leggeva la divisione 241,1, ho appoggiato l'indice contro l'altra morsetta A. — Alle $11^h 38'$ ant. coincideva col reticolo la divisione 412,4: e subito dopo feci le seguenti osservazioni, registrate precisamente come quelle della precedente Tab. VII, cosicchè basta la sola avvertenza che i numeri distinti con asterisco non servirono nel calcolo delle costanti M ed N.

Tabella VIII.

4 agosto $11^h38'50''$ ant.
Appoggio contro *B*.

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5τ	147,7	147,9	+0,2
2,5	150,8	150,8	0,0
3,5	153,1	152,8	—0,3
4,5	154.6	154,2	—0,4
5,5	155,6	155,4	—0,2
6,5	156,4	156,6	+0,2
7,5	157,0	157,1	+0,1
8,5	157,5	151,9	+0,4
9,5	158,0*	158,5	+0,5
10,5	158,5*	159,1	+0,6
11,5τ	159,5*	159,6	+0,1

$\tau = 8'',50$
$M = 133,3;\quad N = 13,210$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
135''	160,4*	160.9	+0.5
170	161,4	161,7	+0,3
210	162,4	162,4	0,0
265	163,4	163,2	—0,2
350	164,4	164,2	—0.2
479	165,4	165,2	—0,2
717	166,4	166,6	+0,2

$M = 143,9;\quad N = 7,963$
$6^h12'24''$ p. Appoggio contro *A*.

5 agosto
$9^h44'50''$ a. Appoggio contro *B*.
$5^h14'42''$ p. Appoggio contro *A*.

6 agosto $9^h30'0''$ ant.
Appoggio contro *B*.

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5:	138,8	138,6	—0.2
2,5	141,5	141.6	+0,1
3,5	143.5	143,6	+0,1
4,5	145,0	145,1	+0,1
5,5	146,3	146,2	—0,1
6,5	147,3	147,2	—0,1
7.5	148.1	148.1	0,0
8,5	148.8	148.8	0,0
9,5	149,[illegible]	149,4	—0,1
10,5*	150,2	150,0	—0,2
11,5*	150,5	150,6	+0,1
12,5*	150,9	151,1	+0,2

$\tau = 6'',25$
$M = 125,5;\quad N = 13,499$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
102''	152,2*	152,6	+0,4
122	153,2	153,5	+0,3
146	154,2*	154,3	+0,1
182	155,2*	155,3	+0.1
222	156.2*	156,2	0.0
269	157,2*	157,1	—0,1
350	158,7*	158.3	—0,4
389	159,2	158.8	—0,4
475	160,2*	169,7	—0,5
584	161,2*	160,7	—0,5
732	162,3*	161,7	—0,6
885	163,2*	162,6	—0.6
1110	164,2	163,7	—0,5
1400	165,2*	164,7	—0.5
1790	166,2*	165,9	—0.3
2213	167,2*	166.8	—0,4
2520	167.8*	167,4	—0,4
2830	168.2	168.0	—0,2
3110	168,9*	168,4	—0,5
3660	169,2*	169,2	0,0
4500	170.1*	170,1	0.0
4860	170,2	170,5	+0.3
6060	171,3*	171.5	+0,2
7200	172,0*	172,3	+0.3
8880	173.0*	173.3	+0.3
10440	173,4*	174,0	+0,6
12600	174,2	174,9	+0,7
15000	175,2*	175,7	+0.5
15600	175,3*	175,9	+0,6

$M = 131,3;\quad N = 10,624$

7 agosto
$9^h40'2''$ a. Appoggio contro *A*
$5^h33'4''7$ p. » » *B*

8 agosto
$11^h14'$ a. Appoggio contro *A* e subito dopo contro *B*.

9 agosto $5^h10'2'',9$ pom.
Appoggio contro *A*.

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
2,5:	132,9	132,7	—0,2
3,5	135,0	135,5	+0.5
4,5	137,7	137,6	—0,1
5,5	139,5	139.2	—0,3
6.5	140,8	140,6	—0,2
7,5	141.8	141,8	0,0
8,5	142.8	142.8	0,0
9,5	143,6	143,8	+0,2
10,5	144,5	144,6	+0,1

$\tau = 6'',03$
$M = 110,27;\quad N = 19,049$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
106''	148,1*	148,6	+0,5
118	149,1	149,2	+0,1
142	150,1*	150,3	+0,2
158	151,1*	150,9	—0,2
188	152,0*	151,9	—0,1
223	153,0	152,9	—0,1
260	154,0*	153,8	—0,2
307	155,0*	154,8	—0,2
359	156,0*	155,7	—0.3
435	157,0*	156.8	—0,2
535	158,3*	158,0	—0,3
619	159,0	158,9	—0,1
734	160,0*	159,9	—0,1
882	160,9*	160,9	0,0
1070	161,9*	162,0	+0.1
1262	162,9	163,0	+0,1
1517	163,9*	164,1	+0,2
1773	164,9*	165.0	+0,1
2037	165,6*	165,8	+0,2
2337	166,7*	166,6	—0.1
2697	167,1*	167.4	+0,3
2997	167,8	167,9	+0,1
3357	168,6*	168.7	+0,1
3597	168.8*	169.1	+0.3
3897	169.0*	169,6	+0.6
4197	169,7*	170,0	+0,3
4497	169,8*	170,4	+0,6

$M = 121,4;\quad N = 13,418$

10 e 11 agosto
Riposo.

12 agosto $9^h42'2'',7$ ant.
Appoggio contro *B*.

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5	117.6	117,6	0,0
2,5	121,8	122.0	+0,2
3,5	125,0	124,9	—0,1
4,5	127,1	127,0	—0,1
5,5	128,8	128,8	0,0
6,5	130,3	130,2	—0,1
7,5	131,3	131,5	+0,2
8,5	132,5*	132,5	0,0
9,5	133,3*	133,5	+0,2
10,5	134,3*	134,4	+0,1

$\tau = 5'',95$
$M = 98,69;\quad N = 19,864$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
79,''3	136,0*	137,4	+1,4
89, 3	137,0	138,1	+1,1
99, 3	138,0*	138,7	+0,7
112, 3	139.0*	139,5	+0.5
129, 3	140,0*	140,3	+0.3
146, 3	141,0	141,0	0,0
167, 3	142,0*	141,9	—0,1
191, 3	143,0*	142,7	—0,3
222, 3	144,0*	143,6	—0,4
260, 3	145,0	144,5	—0,5
305, 3	146,0*	145,5	—0,5
357, 3	147,0*	146,4	—0,6
417, 3	148,0*	147,3	—0,7
487, 3	149,0*	148,3	—0,7
565, 3	150,0	149,1	—0,9
651, 3	151,0*	150,0	—1,0
771, 3	152,0*	151,0	—1,0
908, 3	153,0*	151,9	—1,1
1073, 3	154,0*	153,0	—1,0
1277, 3	155,0	154,0	—1,0
1492, 3	155,5*	155,0	—0.5
1672, 3	156,1*	155.6	—0,5
2032, 3	157,1*	156,8	—0,3
2452, 3	157.6*	157,9	+0.3
2692, 3	158,0	158,5	+0,5
3177, 3	159.0*	159,5	+0.5
3777, 3	160,0*	160,5	+0,5
4677, 3	161,0	161,8	+0,8
5577, 3	161,9*	162,9	+1,0

$M = 111,17;\quad N = 13,790$

14 agosto
$9^h52'23''$ ant. App. fra *A* e *B*.
$5^h\ 9'18''$ pom. » contro *B*.

15,16,17,18 e 19 agosto
Riposo.

20 agosto
Varie esperienze, nell'ultima delle quali $9^h52'$ e $53''$ ant. appoggio contro *B*.

21 agosto — Riposo.

22 agosto $9^h30'8''$ ant.
Appoggio contro *A*.

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
1,5:	87,0	86,9	—0,1
2,5	92,3	92,4	+0,1
3,5	96,0	96,1	+0,1
4,5	98,7	98,8	+0,1
5,5	100,8	101,0	+0,2
6,5	103,2	102,8	—0,4
7,5	104,2*	104,3	+0,1
8,5	105,9*	105,7	—0.2

$\tau = 4'',92$
$M = 65,05;\quad N = 25,107$

t	ω_t oss.	ω_t calc.	Diff.
137''	118,6*	120,3	+1,7
151	119,6	121,1	+1,5
167	120,6*	122,0	+1,4
183	121,6*	122,7	+1.1
222	123,6*	124,5	+0,9
246	124,6*	125,3	+0,7
271	125,6*	126,2	+0,6
296	126,5*	126,9	+0,4
325	127,5*	127,7	+0,2
358	128,5	128,6	+0,1
389	129,5*	129,3	—0,2
426	130,5*	130.1	—0,4
491	131,5*	131,3	—0,2
576	133,5*	132,7	—0,8
634	134.5	133,5	—1,0
694	135,5*	134,3	—1,2
768	136,5*	135.2	—1,3
851	137,4*	136,1	—1,3
962	138.4	137.1	—1.3
1105	139,4*	138,3	—1,1
1266	140,4*	139.5	—0.9
1444	141,4*	140.6	—0.8
1650	142,4*	141.8	—0.6
2137	144,4	144.0	—0,4
2433	145,4*	145.2	—0,2
2758	146.3*	146,2	—0.1
3125	147,3*	147.3	0.0
3538	148.3*	148.4	+0,1
3779	148.8*	149.0	+0,2
4113	149.3	149,7	+0.4
4532	150,3*	150,5	+0,2
5234	151,3*	151,8	+0,5
6150	152,2*	153.2	+1,0
6862	153,2	154,1	+0,9
7732	154,8*	155,2	+0,4

$M = 77,7;\quad N = 19,923$

Le differenze a vero dire sono piccole, minori forse di quelle incontrate da Boltzmann, da Kolhrausch e da Finger ne' loro confronti, e superano di poco gli errori possibili di osservazione: ma hanno un andamento così regolare da far ritenere che derivino per la massima parte dall'essere la (21) soltanto approssimata, come già avvertimmo con qualche insistenza.

Inoltre le costanti M ed N hanno valori così diversi nello stadio di moto oscillatorio e in quello di moto aperiodico da far dubitare che pel solo fatto delle oscillazioni si destino delle azioni susseguenti le quali alterino affatto le proprietà del sistema, analogamente a quanto osservò già Streintz ([1]) sui fili metallici, e poi con maggiore generalità il prof. Pisati ([2]), ed ultimamente con più profondità lo Schmidt ([3]).

Risultati affatto simili ai precedenti si ottengono applicando la (21) alle altre esperienze che non ho trascritte. Ma qualche piccola eccezione nella regolare variazione de' coefficienti M ed N fu riscontrata quando le esperienze erano state precedute da un riposo meno lungo.

§ 7.

Non essendo la (21) che una formola semplicemente approssimativa, mi sono deciso di ricercare se, partendo dalle esperienze, si possa assegnare alla funzione $\psi(t)$ un'espressione analitica più rigorosa che non sia la (17), e mi sono rivolto alla formola (13), la quale dà

$$\psi(t) = \frac{b}{a\omega}\frac{d\omega''_t}{dt}. \qquad (22)$$

Presi i tempi per ascisse, e per ordinate gli spostamenti angolari ω_t dalla posizione iniziale d' equilibrio, ho costruito la curva che deve essere espressa dalla equazione (13), la quale per comodità indicheremo con

$$y = \omega(t). \qquad (23)$$

Per costruire poi la curva espressa da

$$z = \frac{dy}{dt} = \frac{\omega a}{C}\psi(t) \qquad (24)$$

osserviamo che

$$\frac{dy}{dt} = \text{tang}\,\gamma,$$

γ, indicando l' angolo che la tangente sul punto (y, t) della curva (23) fa coll' asse delle t; onde il punto (z, t) della curva (24) avrà per ordinata $z = \text{tg}\gamma$. Conducendo

([1]) H. Streintz, *Ueber die Dämpfung der Torsions Schwingungen von Drähten.* Sitzb. d. k. Akad. zu Wien. Pogg. Ann. Vol. LXIX, marzo 1874; Pogg. Ann. Vol. CLIII p. 387.

([2]) G. Pisati, *Sulla elasticità dei metalli a diverse temperature.* Gazz. Chim. Ital. Vol. VI (1876) e Vol. VII (1877).

([3]) P. M. Schmidt, *Ueber die innere Reibung fester Körper.* Annali di Wiedemann. Vol. II, 1877.

adunque, come insegna il Fiedler [1] la tangente sul punto (y, t) e prendendo sull'asse delle t un segmento AB uguale alla costante $\frac{b}{\omega a}$ innalzandovi una perpendicolare BE, tirando per A la parallela alla tangente fino ad incontrare questa perpendicolare in B, il segmento BB_1 rappresenterà il valore di $\psi(t)$.

Ma siccome il valore della costante $\frac{b}{\omega a}$ non è noto, così ho preso invece una lunghezza arbitraria, e precisamente quella rappresentante 118 secondi, ed ho costruito le curve espresse da:

$$z = 118 \frac{\omega a}{b} \psi(t) \tag{25}$$

e da esse per interpolazione ho cercato di determinare l'espressione analitica di $\psi(t)$.

A questo fine, per le ragioni dianzi esposte discutendo la (17), ho tentato la forma

$$\psi(t) = A \frac{e^{-kt}}{t}$$

per la quale, ed avendo posto $118 \frac{\omega a}{b} A = L$, la (25) diventa:

$$z = L \frac{e^{-kt}}{t} . \tag{26}$$

E con questa formola, ricorrendo ai minimi quadrati che danno

$$k \lg e = \frac{(\Sigma t)(\Sigma \lg z) + (\Sigma t)(\Sigma \lg t) - n(\Sigma t \lg z) + n(\Sigma t \lg t)}{n(\Sigma t^2) - (\Sigma t)^2}$$

$$\lg L = \frac{\Sigma \lg z + \Sigma \lg t + (\Sigma t) k \lg e}{n}$$

ho calcolato le z della Tabella IX seguente.

Le differenze sono comprese entro i limiti degli errori d'osservazione; ma il loro andamento regolare rivela come anche la (26) sia un'espressione semplicemente approssimata. Ad ogni modo l'approssimazione è così buona che, riflettendo alle quantità trascurate nello svolgere la teoria di Boltzmann, dobbiamo riconoscere che questa corrisponde benissimo alle nostre esperienze.

[1] G. Fiedler, *Trattato di geometria descrittiva* tradotto da A. Sayno e da E. Padova p. 192, *b*). Tipografia Lemonnier 1874.

Tabella IX.

6 agosto $9^h 30'$ ant.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
197,″0	3,12	2,99	—0,13	—0,04
364, 4	1,74	1,61	—0,13	—0,07
551, 0	1,03	1,06	+0,03	+0,03
1134, 0	0,48	0,51	+0,03	+0,06
2760, 0	0,18	0,19	+0,01	+0,06
6654, 0	0,07	0,07	0,0	0,0
8598, 0	0,05	0,05	0,0	0,0

$\lg L = 2,77271$; $k \lg e = 0,00001326$

9 agosto $5^h 10' 2'',9$ pom.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
115,″0	6,95	6,69	—0,26	—0,04
174, 8	4,13	4,35	+0,22	+0,05
247, 9	3,03	3,03	0,0	0,0
334, 9	2,24	2,21	—0,03	—0,01

$\lg L = 2,96728$; $k \lg e = 0,00007679$

12 agosto $9^h 42' 2'',7$ ant.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
108,″0	9,20	8,27	—0,93	—0,10
158, 9	5,50	5,53	+0,03	+0,01
226, 7	3,55	3,79	+0,24	+0,07
315, 4	2,35	2,65	+0,30	+0,12
501, 3	1,70	1,56	—0,14	—0,08

$\lg L = 2,96662$; $k \lg e = 0,0001437$

22 agosto $9^h 30' 8''$ ant.

t	z oss.	z_1 calc.	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
81,″5	14,95	14,34	—0,61	—0,04
115, 5	10,60	10,09	—0,51	—0,05
194, 0	6,30	5,97	—0,33	—0,05
242, 0	5,00	4,76	—0,24	—0,05
265, 4	4,50	4,33	—0,17	—0,04
461, 2	2,61	2,45	—0,16	—0,06
1410, 0	0,63	0,74	+0,11	+0,17
1514, 0	0,58	0,68	+0,10	+0,15
1977, 0	0,46	0,50	+0,04	+0,08
2315, 0	0,39	0,41	+0,02	+0,05
2613, 0	0,37	0,36	—0,01	—0,03
4099, 0	0,22	0,20	—0,02	—0,09
4369, 0	0,20	0,18	—0,02	—0,10

$\lg L = 3,07087$; $k \lg e = 0,00003830$

Dopo le esperienze fatte sull'olio di uliva; in parte narrate al § 3, e nelle quali trovai pienamente confermata la teoria della semplice viscosità: il 18 settembre ripulii ben bene il bicchiere, tenendo però la bacchetta di vetro congiunta allo specchietto II, sempre immersa nell'olio. Poi introdotta nel bicchiere dell'acqua distillata e filtrata, vi depositai sopra uno strato di 2^{mm} d'olio d'uliva vergine, pure filtrato, avendo cura che aderisse perfettamente alle pareti del bicchiere. Alle $11^h\ 11'$ ant. tutto era messo al posto e lasciato tranquillo, coll'indice appoggiato alla morsetta *A*.

La mattina dopo lo specchietto era quasi assolutamente immobile, e si leggeva nel cannocchiale la divisione 276,0 della scala. Essendo temperatura di 19°, 4, alle ore 10 55′ 32″ ant. appoggiai l'indice contro la morsetta *B* e dopo 14″, 3 era compiuta la prima oscillazione semplice con la deviazione estrema 145,7 dal punto di partenza; la qual deviazione scese poi a 144,7, come è registrato nel seguente prospetto, ove si trovano eziandio le successive osservazioni.

In ogni giorno non fu fatta che una sola osservazione, e pel resto del tempo l'apparecchio fu lasciato in assoluto riposo.

Tabella X.

19 settembre
19°,4 A=276,0
10h55'26" a. Appoggio l'indice contro B

t	y
0	0,0
14",3	145,7
26, 3	144,7
1'28"	144,7
2'28	144,7
5'28	144,7
9'28	144,7
13'28	144,6
18'28	144,5
24'28	144,4
29'28	144,4
34'28	144,4
40'28	144,6
45'28	144,5
50'28	144,2
52'28	144,3
58'28"	144,1

19°,6
—
Alle 10h51' pom.
B=132,1

20 settembre
19°,4 B=131,4
10h20'43" a. Appoggio contro A

t	y
0	0,0
4"1	68,9
5, 6	98.6
7, 9	123,6
10, 1	138,6
12, 6	144,6
16, 2	146.1
33, 2	145,3
1'17"	145,3
2'17	145,2
4'17	145.2
6'17	145,2
9'17	145,3
14'17	145,4
19'17	145.4
24'17	145,5
29'17	145,4
33'17	145,5
42'17	145,5

19°,5
—
Alle 11h30' pom.
A = 276,1

21 settembre
18°,8 A=275,2
9h35'8" a. Appoggio l'indice contro B

t	y
0	0,0
4,"1	45,2
6, 4	65,2
9, 3	80,2
13, 7	95,1
17, 6	105,1
21, 7	113,1
25, 9	119,1
30, 9	123,0
35, 9	127,0
39, 8	130,0
52, 0	135,0
59, 0	137,0
1'26"1	140.9
1'38, 1	141,9
1'55, 7	142,9
2'23	143,9
2'40	144,4
3'28	144,9
3'46	145,0
4'46	145,4
5'46	145,6
6'46	145,7
7'46	145,8
8'46	145,8
10'46	145,8
13'46	145,8
17'46	145,8
21'46	145,8
24'46	145,8
29'46	145,8
31'46	145,7

19°,2
—
Alle 7h58' pom.
B=129,4

22 settembre
19°,4 B=129,2
11h20'43" a. Appoggio l'indice contro A

t	y	t	y	t	y
0	0,0	5' 8"	67,8	20'12'	109,8
6,"5	11,0	5'19	68.8	20'54	110,8
12, 5	15,0	5'33	69.8	21'41	111,8
21, 3	19,0	5'43	70,8	22'28	112,8
28, 4	22,0	5'54	71,8	24'08	114,8
37, 7	24,9	6'18	73,8	25'07	115,8
43, 3	26,9	6 58	76,8	26'12	116,8
50, 4	28,9	7'12	77,8	27'18	117,8
57, 5	30,9	7'24	78,8	28'16	118,8
1'9"4	31,9	7'40	79.8	29'28	119,8
1'19,0	35,9	7'50	80,8	30'44	120,8
1'27,4	37,9	8'13	81,8	31'59	121.8
1'37,2	38.9	8'24	82,8	33'28	122,8
1'48,6	41,9	8'43	83,8	34'50	123,8
1'52,8	42.9	8'58	84,8	36'29	124,8
1'59,0	43,9	9'19	85,8	38'29	125,8
2' 5.2	44,9	9 35	86,8	40'10	126.8
2'16,3	46,9	9'59	87,8	42'18	127,8
2'22,7	47,9	10'11	88,8	44'22	128,8
2'29,4	48,9	10'30	89,8	46'54	129,8
2'43,8	50,9	11'13	91,8	49'41	130.8
2'49,2	51,8	11'35	92,8	52'41	131,8
2'56,8	52,8	11'58	93,8	56' 9	132,8
3'11,0	54.8	12'59	94,8	1h.0'17	133,8
3'20"	55.8	12'48	95,8	1. 5'11	134,8
3'27	56,8	13'10	96,8	1. 9'54	135,8
3'34	57.8	13'36	97,8	1.15'40	136,8
3'44	58.8	13'59	98,8	1.24'11	137,8
3'53	59.8	14'27	99,8	1.34'11	138,8
4' 2	60.8	14'57	100.8	1.49'24	139,8
4'10	61.8	15'58	102,8	2. 8' 9	140,9
4'19	62,8	16'28	103,8	2.23' 9	141,8
4'29	63.8	17'02	104,8	3.11' 9	143,2
4'39	64.8	18'12	106.8	5.25'	144,1
4'49	65.8	18'50	107,8	7h.43'	144,8
4'59	66,8				

19°,9
Alle 11h55' pom. A=273,2

23 settembre
19°,5 A=272,8
9h32'55" a. Appoggio contro B

t	y	t	y
0	0,0	51'59"	35,1
51"3	4,8	55'	36,1
1'22"	5.8	57	36,9
1'57	6,8	59	37,7
2'36	7,8	1h 2'	38,6
3'29	8,8	1h 5'	39,6
4'32	9,8	1.10	40,9
5'33	10,8	1.13	41,4
6'37	11,8	1.16	43,1
7'43	12,8	1.20	44,2
8'59	13.8	1.22	44,9
10'14	14,8	1.26	45,8
11'29	15.8	1.30	46.9
13'03	16,8	1.34	47,9
14'27	17,8	1.37	48,9
16'06	18,8	1.43	50,1
17'46	19,8	1.47	51,5
19'27	20,8	1.52	52,5
21'27	21,8	1.57	53,6
23'18	22,8	2. 1	54,4
25'18	23,8	2. 6	55,4
27'18	24,8	2.16	57,4
29 18	25,8	2.31	60,5
31'29	26,8	2.39	61,8
33'31	27,8	2.52	64,2
35'37	28,8	3. 1	65,7
37' 3	29,8	3.11	67,4
40'29	30,8	3.17	68,2
43' 7	31,8	3.25	69,6
45'37	32.8	3.36	71,0
47'59	33,7	3h.42'.8"	71,8

Ora che il sistema è a metà della propria corsa fra A e B, appoggio l'indice contro A, e da questo istante comincio a contare il tempo nella colonna seguente.

23-24 settembre
1h15'8" p. Appoggio contro A

t	y	t	y
0	0,0	1h35'	29,8
31"1	3,0	1.41	30,4
1' 7"	4,0	1.45	30,9
1'50	5,0	1.50	31,3
2'50	6,0	1.55	32,0
4' 5	7,0	2. 5	32,9
5'31	8,0	2.10	33,4
7'16	9,0	2.16	34,1
9'11	10,0	2.23	34,8
11'10	11,0	2.31	35,3
13'24	12,0	2.44	36,4
15'32	13,0	2.50	37,0
18'16	14,0	2.56	37,7
21' 3	15,0	3h 0'	38,0
24' 9	16,0	3.15	39,1
27'27	17,0	3.28	40,0
30'47	18,0	3.39	40,8
34'14	19,0	3.50	41,7
38' 8	20,0	4.15	43,0
42 32	21,0	4.36	44,0
46'29	22,0	4.59	45,0
50 58	22,7	5.19	45,8
55' 0	23.5	5.47	46,7
1h 0' 0"	24,4	6.13	47,8 (1)
1. 5	25.2	6.33	48,6
1.10	26,1	7.51	51,2
1.15	26,9	8.41	52,4
1.20	27,7	17.59	58,3 (2)
1.25	28,2	21.19	59.1
1.30	29,1	24.22	60,8 (3)

(1) 19°,8 (2) 19°,2
(3) Corrispondenti a 261,8 della scala: dunque sempre discosto di una decina di divisioni dalla posizione d'equilibrio A.

Ho tracciato la curva rappresentante l' esperienza del 22 settembre prendendo sull'asse delle t un centimetro per un minuto primo e sull'asse delle y un centimetro per un centimetro della scala. Indi ho costruito la curva rappresentata dall'equazione (26) ed i numeri seguenti si riferiscono ai punti di contatto delle tangenti che servono a costruirla.

Omessi i due primi, cogli altri ho determinato le costanti della formola.

Tabella XI.

t	z	z_1	$z_1 - z$	$\frac{z_1 - z}{z}$
mm	mm			
15,7	163,7*			
49,0	79,6*			
88,6	49,6	50,61	+1,0	+0,02
130,0	32,8	32,41	—0,4	—0,01
171,0	23,8	23,17	—0,6	—0,03
213,0	17,7	17,46	—0,2	—0,01
255,3	13,2	13,67	+0,5	+0,04
298,0	10,9	10,98	+0,1	+0,01
340,5	9,0	9,02	0,0	0,0
383,5	7,6	7,51	—0,1	—0,01

$\lg L = 5,70944 \qquad k \lg e = 0,00006525$

L'accordo è ancora migliore che nelle esperienze precedenti e se i due valori di z si scostano dai valori che darebbe la (26), ciò dipende, secondo me, dalla circostanza che nell'applicare la teoria di Boltzmann si trascura la quantità di moto del sistema, la quale nei primi tempi non è certo trascurabile.

Cito anche un'altra esperienza che forse non è priva d' interesse, perchè indica che l'espansione di un semplice velo d'olio alla superficie dell' acqua, non esercita influenza apprezzabile.

L'acqua era distillata, filtrata, ben protetta, e giaceva nel bicchiere fin dalla sera del 3 settembre, avendomi servito in varie esperienze, le quali non mi rivelarono che traccie insignificanti di elasticità susseguente. Lo specchietto era il II. La mattina del 6 settembre alle $9^h\,3'\,30''$, dopo quarant'ore di riposo, appoggiai l'indice contro la morsetta B, ed ottenni i risultati che si leggono nella prima colonna del quadro seguente, mentre nella seconda ho scritto quelli ottenuti dopo aver toccato la superficie dell'acqua con una bacchetta di vetro che aveva prima tuffata nell'olio. I punti istantanei d'equilibrio ω_n sono dedotti come quelli del § 5.

Le differenze fra le due serie sono irrilevanti, mentre si sa che nel secondo caso la tensione superficiale deve essere minore.

Tabella XII.

6 settembre $6^h3'30''$ ant. . . . . . 22°,0

ω	D_n	α_n	α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$
A				
302,1				
calc.		oss.	calc.	
B	30,8			
158,2	270,0	239,2	239,20	0,0
4	60,6	209,4	209,77	+0,4
5	244,3	183,7	183,96	+0,3
3	82,9	161,4	161,33	—0,1
3	224,5	141,6	141,48	—0,1
2	100,1	124,4	124,07	—0,3
1	209,0	108,9	108.81	—0,1
1	113,4	95,6	95,42	—0,2
0	197,2	83,8	83,68	—0,1
0	123,7	73,5	73,39	—0,1
157,9	187,9	64,2	64,36	+0,2
8	131,4	56,5	51,43	—0,1
8	180,9	49,5	49.48	0,0
7	137,3	43,6	43,40	—0,2
6	175,4	38,1	38,06	0,0
6	142,0	33,4	33,38	0,0
6	171,2	29,2	29,27	+0,1
5	145,5	25,7	25,66	0,0
5	168,0	22.5	22,51	0.0
5	148,2	19,8	19,74	—0,1
4	165,5	17,3	17,31	0,0
4	150,2	15.3	15,18	—0,1
3	163,5	13,3	13,31	0,0
3	151,9	11,6	11,68	+0,1
3	162,0	10,1	10,24	+0,1

oss.		
158,0	$9^h17'35''$ a.	
158,2	$9^h20'20''$	λ=θ,0570

9^h50. Tocco la superficie dell'acqua con una bacchetta di vetro intinta nell' olio.

τ=7″64

6 settembre $10^h17'43''$ ant. . . . . . 22°,2

ω	D_n	α_n	α'_n	$\alpha'_n - \alpha_n$
B				
158,1				
calc.		oss.	calc.	
A	430,2			
302,5	190,3	239,9	240,21	+0,3
302,4	400,8	210,5	210,92	+0,4
4	216,0	184,8	185,20	+0,4
5	378,4	162,4	162,62	+0,2
3	235,2	143,2	142,79	—0,4
1	360,9	125,7	125,38	—0,3
4	250,9	110,0	110,21	+0,2
4	347,6	96,7	96.79	+0,1
2	262,4	85,2	84,89	—0,3
2	337,2	74,8	74,54	—0,3
3	271,7	65,5	65,45	0,0
3	329,1	57,4	57,47	+0,1
3	278,8	50,3	50,46	+0,2
3	322,9	44,1	44,31	+0,2
2	284,0	38,9	38,91	0,0
2	318,1	34,1	34,16	+0,1
1	288,0	30,1	29,99	—0,1
2	314,4	26,4	26,05	—0,3
2	291,2	23,2	22,84	—0,4
1	311,6	20,4	20,30	—0,1
1	293,8	17,8	17,83	0,0
1	309,3	15,5	15,66	+0,2
0	295,5	13,8	13,75	0,0
0	307,7	12,2	12,07	—0,1
0	296,9	10,8	10,60	—0,2
301,9	306,2	9,3	9,31	0,0
8	298,0	8,2	8,17	0,0
8	305,2	7,2	7,17	0,0
9	298,9	6,3	6,30	0,0
7	304,3	5,4	5,54	+0,1
7	299,5	4,8	4,86	+0,1
8	303,8	4,3	4,26	0,0
7	299,9	3,9	3,74	—0,2
7	303,2	3,3	3,29	0,0
6	300,1	3,1	2,89	—0,2
5	302,8	2,7	2,54	—0,2

oss.			
301,6	$11^h36'33''$ a.	λ=0,0565	
301,8	$11^h59'$		22°4

τ = 7″,69

Per quanto mi è noto, Quincke è il solo che abbia sospettato potersi incontrare la elasticità susseguente anche nelle superficie liquide: ed ha emessa questa idea fin dal 1858 [1] avendo osservato che la costante di capillarità del mercurio diminuisce rapidamente col tempo. Ma poi [2], attribuì tale diminuzione alla condensazione dei

[1] G. Quincke, Pogg. Ann. Vol. CV p. 33, 1858; Annales de Chimie (3) LV, p. 227.
[2] G. Quincke, Pogg. Ann. Vol. CXXXIX p. 34, 1870.

vapori sulla superficie del mercurio, condensazione che l'imbrattavano, e ch'egli riteneva di non aver potuto eliminare neppure sotto la campana della macchina pneumatica, giacchè vi si trovavano dei vapori grassi. Analogamente spiegava in questa Memoria [1] la diminuzione col tempo della costante di capillarità alla superficie di separazione fra l'acqua e l'olio, ascrivendola ad un lento mescolarsi o ad un' azione chimica lenta fra i due liquidi.

Se non che recentemente [2] egli dichiarò di ritornare alla primitiva opinione in seguito ad una lunga ed accurata serie di esperienze fatte su molte soluzioni acquose ed alcooliche. Ne determinò le costanti di capillarità con due metodi, cioè osservando l' inalzamento ne' tubi capillari, oppure misurando col catetometro e col microscopio le dimensioni di una bolla gassosa la quale, trovavasi in seno al liquido e veniva ad appoggiarsi contro una lastra piana sospesa orizzontalmente nella parte più alta del liquido medesimo.

Con questo secondo metodo trovò che, tanto se la bolla era d'aria quanto se era d'idrogeno elettrolittico, la tensione superficiale dei varî liquidi diminuiva col tempo, in principio più rapidamente, in seguito meno: che tale diminuzione era minore nei liquidi puri come l'acqua e l'alcool, arrivando in tal caso al 6 per 100 dopo 24 ore, era maggiore nelle soluzioni e specialmente in quelle acquose, nelle quali arrivava al 40 per 100. Per l'aggiunta di alcune traccie d'acido cloroidrico all'acqua, la diminuzione della coesione saliva dal 6 al 20 per 100 in 17 ore. Nella superficie libera del mercurio la diminuzione era di 10 per 100 in 3 a 6 ore.

Escluso che tali variazioni della tensione superficiale derivino dalla temperatura, dall'imbrattamento di sostanze estranee, escluse le eventuali influenze elettriche; il prof. Quincke riteneva in sulle prime che le soluzioni si potessero considerare come miscugli del solvente e di una soluzione più concentrata e che il solvente, come quello cui compete nei casi esaminati minor tensione, si portasse lentamente alla superficie. Ma abbandonò siffatta spiegazione osservando che nei miscugli d'acqua e alcool la costante di capillarità non varia sensibilmente col tempo e, se mai, accenna ad aumentare; ed osservando inoltre che nelle soluzioni acquose la costante di capillarità scende fino al 6^{mgr} ed anche a $5^{mgr}, 2$, cioè sotto il valore di $7^{mgr}, 9$ a $7^{mgr}, 3$, trovato per l'acqua molto tempo dopo la formazione della sua superficie libera.

Ed ora egli pensa che il concetto più plausibile sia quello di ravvicinare tale contegno delle superficie libere de' liquidi ai fenomeni della elasticità susseguente osservati ne' corpi solidi. In fine per ispiegare il fatto che le bolle grosse si deformano col tempo più delle piccole, e che la diminuzione dell'inalzamento, insensibile nei cannelli sottilissimi, si può invece constatare ne' cannelli più ampi [3], il Quincke fa intervenire nel fenomeno la parete solida, in vicinanza della quale comincierebbero a sistemarsi le molecole della superficie liquida, ecc.

Ma noi non intendiamo d' inoltrarci in tali considerazioni, e ci basta di aver citate le lente diminuzioni della tensione superficiale, osservate da Quincke, per

(1) Pogg. Ann. Vol. CXXXIX p. 19-39.

(2) G. Quincke, *Ueber die Cohäsion von Salzlösungen*. Pogg. Ann. Vol. CVI p. 337 e p. 560, 1877.

(3) Tali variazioni non sono da confondersi con quelle osservate da Hagen, le quali provenivano dall'imbrattamento del menisco: mentre da Quincke nulla era trascurato per eliminarlo.

metterle di fronte agli accrescimenti cui va soggetta col tempo la elasticità susseguente da noi segnalata nei liquidi.

Se poi insieme a questa elasticità di seconda specie, le superficie liquide sieno dotate ancora della elasticità di prima specie (prescindendo sempre dalle azioni provocate da uno strappamento, considerate dal prof. Marangoni e citate al § 4), è una questione molto delicata; e sarebbe interessante risolverla, particolarmente pensando alle esperienze di Braun [1], le quali accennano ad una certa indipendenza fra i processi molecolari determinanti le due specie d'elasticità.

Mi pare che per raggiungere lo scopo sia necessario disporre nel sistema di una forza direttrice variabile in modo conosciuto, e di un congegno atto a tenere spostata per un dato tempo e di un angolo dato la sola estremità inferiore della sospensione bifilare, ed a lasciarla poi libera senza urti. Sto già costruendo un apparecchio che mi dovrà servire in tale ricerca appena avrò a mia disposizione un locale conveniente.

Intanto ringrazio i signori Vito Volterra ed Enrico Micciarelli, allievi di questo Istituto Tecnico, di avermi aiutato nei calcoli numerici e nelle costruzioni grafiche.

[1] F. Braun, *Ueber die Natur der elast. Nachw.* Pogg. Ann. Vol. CLIX, p. 337, 1876.

Sulla degenerazione dei nervi recisi.

Nota di GIUSEPPE COLASANTI presentata dal Socio TOMMASI-CRUDELI

nella seduta del 4 febbraio 1877.

(Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma. X.)

I processi istologici che accompagnano la degenerazione dei nervi recisi, negli ultimi decenni furono tanto sovente e tanto diffusamente trattati ([1]) che chi vuole nuovamente tornare sulla questione, deve esservi spinto da un motivo speciale il quale possa servirgli di giustificazione rimpetto al mondo scientifico. Nel nostro caso questo motivo era doppio.

Come già trovasi esposto in un altro luogo ([2]), il primo e più immediato impulso a questa ricerca ci venne dato dalla scoperta dei segmenti midollari e dagli altri fatti nuovi relativi alla struttura della fibra nervosa midollare. Dopo questa scoperta ci parve molto utile, dal punto di vista istologico, di ripetere l'esame microscopico della degenerazione dei nervi recisi; perchè tutti i lavori anteriormente pubblicati su questo argomento furono intrapresi senza che si avesse conoscenza della vera struttura della fibra nervosa. Era dunque opportunissimo che questi fossero soggetti ad una ulteriore revisione.

L'esame della degenerazione dei nervi recisi ci parve suscettibile di un ulteriore progresso non solo nella direzione delle ricerche istologiche, ma anche in rapporto a quelle fisiologiche. Infatti la letteratura che si riferisce a tale questione ci è sembrato che presentasse ancora una lacuna di natura fisiologica. In nessun luogo, per quanto ci fu possibile consultare le memorie originali, abbiamo trovato discussa la questione, se la degenerazione del moncone periferico, la quale segue

([1]) La letteratura sulla degenerazione e sulla rigenerazione dei nervi recisi, fino dall'anno 1872 si trova completamente registrata nel lavoro di Benecke (*Ueber die histologischen Vorgänge in durchschnittenen Nerven.* — Virchow's Archiv. LV pag. 496) nel quale dall'anno 1838 in poi sono riportati non meno di 47 autori i quali nell' assieme hanno pubblicato 84 differenti comunicazioni. Oltre il sopra ricordato lavoro di Benecke sono poi venuti a nostra cognizione ancora le seguenti comunicazioni: 1) Ranvier, *De la dégénérescence des nerfes après leur section.* — Comptes rendus LXXV, 1831. 1872. 2) Ranvier, *De la régénération des nerfs sectionnés.* — Comptes rendus LXXVI, 491, 1873. 3) Eichhorst, *Ueber Nervendegeneration und Regeneration.* — Virchow's Archiv. LIX, 1. 1874. 4) Cossy et Dejerine. *Recherches sur la dégénérescence des nerfs séparés de leurs centres trophiques.* — Archives de Physiologie normale et pathologique 1875, pag. 567. 5) Engelmann, *Ueber Degeneration von Nervenfasern.* — Pflueger's Archiv. XIII, pag. 474, 1876. 6) Bakowiecki, *Zur Frage vom Verwachsen der peripherischen Nerven.* — Arch. f. mikr. Anatomie XIII. pag. 420, 1876.

([2]) F. Boll, *Studî sulle immagini microscopiche della fibra nervosa midollare* (Lavoro eseguito nel Laboratorio d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma. VI.) Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXIV (1876-77).

la recisione di un nervo misto, abbia luogo parimente e contemporaneamente in tutte le fibre, motrici o sensitive, le quali non si trovano più in continuità con l'organo centrale, o se alle funzioni differenti delle singole fibre nervose corrispondano anche delle differenze nel decorso o nella durata del processo patologico.

È singolare che, fra i molti autori che si occuparono di una tale questione, nessuno abbia mai tenuto conto di questa circostanza. Ciò prova, che il maggior numero di quelli che finora studiarono quest'argomento a preferenza vollero far rilevare i fatti d'anatomia microscopica, ed attaccarono solo una importanza secondaria all'interesse fisiologico che si lega alla questione della recisione dei nervi.

Questa subordinazione degli interessi fisiologici agli anatomici, fa sentire i suoi deplorevoli effetti ancora in un altro caso. Si può scorrere tutta la letteratura sulla recisione dei nervi senza trovare in essa una soluzione definitiva della importante questione, se il processo degenerativo che ha luogo nel moncone periferico sia simultaneo o progressivo, cioè se la degenerazione attacchi in uno stesso tempo tutti i punti del nervo troncato, o se invece si propaghi da una all'altra sezione nervosa come un processo patologico progressivo. La maggioranza degli autori non tocca punto questa questione, ed i pochi che la discutono sono fra loro in contradizione. In fatti, mentre secondo Erb la degenerazione progredirebbe dal punto del taglio in direzione centrifuga, W. Krause ritiene al contrario, che la degenerazione si origini nelle finissime diramazioni e progredisca verso il centro. Ultimamente altri autori (Schiff, Lent, Hertz, Engelmann) sostengono una terza teoria, cioè che la degenerazione nasca contemporaneamente in tutta la lunghezza del moncone separato dal suo centro.

Per poter sostituire a queste contradizioni dei fatti positivi ci parve indispensabile di intraprendere una metodica ricerca. Nei porcelli d'India venne preparato il nervo sciatico nel punto ove esso esce dal bacino e contemporaneamente ne venne esciso un piccolo pezzo della lunghezza di 3-5 millimetri. In queste esperienze ci siamo serviti di animali giovani ed adulti, e nell'assieme abbiamo ripetuta l'operazione 48 volte. A determinati intervalli di tempo furono uccisi gli animali, ed ogni volta esaminati con il microscopio: *a*) il moncone periferico immediatamente vicino al taglio; *b*) un pezzo del moncone periferico distante non più di un cent. dal punto della recisione; *c*) un pezzo del moncone periferico, 4 cent. all'incirca distante dal luogo della recisione; *d*) un ramo muscolare della gamba proveniente dal nervo sciatico; *e*) un ramo cutaneo della gamba proveniente dallo sciatico, ambedue possibilmente lontani dal luogo della recisione. Non ci siamo mai occupati di fare preparazioni microscopiche del moncone centrale, perchè non entrava nelle nostre intenzioni lo studio delle alterazioni istologiche che in esso possono occorrere.

Meritano uno studio speciale quelle alterazioni microscopiche che si osservano nel moncone periferico e che effettuansi immediatamente in vicinanza del luogo della recisione. In rapporto ad esse possiamo confermare completamente i fatti recentemente pubblicati da Engelmann; che cioè nelle prime 24 ore dopo la operazione è dimostrabile in tutte le fibre nervose, che furono lese dal taglio, una alterazione caratteristica che si estende fino al più prossimo anello di Ranvier, giammai però oltre di questo. La nuova sezione nervosa che incomincia al di là di

quest'anello mostra una struttura perfettamente normale. Con più evidenza, che nelle preparazioni fatte con acido osmico e raffigurate dall' Engelmann, questo fatto si accentua nell'esame a fresco con la soluzione fisiologica di cloruro sodico (vedi fig. 1ª 2ª). È difficilissimo del resto dire in cosa consista questa alterazione della sezione nervosa lesa. In essa non distinguesi più nè guaina midollare nè cilindro assile: lo spazio interno della guaina dello Schwann viene occupato da una massa del tutto omogenea di forte refrazione, e priva di determinata struttura. Questo stato microscopicamente non ha alcuna somiglianza con quello che fu finora generalmente chiamato degenerazione delle fibre nervose, e sarebbe perciò utilissimo, per allontanare equivoci ed ambiguità, di introdurre per questa alterazione un nome differente e più significativo, per esempio quello di *alterazione traumatica delle fibre nervose.*

Tanto del luogo della recisione e del processo traumatico che ivi si sviluppa. Con questo processo la degenerazione propriamente detta non ha nulla da fare. La degenerazione si distingue dal processo non solo per lo aspetto microscopico ma anche perchè essa non si sviluppa mai nelle prime 24 ore, anzi deve decorrere almeno il triplo di quest' intervallo di tempo avanti che ne appaiano le sue prime tracce. Da questo momento però la degenerazione, nè predilige, nè trascura determinate parti del nervo, ma attacca contemporaneamente e parimente tutte le sezioni nervose che non sono più in relazione con i centri, senza che vi faccia ostacolo la loro più o meno grande distanza dal centro, o la loro speciale funzione fisiologica motoria o sensitiva. La degenerazione dei nervi recisi non ha dunque nessuna relazione diretta col processo del trauma stesso. Infatti essa incomincia indipendentemente in ogni singola sezione nervosa di Ranvier, perchè fu interrotta quella continuità funzionale e nutritiva con i centri nervosi, la quale pare sia una condizione indispensabile acciocchè ogni singola sezione nervosa si mantenga nel suo stato normale.

Avanti di descrivere minutamente il processo istologico della degenerazione dei nervi, sarà opportuno di spendere qualche parola sulla struttura normale delle fibre nervose che compongono il nervo sciatico del porcello d'India. In tutti i punti essenziali la loro struttura somiglia esattamente a quella delle fibre nervose dello sciatico della rana, dalle quali differiscono per le loro minori dimensioni. Inoltre differiscono anche per certe particolarità di struttura che offrono i singoli segmenti midollari, i quali nel porcello d'India ordinariamente s' internano, ciascuno dentro al segmento contiguo che lo abbraccia, molto più di quello che suole avvenire nella rana (vedi fig. 1ª). Come fu già rilevato da Boll [1], in moltissime fibre nervose poi si osserva lo *sfibramento* delle estremità libere dei segmenti midollari. Questo sfibramento, che nella rana si trova soltanto in via eccezionale, ed in tal caso debolmente accentuato, nel porcello d'India apparisce invece molto spiccato, e trovasi tanto frequente (anche nello stato freschissimo) che per le fibre nervose di questo animale deve essere considerato come una struttura caratteristica e quasi costante (vedi fig. 2ª).

Come venne già sopra accennato, avanti il 3° giorno non si osserva alcuna alterazione microscopica sulle sezioni nervose separate dall'organo centrale, ma solo

[1]) l. c. p. 8.

dopo 72 ore (1) si osservano le prime tracce di una alterazione obiettiva. Comparata con la immagine microscopica di una fibra nervosa normale, la guaina midollare, nelle sezioni nervose separate dall' organo centrale, apparisce evidentemente alterata, la sostanza dei singoli segmenti midollari si mostra ingrossata e nello stesso tempo meno refrangente. Nelle successive 24 ore questa alterazione si accentua sempre più, e dopo trascorso il 4° giorno i doppî contorni i quali limitano la fibra nervosa (cioè i tagli ottici della sostanza dei singoli segmenti midollari) sono inspessiti quasi del doppio ed appaiono nello stesso tempo più opachi. In questo caso si riceve l' impressione come se i segmenti midollari constassero di parafina o di sostanza dotata di proprietà ottiche consimili (vedi fig. 3ª). Le ulteriori alterazioni, le quali hanno luogo nel decorso del giorno susseguente, si riferiscono ai punti di contatto per i quali si riuniscono vicendevolmente i segmenti midollari. A misura che la sostanza dei segmenti midollari si rigonfia, i loro margini liberi perdono il loro taglio acuto, e facendosi più ottusi si staccano dai margini liberi dei segmenti vicini, così che la composizione dei singoli segmenti che formano la guaina midollare a quest' epoca apparisce alquanto slegata. Questo slegamento continua a fare degli ulteriori progressi e ben presto la fibra nervosa raggiunge uno stadio nel quale non si può più parlare di una guaina midollare nel vero senso della parola. I singoli segmenti midollari, retraendo vicendevolmente i margini liberi, si staccano completamente fra di loro e, riunendo contemporaneamente alle due libere estremità il loro margine su se stesso, si chiudono per cambiarsi in formazioni indipendenti e rassomiglianti a gocciole. I due disegni 4ª e 5ª sono destinati a raffigurare questo processo. Quando questo processo è completamente terminato e tutti i singoli segmenti midollari si sono perfettamente chiusi (cosa che in genere ha luogo sul finire del 6° giorno dopo la recisione) la fibra nervosa appare composta da una serie di singoli pezzi indipendenti di forma cilindrica allungata, ognuno dei quali corrisponde ad un segmento midollare primitivo. Ciascuno di questi pezzi mostra la forma di una gocciola irregolare ed ha uno splendore opaco di grasso, come se fosse formato di parafina (vedi la fig. 6ª) (2).

Con questa trasformazione in gocciole chiuse può dirsi terminata la prima fase della degenerazione, anzi si può dire che la degenerazione delle fibre midollari

(1) Questa determinazione di tempo, come tutte le altre che seguiranno, si riferisce esclusivamente al porcello d' India e non si pretende che abbia un valore generale. Nello sciatico della rana, con il quale abbiamo fatta qualche esperienza di controllo, si osservano le alterazioni microscopiche (del resto identiche in tutto a quelle del porcello d' India) dopo decorse parecchie settimane.

(2) Da un semplice ragionamento risulta che il processo ora descritto della chiusura dei singoli segmenti midollari debba compiersi relativamente molto più presto nelle fibre nervose di un calibro più fino, che in quelle di un calibro più forte. Così si spiega il fatto che nei nervi cutanei i quali constano quasi esclusivamente di fibre finissime, la degenerazione si produca più presto che nei nervi muscolari. Questa differenza (la quale probabilmente ha indotto W. Krause ad ammettere una degenerazione esordiente dalle diramazioni più fini e propagantesi verso il centro) ha certamente nulla da fare colla diversità delle funzioni, perchè anche nel tronco comune dello sciatico e nei nervi muscolari la degenerazione attacca più presto le fibre più sottili che le fibre più forti (Vedi anche per questo la spiegazione di Hertz, Virchow's Archiv XLVI, pag. 260).

consista essenzialmente in quest'alterazione dei segmenti midollari, nella loro trasformazione in *gocciole midollari*, come noi intendiamo chiamare i singoli pezzi cilindrici che si producono nella trasformazione di ciascuno dei segmenti midollari. Le alterazioni che seguono sono, per così dire, di natura molecolare, o almeno completamente sprovviste di un determinato carattere istologico. Vogliamo comprendere sotto il termine collettivo di alterazioni secondarie, quelle ulteriori modificazioni che subisce la fibra nervosa dopo la trasformazione dei segmenti midollari in gocciole midollari, cioè dopo il 6° giorno della avvenuta recisione del nervo. Queste alterazioni secondarie principalmente consistono in ciò, che le singole gocciole midollari, cominciano a mostrare sulle loro superficie numerose irregolarità, pieghe, sporgenze e depressioni. Queste pieghe in prima decorrono parallele all'asse longitudinale della fibra nervosa e della gocciola midollare (vedi le fig. 7ª e 8ª), ma molto presto però appaiono anche delle pieghe più irregolari, oblique e finalmente trasverse. A misura che queste ultime si approfondiscono, producono la scissione delle singole gocciole midollari in due parti separate più piccole e ben presto (circa il 10° giorno dopo la recisione) per questo processo di divisione, il quale successivamente si estende a tutte le gocciole midollari, viene ad essere quasi raddoppiato il numero delle primitive gocciole midollari e segmenti midollari, i quali originariamente si trovano nella sezione nervosa. In cambio dei cilindri allungati primitivi si vedono delle gocciole tonde (vedi la fig. 9ª). In queste gocciole arrotondate, il numero delle quali va continuamente aumentando per ulteriori divisioni, appariscono presto grandi e piccoli globicini di forte refrazione l'aspetto dei quali fa rammentare le fine gocciole di grasso (vedi la fig. 10ª). Più tardi ancora i limiti fra le singole gocciole spariscono ed il contenuto della fibra nervosa si trasforma in una massa omogenea, come in un detritus, la quale consta di una sostanza fondamentale granulosa ove si trovano sospesi globicini grandi, piccoli e piccolissimi, dello splendore del grasso, più vi si rinvengono dei nuclei liberi e delle cellule migratorie.

Sulla provenienza di quest' ultime formazioni e sui processi intimi che danno luogo alla formazione delle gocciole grassose non sappiamo dir nulla di determinato, ma dobbiamo lasciare agli osservatori che ci seguiranno e più specialmente ai cultori della chimica la soluzione di codeste questioni, ed in particolar modo la decisione se le gocciole grassose realmente constino o no di una sostanza grassa. In egual modo abbiamo anche trascurato di esaminare le ultime ed importanti asserzioni del Ranvier sul comportarsi dei nuclei dello Schwann nella degenerazione dei nervi recisi, e ciò perchè nel presente lavoro ci siamo fatti guidare da uno scopo solo, cioè abbiamo voluto determinare e descrivere fedelmente la parte che nella degenerazione dei nervi recisi prendono i segmenti midollari rimasti sconosciuti agli anteriori osservatori. Partendo da questo punto di vista abbiamo trovato che il processo istologico, il quale è del tutto caratteristico per la degenerazione dei nervi recisi, restò completamente ignoto a tutti i nostri antecessori. Esso consiste nella (probabilmente attiva) alterazione dei segmenti midollari e nella loro trasformazione in gocciole midollari. Solo dopo la formazione di queste gocciole midollari si producono in esse, e per mezzo di esse quei processi, che finora hanno attirato l' attenzione degli autori e che fino ad oggi furono considerati come caratteristici del processo istologico della

degenerazione dei nervi: ma ai quali noi però non possiamo che attribuire una importanza secondaria, considerandoli di sola natura molecolare e non istologica.

Finalmente ci sia permesso di toccare ancora un'altra questione, la quale finora nella letteratura sulla recisione dei nervi ha avuto una grande anzi la grandissima parte, cioè la questione se nelle fibre nervose separate dal centro il cilindro assile si mantenga o deperisca. Quelli che si accostano alla prima opinione, in quanto si tratta della struttura normale del cilindro assile, debbono adottare l'originaria idea degli Istologi secondo la quale il cilindro assile nello stato fresco rappresenta una formazione solida. Chi invece, rispetto alla struttura del cilindro, accetta i risultati delle ricerche istologiche più recenti e gli attribuisce una consistenza liquida o semi-liquida, troverà a priori delle difficoltà per persuadersi della persistenza del cilindro assile nei nervi separati dal centro. Il fatto poi che il cilindro assile nella fibra nervosa recisa realmente deperisce, deve essere riconosciuto come certissimo da ognuno che con precisione segua le alterazioni della guaina midollare nella degenerazione dei nervi e che tenga conto del fatto che il sopra descritto processo della chiusura dei singoli segmenti midollari non può aver luogo, senza che contemporaneamente il cilindro assile venga spezzato e suddiviso in altrettanti pezzi quanti esistevano segmenti midollari e quanti se ne chiudono per formare gocciole midollari. Ogni singola gocciola midollare deve racchiudere nel suo interno un pezzo della sostanza del cilindro assile che corrisponde alla sua lunghezza, e questo processo che in tutta la lunghezza della fibra nervosa costantemente si ripete, deve avere per conseguenza immediata e necessaria lo spezzamento del cilindro assile che, come formazione continua, è immancabilmente distrutto.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Tutte le preparazioni disegnate provengono dal nervo sciatico del porcello d' India; tutte sono esaminate nella soluzione fisiologica di cloruro sodico ed ingrandite esattamente 540 volte.

Fig. 1.ª Fibra nervosa nel luogo del taglio 24 ore dopo la rescisione: l'alterazione traumatica della sezione nervosa si estende dal taglio solo fino all'anello di Ranvier, la sezione nervosa che incomincia al di là dell'anello mostra una struttura completamente normale.

Fig. 2ª come la Fig. 1.ª I segmenti midollari della sezione nervosa rimasta ancora normale mostrano tutti ai loro termini liberi uno spiccato sfibramento.

Fig. 3.ª Fibra nervosa del tronco del nervo sciatico, distante parecchi centimetri dal luogo del taglio, 3 giorni dopo la recisione. Incomincia l'alterazione dei segmenti midollari, la sostanza dei quali è ingrossata già quasi del doppio.

Fig. 4.ª Fibra nervosa al 5° giorno dopo la recisione. I segmenti midollari incominciano a sciogliersi fra loro nei rispettivi punti di contatto.

Fig. 5ª e 6.ª Fibre nervose del 6° giorno dopo la recisione. I segmenti midollari si trasformano in gocciole midollari.

Fig. 7ª e 8.ª Fibre nervose all' 8° giorno dopo la recisione. Le gocciole midollari vengono alterate per mezzo di pieghe, le quali a preferenza decorrono lungo l' asse longitudinale della fibra nervosa.

Fig. 9.ª Fibra nervosa al 10° giorno dopo la recisione. Oltre le pieghe longitudinali si formano anche depressioni trasverse che dimezzano le gocciole midollari aumentandone notevolmente il numero.

Fig. 10ª. Fibra nervosa al 12° giorno dopo la recisione. Il numero delle gocciole midollari è straordinariamente aumentato e nel loro interno si mostrano numerosi globicini fortemente risplendenti.

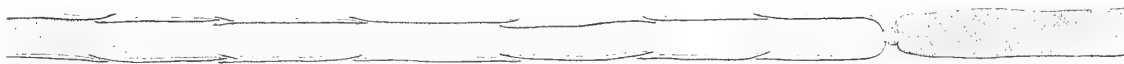



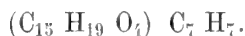
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

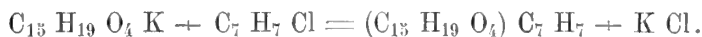
Note cristallografiche e chimiche.

Memoria del dott. RUGGIERO PANEBIANCO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 marzo 1878.

1.° Santonato benzilico

$$(C_{15} H_{19} O_4) C_7 H_7.$$

Preparazione. — Si scalda cloruro benzilico con soluzione alcoolica di santonato potassico, secondo le proporzioni richieste dall'equazione

$$C_{15} H_{19} O_4 K + C_7 H_7 Cl = (C_{15} H_{19} O_4) C_7 H_7 + K Cl.$$

Caratteri. — Solubile nell'alcool e nell'etere. È incoloro ed inodoro. Fonde ad 84°, 3 (corretto).

Analisi. — Per 100 parti	Trovato	Calcolato
C.	74, 20	74, 58
H.	7, 47	7, 34

Saponificando con potassa alcoolica ed indi trattando con un acido si ottiene l'acido santonico riconoscibile alla forma cristallina [1], e l'alcool benzilico, dal quale successivamente si ha il cloruro benzilico e la tribenzilamina riconoscibile alla forma cristallina.

Sistema cristallino. — Trimetrico.

Costanti. a : b : c = 0, 7701 : 1 : 0, 4159.

Combinazione osservata. (100) (010) (110) (101) (011) (fig. 1 e 2).

Angoli	n [2]	Calcolati	Misurati	Limiti delle osservazioni
100 : 010	9	90°	90° 2′	89° 40′ — 90° 16′
100 : 110	19	37° 36′	37° 36′*	37° 29′ — 37° 43′
100 : 101	7	61° 38′	61° 34′.	61° 28′ — 61° 41′
011 : 0$\bar{1}$1	5	45° 10′	45°	44° 57′ — 45° 17′
010 : 011	5	67° 25′	67° 25′*	67° 15′ — 67° 29
101 : $\bar{1}$01	6	56° 45′	56° 40′	56° 15′ — 57° 13′
011 : 101	3	35° 40′	35° 29′	35° 18′ — 35° 35′

[1] Scacchi, Gaz. Chim. 1873, pag. 242. — Strüver, id. 1876, pag. 349.
[2] n = numero degli angoli omologhi misurati.

Sfaldatura. Parallela ad (100).

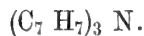
Nota. Le facce del prisma verticale sono striate parallelamente agli spigoli d'esso. Le facce di uno dei prismi orizzontali sono generalmente piccole, talchè i cristalli sono terminati a scalpello.

Caratteri ottici [1]. — Formola ottica. b a $\overset{+}{c}$.

$2H_a = 92°.10'$ per il rosso
$= 92°.43'$ » violetto $2V = 85°.57'$
$2H_o = 101°.17'$ » rosso $= 86°.15'$
$= 101°.12'$ » violetto

Bisettrice acuta. Positiva, normale a (001).
Dispersione. $\rho < v$

2.° Tribenzilamina

$(C_7 H_7)_3 N$.

(*Cannizzaro. Cimento III pag. 397*).

Sistema cristallino. — Monoclino.

Costanti più probabili. a : b : c = 1,22417 : 1 : 1,01301 ; $\eta = + X : + Z = 95° 4' 2''$.
Forme osservate. (100), (001), (110), (120), (101), (10$\bar{1}$), ($\bar{1}$11), ($\bar{1}$22). (fig. 3).
Combinazioni osservate. (100) (001) (110) ($\bar{1}$11) (10$\bar{1}$) (101) ($\bar{1}$22); e detta con (120) (fig. 4).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
00$\bar{1}$: 100	1	95° 4′ 2″	95° 5′ 20″
00$\bar{1}$: 10$\bar{1}$	7	41° 38′ 40″	41° 36′ 25″
00$\bar{1}$: $\bar{1}$0$\bar{1}$	1	37° 31′ 30″	37° 32′
100 : 110	4	50° 38′ 40″	50° 41′
110 : 120	1	17° 3′ 30″	17° 5′
100 : 11$\bar{1}$	2	62° 28′	62° 33′ 50″
11$\bar{1}$: 12$\bar{2}$	2	14° 36′ 30″	14° 31′ 30″
11$\bar{1}$: 00$\bar{1}$	2	54° 34′ 20″	54° 31′ 40″
11$\bar{1}$: 110	1	38° 38′ 20″	38° 45′

Sfaldatura. Interrotta, parallela a (001).
Piano di geminazione osservato. Parallelo ad (100).

[1] Sul significato della formola ottica si veda: Grailich, *Krystallographisch-optische Untersuchungen.* Sul significato delle lettere si veda: Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie.*

Angoli caratteristici del geminato (fig. 5).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
$001:00\bar{1}$	2	10° 8′	10° 5′
$12\bar{2}:\bar{1}\bar{2}2$	1	25° 51′	25° 43′

Caratteri ottici. — Piano degli assi ottici. Normale a (010).

Bisettrice acuta. Positiva, formante l'angolo di 35° circa (luce ordinaria) con l'asse *a* verso l'asse — *c*.

Dispersione. Orizzontale, $\rho < v$.

$2H_a = 82°$ circa (luce ordinaria).

3.° Cloroplatinato di Tribenzilamina

$Pt\ Cl_6\ [(C_7\ H_7)_3\ N\ H]_2$.

(*Cannizzaro. Cimento III pag. 397*).

Per ottenere questo corpo in cristallini macroscopici, si lascia evaporare una sua soluzione alcoolica sull'acido solforico ed alla pressione di pochi centimetri di mercurio.

Sistema cristallino. — Monoclino

Costanti. a : b : c = 1,1588 : 1 : 1,6073; $\eta = + X : + Z = 105° 43'$.

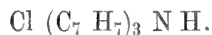
Forme osservate. (100), (001), (111), ($\bar{1}$11), (110), (210). (fig. 6).

Combinazioni osservate. (100) (001) (111) ($\bar{1}$11) (210); id. con (110). (fig. 7).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
100 : 001	5	74° 17′	74° 17*
$111:11\bar{1}$	3	50° 56′	50° 56′*
111 : 100	2	47° 42′	47° 35′
100 : 210	2	29° 9′	29° 9′*
$210:11\bar{1}$	1	36° 1′	35° 40′pros.
100 : 110	—	48° 8′	—

Nota. La sfaldatura ed i caratteri ottici non poterono essere osservati a causa della estrema piccolezza dei cristalli.

4.° Cloridrato di Tribenzilamina

$Cl\ (C_7\ H_7)_3\ N\ H.$

Preparazione. — Si satura con acido cloridrico una soluzione alcoolica di tribenzilamina. Si ottiene pure nella preparazione della tribenzilamina qualora l'ammoniaca sia in difetto.

Caratteri. — Poco solubile nell'alcool, insolubile nell'acqua e nell'etere. È incoloro ed inodoro. Fonde a circa 208° ed incomincia a volatilizzarsi prima di fondere.

Analisi. — Non contiene acqua di cristallizzazione.

Per 100 parti	Trovato	Calcolato
Cl.	10,85	10,97

Sistema cristallino. — Romboedrico (in piccolissimi cristallini allungati).

Angolo degli assi. 114° 19'.

Combinazione osservata. $(10\bar{1})$ (100) (fig. 8 e 9).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
001 : 100	4	45° 33' 30"	45° 33' 30" *
$10\bar{1} : 0\bar{1}0$	5	60°	59° 59'
$10\bar{1}$: 100	4	67° 13'	67° 5' 30"
$10\bar{1}$: 010	2	90°	89° 58' 20"

Caratteri ottici. — Doppia rifrazione. Positiva.

Nota. La sfaldatura non potè essere osservata a causa della piccolezza dei cristalli.

5.° Solfato di Tribenzilamina

Preparazione. — Si satura con acido solforico una soluzione alcoolica di tribenzilamina.

Caratteri. — Solubile nell'alcool, insolubile nell'acqua e nell'etere. È incoloro ed inodoro. Fonde a 106° — 107°, ed incomincia a scomporsi.

Non contiene acqua di cristallizzazione. Si constatò la presenza dell'acido solforico e della base organica.

Sistema cristallino. — Monoclino.

Costanti più probabili. a : b : c = 0,88306 : 1 : 0,88038 ; η = + X : + Z = 100° 25'.

Forme osservate. (100) , (001) , (010) , $(\bar{1}11)$, (012). (fig. 10).

Combinazioni osservate. (100) (001) (010); id. con $(\bar{1}11)$ (012). (fig. 11).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
$100:001$	3	79° 35′	79° 28′
$100:11\bar{1}$	1	58° 5′	58° 6′
$001:11\bar{1}$	1	122° 5′	122° 10′
$010:11\bar{1}$	1	55° 52′ 50″	55° 53′
$100:01\bar{2}$	1	99° 32′ 50″	99° 32′
$010:01\bar{2}$	1	66° 35′	66° 28″
$11\bar{1}:01\bar{2}$	1	44° 45′ 10″	44° 45″

Sfaldatura. Perfetta, parallela a (010).

Nota. Le facce dei tre pinacoidi sono generalmente appannate.

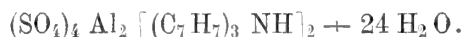
Caratteri ottici. — In una lamina di sfaldatura un piano di massima estinzione fa l'angolo di 39° 30′ circa (luce ordinaria) con l'asse *a* verso l'asse — *c*.

Dispersione. Rotatoria.

Doppia rifrazione. Negativa.

$2H_a = 105°$ circa, per il rosso.

6.° Allume di Tribenzilamina

$(SO_4)_4 \, Al_2 \, [(C_7H_7)_3 \, NH]_2 + 24 \, H_2O$.

Preparazione. — Si tratta con acido solforico un miscuglio di tribenzilamina ed allumina.

Caratteri. — Solubile nell'acqua, insolubile nell'alcool e nell'etere. È incoloro ed inodoro. Fonde nella sua acqua di cristallizzazione a circa 110°, ed a 120° circa comincia a decomporsi.

Analisi. — Fu constatata la presenza dell'allumina e della base organica.

Per 100 parti	Trovato	Calcolato
H_2O	29,94	29,85
SO_3	21,98	22,11

Sistema cristallino. — Monometrico.

Combinazioni osservate. (111); (111) (100).

Sfaldatura. Difficile, parallela a (111).

7.° Nitrato di Tribenzilamina

$NO_3 \, (C_7H_7)_3 \, NH$.

Preparazione. — Si satura a freddo con acido nitrico una soluzione alcoolica di tribenzilamina.

Caratteri. — Poco solubile nell' alcool, insolubile nell' acqua e nell' etere. È incoloro ed inodoro. Fonde a 120° e si scompone. Brucia spandendo soavissimo odore.

Analisi. — Non contiene acqua di cristallizzazione.

Per 100 parti	Trovato	Calcolato
N.	8,14	8,00

Per ottenere dei cristallini macroscopici si usi il metodo di cristallizzazione accennato per il cloroplatinato.

Sistema cristallino. — Trimetrico (emiedrico a facce inclinate).

Costanti. a : b : c = 2,49430 : 1 : 0,99784.

Combinazione osservata. (100) (010) (101) $\varkappa$ (111). (fig. 12 e 13).

Angoli	n	Calcolati	Misurati
010 : 111	3	47° 11′ 10″	47° 11′ 10″*
100 : 111	2	74° 11′ 20″	74° 11′ 20″*
101 : $\bar{1}$01	1	43° 37′	43° 42′
100 : $\bar{1}$01	1	111° 48′	111° 44′

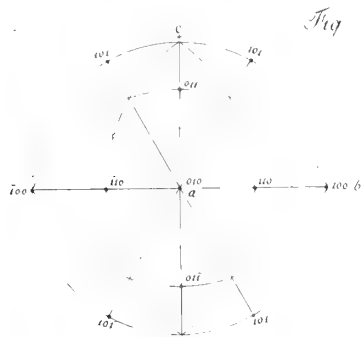
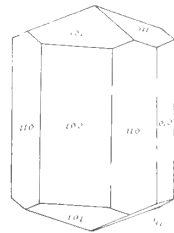
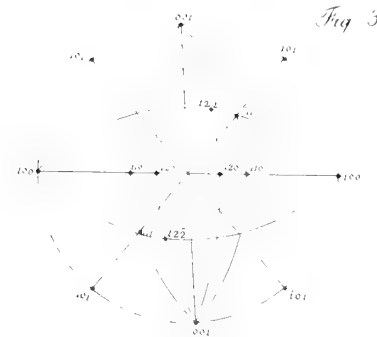
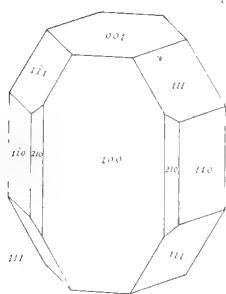
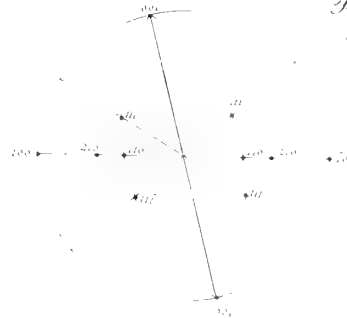
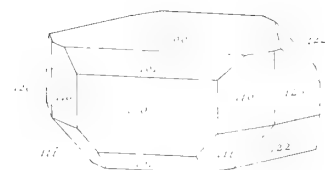
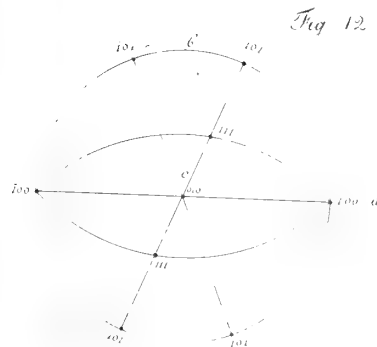
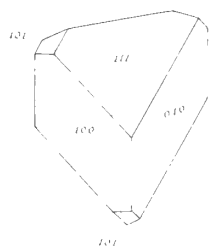
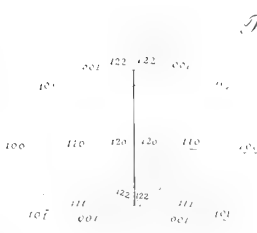
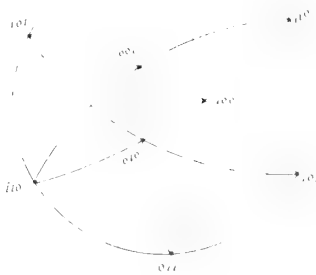
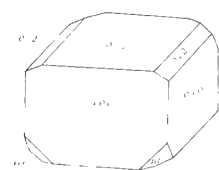
Sfaldatura. Perfetta, parallela ad (100).

Caratteri ottici. — Formola ottica. $\underline{a}$ c b.

Bisettrice acuta. Normale ad (100).

Dispersione. $\rho < v$.

2E = 45°.20′ per il rosso
= 47°.40″ » violetto

R. Panebianco - Note Cristallografiche

Indagini sperimentali sulla temperatura del Sole.

Memoria del prof. FRANCESCO ROSSETTI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 6 gennaio 1878.

PREFAZIONE

Il problema della temperatura effettiva del Sole fu vivamente agitato in questi ultimi tempi e non fu peranco risoluto. Di questo argomento si occuparono già il Newton, e più tardi il Saussure; e più recentemente il Pouillet, il Waterston, il Secchi, l'Ericson, il Vicaire, il Soret, il Violle, il Crova ed altri.

Benchè le osservazioni fatte da questi sul raggiamento solare sieno abbastanza concordanti, pure le conclusioni alle quali pervengono circa la temperatura del Sole sono talmente diverse, che sta fra esse un abisso. Mentre il Newton, il Waterston, l'Ericson, il Secchi dichiarano che la temperatura del Sole non può essere inferiore a uno o due milioni di gradi, il Pouillet, il Vicaire, il Violle e molti altri sostengono che quella temperatura non supera i 1500 o tutt'al più i 2500 gradi.

Un argomento così controverso parve all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Francia che fosse degno di un concorso, che essa bandì pel 1876 col titolo di premio Bordin. Spirato il concorso l'Accademia diede una ricompensa al sig. Violle, ed un assegno d'incoraggiamento ai sigg. Vicaire e Crova, ma dichiarò che nessuno aveva risolto il problema, e, vista la difficoltà ch'esso presentava, deliberò di non più ripresentarlo per un ulteriore concorso (1).

Osservava giustamente la Commissione dell'Accademia, come per dedurre la costante solare ai limiti dell'atmosfera sia sempre necessario di ricorrere a una pericolosa extrapolazione, e di più come non sia minore il pericolo che s'incontra necessariamente coll'applicare a temperature superiori a quella di fusione del platino una legge del raggiamento appena legittimata per le temperature comprese fra 0 e 300 gradi.

Infatti da osservazioni presso che identiche del raggiamento solare, il Secchi ottiene due e più milioni di gradi deducendo questa temperatura dalla formola del Newton; e invece il Violle ottiene 1500 gradi facendo uso di quella di Dulong e Petit; mentre è dimostrato che ambidue le formole non sono applicabili se non nel caso di piccole differenze tra la temperatura del corpo caldo raggiante, e la temperatura ov'è collocato il corpo freddo che si riscalda.

(1) Comptes rendus, Vol. 84, pag. 813, anno 1877.

Quelle due formole applicate al caso di un corpo reso incandescente dalla fiamma ossidrogenica, che ha al certo una temperatura di 2000 gradi, danno, la prima (quella del Newton) la temperatura di 45990 gradi, eccessivamente elevata; la seconda (quella di Dulong e Petit) la temperatura troppo bassa di 870 gradi.

Il Violle, volendo in ogni modo giustificare il tenue valore che dà la formola di Dulong e Petit, ne incolpò il poter emissivo specifico del corpo incandescente, e ritenendo esatta ed applicabile anche a quel caso la formola, dedusse dalla stessa un valore eccessivamente piccolo del poter emissivo di quel corpo.

A me parve che invece di violentare le formole per far loro dire ciò che non possono, fosse assai migliore consiglio affrontare direttamente la questione, stabilire col mezzo di apposite esperienze la legge con cui varia la intensità del raggiamento al variare della temperatura, determinare il potere emissivo dei varî corpi su cui si sperimenta, e nelle condizioni nelle quali essi trovansi realmente all'atto dell'esperienza; e trovata la formola che esprime la legge del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze, verificare se essa corrisponda anche nel caso di temperature più elevate ma ben conosciute. Solamente quando questa corrispondenza esista, si ha il diritto di estender ancor più l'uso della formola, e di indagare, con grande probabilità di esattezza, la ignota temperatura di corpi inaccessibili e straordinariamente caldi, come al certo dev'essere il Sole.

Così facendo credo di aver superato la seconda delle due difficoltà segnalate dalla Commissione dell'Accademia di Francia.

Quanto alla prima difficoltà essa non può per la natura del problema esser del tutto evitata. Anch'io ho dovuto ricorrere a un'extrapolazione per ottenere il valore della costante solare ai limiti dell'atmosfera; ma il metodo da me adoperato rende quella extrapolazione assai più sicura e precisa.

Perciò io credo che le cifre da me ottenute rappresentino la temperatura del Sole in modo abbastanza preciso e soddisfacente: come apparirà dalla lettura di questa Memoria che ho l'onore di presentare alla R. Accademia dei Lincei.

---

§ I.

Descrizione degli strumenti adoperati in queste indagini.

Pile termo-elettriche.

Nelle mie sperienze ho adoperato due differenti pile termo-elettriche, una delle quali fu costruita da Duboscq e l'altra da Gourjeon. La pila costruita da Duboscq, che chiameremo pila n. 1, era composta di 25 elementi antimonio-bismuto disposti in modo da formare un prisma retto a base quadrata: sulle basi di questo prisma stavano le saldature, che venivano coperte di nero fumo. Il primo bastoncino di bismuto e l'ultimo d'antimonio erano in comunicazione metallica con due morsette isolate *a* e *b*

(fig. 1) nelle quali si stringevano i due reofori. La pila era protetta da una custodia di ottone a doppia parete (fig. 1 e 2) fornita di due fori in corrispondenza alle due faccie della pila. Questa occupava il centro della custodia ed era sostenuta da un pezzo metallico *c*. La custodia ABCD aveva la forma di un prisma retto a base rettangolare. Le due basi anteriore e posteriore si potevano all'occorrenza levare, e portavano verso il centro le due finestre destinate a lasciar libero l'accesso dei raggi fino alle saldature della pila. Queste finestre potevano però esser chiuse da due schermi, anch'essi a doppia parete (fig. 3), che scorrevano lungo due guide orizzontali fissate alla parete esterna della custodia: questo modo di chiusura è simile a quello che si usa per molti carri ferroviarî destinati al trasporto delle merci. Le pareti interne della custodia erano coperte di nero fumo; esse non potevano però irradiare sulle faccie della pila, perchè queste erano protette da due tubi EE, EE a sezione rettangolare, che, divergendo assai poco verso l'esterno, arrivavano fino in prossimità alle finestre della custodia.

La custodia e la pila in essa contenuta si potevano variamente inclinare all'orizzonte movendo un rocchetto dentato G, che ingranava in una ruota F alla quale la custodia era unita in sistema. Questa ruota era poi portata da una colonna H che poteva scorrere lungo un'asta orizzontale graduata T, e venir fissata in ogni punto di essa mediante una vite di pressione.

In tal modo alla pila si potevano dare due movimenti, uno di traslazione lungo una retta orizzontale, l'altro di rotazione intorno ad asse orizzontale. Un terzo movimento, di rotazione intorno ad asse verticale, si poteva ottenere a mano movendo in giro il sostegno L.

Importava assai di poter dirigere con precisione la pila, di disporre cioè una delle due faccie esattamente perpendicolare alla direzione secondo cui si propaga un dato raggiamento. Ad ottener ciò servivano due pinnule *e, f* fissate sul coperchio della custodia, fornite ciascuna di un forellino nel centro. La retta passante per i due centri di questi forellini era parallela all'asse longitudinale della pila termo-elettrica. Si poteva in tal modo dirigere quest'asse, come si fa nelle operazioni geodetiche colla diottra a pinnule, e se si trattava del raggiamento solare si poteva star certi che una faccia della pila era normale alla direzione dei raggi solari, quando il fascetto luminoso che attraversava il foro della pinnula anteriore andava a cadere sul foro della posteriore.

La seconda pila termo-elettrica, costruita da Gourjeon, che nomineremo pila n. 2, servì solo in alcune ricerche speciali. Essa era composta di un numero maggiore di elementi bismuto-antimonio, disposti in modo da formare un cilindro retto a base circolare. Era più sensibile della pila n. 1.

Bussola a riflessione.

La intensità della corrente termo-elettrica generata dalla pila esposta al raggiamento veniva misurata con un'eccellente bussola a riflessione di Wiedemann costruita dal Ruhmkorff. Com'è ben noto, in questa bussola l'ago magnetico è costituito da un dischetto di acciajo brunito su una faccia e sospeso ad un lungo filo di bozzolo in modo da riuscire verticale e da poter liberamente oscillare intorno ad asse verticale.

Le deviazioni dell'ago si leggono mediante un cannocchiale e una scala divisa orizzontale, collocata rimpetto alla faccia brunita del dischetto, a qualche distanza da esso. La corrente che fa deviare l'ago circola in un filo avvolto su due rocchetti verticali, i quali stanno l'uno da una parte e l'altro dall'altra del dischetto magnetico, sono indipendenti fra loro e possono venire più o meno avvicinati al dischetto medesimo. Su ciascuno di questi rocchetti erano avvolti due fili, onde poter adoperare lo strumento anche come galvanometro differenziale: nel mio caso importava soltanto di ottenere una grande sensibilità e quindi disposi le congiunzioni in modo che la corrente attraversasse successivamente e nel medesimo senso i due circuiti di ciascun rocchetto. Avvicinai poi quanto era possibile i due rocchetti al dischetto, e disposi superiormente una grossa calamita a qualche distanza dal dischetto, in maniera da neutralizzare in gran parte l'azione magnetica terrestre. In tali condizioni lo strumento era sensibilissimo. Il cannocchiale munito di reticolo, e la scala divisa erano posti a circa tre metri dalla bussola. La scala era divisa di due in due millimetri e col mezzo del cannocchiale si leggevano i decimi di una particella.

Nel fare le letture delle deviazioni si aveva riguardo alle differenze nella posizione di equilibrio del dischetto d'acciajo, quando non passava per il circuito alcuna corrente, differenze prodotte dalle variazioni della declinazione magnetica terrestre; a tale scopo, prima di far passare la corrente, si osservava quale divisione della scala apparisse in corrispondenza del filo verticale del reticolo del cannocchiale, e si riteneva il numero così trovato come punto di partenza per computare la deviazione successiva.

§ II.

Esperienze per determinare la legge del raggiamento in funzione della temperatura.

Esperienze fra 0° *e* 300°

Per determinare la legge del raggiamento in funzione della temperatura cominciai col prendere per corpo raggiante il cubo di Leslie ripieno di acqua che mediante una fiammella veniva portata a varie temperature, e infine mantenuta alla temperatura di ebollizione. Allo scopo di procedere al di sopra di 100 gradi e fino ai 300 mi valsi del mercurio e feci per conseguenza costruire un apposito cubo con lamine di ferro. Il coperchio di questo cubo era munito di tre fori: attraverso due di questi passavano i cannelli di due termometri aventi la graduazione fino a 360° e costruiti dal Geissler colla sua ben nota diligenza; per il terzo foro passava l'asticciuola di un agitatore pure di ferro (veggasi la fig. 4). A piccola distanza dalla faccia irradiante era collocato un diaframma a doppia parete; nel centro di esso venne bucato su ogni parete un foro circolare di diametro alquanto più piccolo dell'apertura della custodia contenente la pila. In tal guisa si poteva esser certi che ogni punto della faccia della pila riceveva il raggiamento da una superficie irradiante di eguale estensione: mentre se i fori del diaframma fossero stati più grandi dell'apertura della custodia, sarebbe avvenuto che gli elementi della pila situati sull'orlo avrebbero ricevuto una quantità di raggi minore di quella incidente sugli elementi centrali della pila stessa. Senza questa precauzione si ottengono dei risultati che non sono paragonabili fra di loro,

allorchè si muta la distanza della pila dalla faccia irradiante. Per maggior precauzione le due pareti esterne del diaframma vennero affumicate, ed inoltre tra la pila ed il primo diaframma si collocò un secondo diaframma, pure a doppie pareti con fori alquanto maggiori dell'apertura della custodia. Ad allineare esattamente i due diaframmi e la pila in guisa che la retta normale passante pei centri di quei fori riuscisse perpendicolare sul centro della faccia della pila termo-elettrica, servivano dei forellini situati sulle pareti dei diaframmi a una distanza dal foro centrale eguale a quella che separava i forellini della diottra della pila dal centro di questa. Così allorchè traguardando a traverso tutti quei forellini si poteva scorgere distintamente una fiammella momentaneamente collocata dinanzi al primo diaframma, si aveva la sicurezza che la pila e i due diaframmi erano bene allineati.

Le esperienze vennero fatte colla pila più sensibile n. 2 e nel circuito non fu introdotta alcuna resistenza all'infuori di quella offerta dalla pila stessa, dai reofori e dalla bussola. Il seguente prospetto contiene i risultamenti sperimentali ottenuti.

PROSPETTO I.

Temperatura dell'ambiente 23°, 8 C.

	Temperatura della faccia raggiante	Differenza di temperatura fra la superficie raggiante e l' ambiente ove era situata la pila	Deviazioni lette alla bussola
1	56°,6	32°,8	Div.[i] 10,0
2	96°,6	72, 8	29,5
3	116°,6	92, 8	42,8
4	136°,6	112, 8	55,0
5	156°,6	132, 8	72,5
6	176°,6	152, 8	91,5
7	196°,6	172, 8	116,7
8	216°,6	192, 8	141,9
9	236°,6	212, 8	169,5
10	256°,6	232, 8	204,0
11	276°,6	252, 8	239,5
12	296°,6	272, 8	283,5

Devesi notare che ogni esperienza fu ripetuta almeno due volte, e furono prese le necessarie precauzioni perchè durante l'esperienza la temperatura si conservasse stazionaria; in tal guisa i numeri ottenuti riuscivano pressochè identici nelle due esperienze; e qualora fra la prima e la seconda esperienza si avesse trovato una differenza superiore a una o al più due divisioni nelle alte temperature, e a cinque decimi nelle temperature basse, si procedeva a una terza e talora a una quarta esperienza per dedurne un valor medio preciso.

§ III.

Formole empiriche e scelta di quella che meglio rappresenta il fenomeno.

Fatte le esperienze ora indicate importava di dedurre dalle stesse la legge colla quale varia l'effetto termico, prodotto dal raggiamento, al variare della temperatura

della superficie raggiante. A tale scopo cominciai col costruire la curva passante pei punti determinati coi dati numerici contenuti nel precedente prospetto, prendendo per ascisse i numeri contenuti nella terza colonna (le differenze di temperatura fra il corpo raggiante e l'ambiente ov'era situata la pila) e per ordinate i corrispondenti numeri della quarta colonna (le deviazioni galvanometriche). La curva fu costruita su ampia scala. Un semplice sguardo alla curva ci avverte che l'effetto termico del raggiamento cresce assai più rapidamente della temperatura della superficie raggiante; e per conseguenza resta esclusa senz'altro l'applicabilità della legge di Newton, la quale sarebbe rappresentata graficamente da una linea retta. — È già stato dimostrato da lungo tempo e da molti fisici che la formola del Newton, come viene d'ordinario interpretata, non è applicabile se non quando la differenza di temperatura fra il corpo caldo che irraggia e il corpo freddo che accoglie il raggiamento, è assai piccola.

I signori Dulong e Petit hanno provato con una serie di accuratissime esperienze che la legge del raggiamento è espressa dalla formola

$$q = b\,[a^{t-t}\,1 - 1]$$

nella quale q rappresenta la quantità di calore ceduta da ogni unità della superficie del corpo irradiante nell'unità di tempo, t la temperatura del corpo caldo raggiante, t_1 quella dell'ambiente, a e b due costanti (vedasi Jamin, *Cours de Physique* Vol. II, 1868 pag. 329). Sebbene quella formola abbia servito a quegli illustri fisici a rappresentare bene il fenomeno del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze (comprese fra 0° e 280°) e nelle condizioni in cui esse furono eseguite, tuttavia è stato dimostrato da parecchi fisici, e tra gli altri dall'Ericson, che essa non è applicabile in generale quando la differenza di temperatura tra il corpo caldo irradiante e l'ambiente superi 80 gradi, ed anche il sig. Jamin dichiara (Vol. II, pag. 314) che essa è una formola empirica e cessa di essere esatta alle temperature elevate.

Poichè adunque la formola di Dulong e Petit è empirica, e di uso limitato, io volli indagare se a quella si potesse sostituire un'altra formola, la quale meglio di essa si prestasse a rappresentare il fenomeno del raggiamento termico in funzione della temperatura del corpo caldo raggiante, e della temperatura dell'ambiente che circonda il corpo freddo che accoglie il raggiamento. Dopo molte riflessioni mi decisi ad adottare la formola

$$y = a\mathrm{T}^2\,(\mathrm{T} - \Theta) - b\,(\mathrm{T} - \Theta),$$

nella quale y rappresenta l'effetto termico prodotto dal raggiamento e misurato dallo strumento termometrico, che in questo caso era la pila termo-elettrica; T è la *temperatura assoluta* del corpo caldo raggiante, Θ la temperatura pure assoluta dell'ambiente, ove è collocata la pila, a e b due quantità da determinarsi espressamente, che dipendono dalla qualità dello strumento termometrico, e che si mantengono costanti per un medesimo corpo raggiante qualunque sia la sua temperatura. Il primo dei due termini del secondo membro dell'anzidetta formola si può considerare come rappresentante dell'effetto termico prodotto dal raggiamento, qualora l'esperienza si potesse fare in uno spazio vuoto; il secondo termine invece starebbe nella formola a rappresentare l'influenza esercitata dall'aria dell'ambiente.

La formola da me adottata si può riguardare, quanto alla forma, identica a quella del Newton, essendo anche in essa il valore di y proporzionale a $T-\Theta$, con questo divario però che mentre in quella del Newton, come viene d'ordinario usata, si considera indipendente dalla temperatura il poter emissivo del corpo irradiante, nella formola da me proposta invece il poter emissivo è rappresentato dalla quantità $E \times T^2$, cioè è proporzionale al quadrato della temperatura assoluta del corpo raggiante.

Io suppongo cioè che dato un corpo dotato del massimo potere emissivo, per es. il nero fumo, che per $T=1$ abbia un potere emissivo $E=1$, di mano in mano che s'eleva la di lui temperatura, vada in esso aumentando anche il poter emissivo, e questi aumenti sieno proporzionali al quadrato della temperatura. Che questa supposizione non sia infondata lo dicono tra le altre le esperienze di Tyndall sulla emissione del calore (Pogg. Ann. Vol. 174 ed anche Wüllner, *Lehrbuch der Physik* Vol. III, pag. 215, 216). E poi basta considerare anche il modo con cui si comportano i corpi rispetto al raggiamento di mano in mano che si aumenta la loro temperatura. Le belle esperienze di Melloni e di Tyndall hanno provato che collo elevarsi della temperatura il raggiamento dei corpi in certa guisa si esalta, perchè non solo aumenta l'energia dei raggi delle ondulazioni prima esistenti, ma a queste si aggiungono altri raggi di maggior rifrangibilità; e così il raggiamento aumenta per la maggior quantità di raggi di diversa rifrangibilità, e per la maggior intensità di vibrazione di ogni singolo raggio.

Comunque sia, la sola pratica applicazione può decidere se la formola da me scelta rappresenti bene il fenomeno del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze; e se anche si possa estendere al di là di quei limiti.

Cominciai dunque col calcolare il valore delle costanti a e b col mezzo dei dati sperimentali desunti dal precedente prospetto. Mi valsi delle esperienze (7) e (10); per la prima delle quali si ha

$$y=116,7, \quad T=196,6+273=469,6 \quad T-\Theta=172,8,$$

per la seconda

$$y=204,0, \quad T=256,6+273=529,6 \quad T-\Theta=232,8.$$

Ottenni i valori

$$\log a=4,5252152-10\,, \qquad a=0,00000335131,$$
$$\log b=8,8040253=10\,, \qquad b=0,0636833.$$

Per verificare se la formola colle due costanti a e b in tal modo calcolate rappresenti bene l'andamento del fenomeno per tutte le differenze di temperatura comprese fra 0° e 272° C, vennero col sussidio di essa formola calcolati i valori di y per differenze di temperatura distanti 50 gradi una dall'altra, e messi a confronto coi corrispondenti valori desunti dalla curva. Il prospetto seguente fa vedere come le differenze fra i valori calcolati, e i valori desunti dalla curva siano assai piccoli.

PROSPETTO II.

Differenze di temperatura T—Θ	Temperature osservate Term.° Cent.° t	Temperature assolute T	Ordinate y lette sulla curva	Ordinate y calcolate	Differenze
0	23,8	296,8	0	—	—
50	73,8	346,8	17,2	16,97	+0,23
100	123,8	396,8	46,4	46,40	0,00
150	173,8	446,8	90,1	90,80	—0,70
200	223,8	496,8	151,7	152,69	—0,99
250	273,8	546,8	234,7	234,58	+0,12
272,8	296,6	569,6	279,6	279,25	+0,35

Ho voluto tuttavia indagare se per avventura la formola di Dulong e Petit si prestasse altrettanto bene a rappresentare l'effetto termico del raggiamento entro i limiti delle fatte esperienze. A tal uopo furono desunti dalla curva i due valori

$T - \Theta = 130°$ a cui corrisponde $y = 69, 9$

$T - \Theta = 260°$ » $y = 253,5$

e introdottili nella formola

$$y = b \left(a^{T-\Theta} - 1 \right)$$

si ricavano i valori delle due costanti a e b

$b = 42,9728$ $\log b = 1,6331939$

$a = 1,00746$ $\log a = 0,00322612$

Il seguente prospetto fa vedere che le differenze fra i valori delle ordinate desunte dalla curva, e quelli delle ordinate calcolate col mezzo della formola di Dulong e Petit sono notevolmente maggiori delle differenze riscontrate precedentemente.

PROSPETTO III.

Differenze di temperatura T — Θ	Ordinate lette sulla curva	Ordinate calcolate colla formola di Dulong e Petit	Differenze
0°	0	0	—
50°	17,2	19,23	—2,12
100°	46,4	47,35	—0,95
150°	90,1	87,98	+2,12
200°	151,7	146,88	+4,82
250°	234,7	232,27	+2,43

La formolà parabolica da me proposta si presta meglio adunque di quella di Dulong e Petit, e per conseguenza mi valsi di essa per le esperienze ulteriori.

§. IV.

Calcolo delle costanti della formola perchè essa si presti alle indagini fatte colla pila n. 1.

Siccome lo scopo principale delle mie indagini era quello di desumere dai resultati delle esperienze e dall' applicazione della formola la temperatura del Sole, e siccome nelle esperienze del raggiamento solare, e di quello dei corpi assai caldi io mi serviva della pila termo-elettrica n. 1, così era necessario di modificare le

costanti a e b della formola stabilita per la pila n. 2, in guisa che la formola stessa colle nuove costanti potesse applicarsi alle esperienze fatte colla pila n. 1. A tal uopo feci delle apposite esperienze accogliendo il raggiamento sulla faccia delle due pile collocate successivamente alla medesima distanza dal cubo di Leslie, la cui temperatura si mantenne costantemente a 312° C, ed ottenni per la pila n. 1 la deviazione 28,0 e per la pila n. 2 la deviazione 78,0 in guisa che si ha il rapporto

$$\frac{\mathrm{N.\,1}}{\mathrm{N.\,2}} = \frac{28}{78} = 0{,}359 \quad \text{ossia} \quad \text{pila N. 1} = 0{,}359 \text{ N. 2.}$$

Basterebbe adunque moltiplicare per questo valore le costanti a e b della formola primitiva per avere le nuove costanti adattate alla pila n. 1. — Ho pensato tuttavia di preparare addirittura la formola in guisa che mi permettesse di confrontare direttamente l'effetto termico prodotto sulla pila n. 1 dal raggiamento del Sole e da quello dei corpi roventi o incandescenti veduti sotto lo stesso angolo visuale sotto il quale quello ci apparisce, cioè 32′ 3″, 6. Avendo collocato la pila termo-elettrica in guisa che la faccia di essa distava 134 mm. dalla superficie irradiante del cubo di Leslie la quale, per causa del diaframma interposto, era limitata ad un circolo del diametro di 32,65 mm., ottenni alla bussola la deviazione di $98^{\mathrm{p}},5$. Si trova facilmente che la pila avrebbe dovuto esser collocata alla distanza di metri 3,499 affinchè la superficie irradiante avesse presentata la stessa grandezza apparente del Sole; e utilizzando la legge dei quadrati inversi delle distanze, si dedusse immediatamente che in tal caso la deviazione alla bussola sarebbe stata uguale a 0,1444 divisioni. Si ha quindi per la pila n. 1 il rapporto

$$\mathrm{N.\,1} = \frac{0{,}1444}{98{,}5} = 0{,}0014665.$$

Basterà ora moltiplicare ambidue le costanti a e b per i due coefficienti di riduzione

0,359 e 0,0014665

per ottenere due nuove costanti m e n e la formola così ridotta è quella di cui mi sono servito per tutte le esperienze eseguite colla pila n. 1, per la quale vale adunque la formola

$$y = m\mathrm{T}^2(\mathrm{T}-\Theta) - n(\mathrm{T}-\Theta),$$
$$\log m = 1{,}2466088 - 10,$$
$$\log n = 5{,}5254189 - 10,$$

colla condizione che la pila s'intenda collocata a una distanza dal corpo raggiante eguale 107,17 volte il diametro di questo, così che il corpo apparisca sotto l'angolo visuale di 31′, 3″, 6 al pari del Sole.

§ V.

Verificazione dell'applicabilità della formola per temperature superiori ai 300 gradi.

Esperienze calorimetriche.

Per verificare se la formola continuava a rappresentare bene l'effetto termico del raggiamento anche quando il corpo raggiante avesse una temperatura superiore ai 300°, scelsi per primo cimento quella lamina di rame affumicata che si riscalda

mediante una fiammella ad alcool e che costituisce una delle sorgenti calorifiche usate già dal Melloni. Secondo l'opinione di questo e di altri fisici quella lamina riscaldata a quel modo assume una temperatura di circa 400°; e secondo alcuni altri di 390°.

Esposta la pila n. 1 al raggiamento di quella lamina, la lettura fatta alla bussola ebbe un tal valore che introdotto nella formola, dedussi da essa in due esperienze due valori differenti, ma compresi appunto fra 390° e 400°. È probabile infatti che la temperatura di quella lamina varii di qualche grado tra un'esperienza e l'altra, e quindi riguardai come favorevole l'esito di quel primo cimento. Tuttavia si rendeva necessaria qualche altra prova più concludente, fatta a temperature piuttosto elevate, ma misurabili. Perciò ebbi ricorso al raggiamento di una sfera di rame rovente, di cui determinai la temperatura col metodo calorimetrico. A tal uopo disposi nella fiamma di un grande beccuccio di Wiessnegg una sfera di rame sospesa ad un sottil filo di platino. Questa sfera aveva il suo centro sulla orizzontale che passava per i centri del foro dello schermo e della pila n. 1. Nel circuito era, come sempre, introdotta la bussola di Wiedemann, e quando da molto tempo la deviazione era costante si poteva ritenere che fosse pure costante la temperatura della sfera di rame. Allora, a un dato segnale, un assistente spostava lateralmente la fiamma e un altro spingeva tosto sotto alla sfera un vaso calorimetrico e lo innalzava in modo che la sfera stessa s'immergesse nell'acqua del calorimetro. Questa operazione si faceva tanto rapidamente, che non si poteva certo temere un raffreddamento sensibile della sfera nel tempo trascorso fra l'istante in cui veniva tolta la fiamma e quello in cui avveniva l'immersione nell'acqua. Poi l'esperienza si conduceva colle solite norme adottate per le misure calorimetriche.

Il calorimetro adoperato consisteva in un vaso di rame a doppie pareti, nel quale pescavano un termometro protetto da una guaina bucherata di ottone e un agitatore pure di ottone. Il vaso era fornito di un manico, che rendeva più facile e più spedita la manovra testè descritta. Il termometro era diviso in quinti di grado, ed era stato confrontato con un termometro campione. L'equivalente in acqua del calorimetro, del termometro e dell'agitatore era già stato determinato con esperienze precedenti. Si versava nel vaso circa mezzo litro d'acqua distillata. Detto Q il peso dell'acqua versata, q l'equivalente in acqua del vaso calorimetrico, del termometro e dell'agitatore, t_1 la temperatura dell'acqua al momento dell'immersione della sfera, t_2 la temperatura finale, t la temperatura della sfera, p il suo peso, e c il calore specifico medio del rame fra t e t_2, si ha

$$(Q+q)(t_2-t_1)=pc(t-t_2)$$

dalla quale si può dedurre t.

La quantità c fu determinata da Bède (Wüllner, *Physik*, III pag. 436, 1872) il quale trovò

$$c=0{,}0910+0{,}000023(t+t_2).$$

Veramente nelle esperienze, dalle quali fu dedotta questa formola, non fu oltrepassata la temperatura di 247°: in mancanza di meglio ho dovuto ammettere che la formola valga anche per valori di t molto più grandi.

Citerò tra le molte, due esperienze fatte di seguito.

Nella prima Q = 498,2, $q = 32,5$, $t_1 = 10,58$, temperatura dell'ambiente 11°,0
$t_2 = 29,18$, $p = 123,33$, ne risultò $c = 0,1092$ e $t = 762°,1$.

Nella seconda esperienza si ebbe
$t_1 = 11,15$, $t_2 = 29,60$, e si ricavò il valore di $t = 756,63$.

Calcolo delle letture fatte alla bussola.

Prima di lasciar cadere nell'acqua del calorimetro la sfera sulla quale si sperimentava, per fare la determinazione calorimetrica della sua temperatura, alla bussola erano già state fatte quattro letture. La prima lettura a circuito aperto serviva per stabilire la posizione dello zero; la seconda si faceva a circuito chiuso, intercettando il fascio dei raggi calorifici mediante uno schermo metallico a pareti doppie. D'ordinario queste letture riescivano poco diverse, segno evidente che la custodia proteggeva assai bene la pila, e che anche essendo aperta la porticina di essa custodia, l'effetto dell'ambiente esterno era assai piccolo. Nella prima delle due esperienze calorimetriche le due letture furono: circuito aperto (zero) = 66,5; circuito chiuso = 68,0. Nella seconda si ebbe: zero 64; circuito chiuso 65,5.

La differenza $1^D,5$ della bussola rappresenta l'effetto dell'ambiente sulla faccia della pila che riceve il raggiamento di esso ambiente (essendo aperta la porticina della custodia), ma potrebbe anche dipendere da qualche minima corrente termo-elettrica generata dai contatti dei reofori. Qualunque sia la causa di quella piccola deviazione di 1,5 divisioni, essa viene eliminata, perchè si procede poscia per differenze, cioè si sottrae dalle successive letture dovute all'effetto termico del raggiamento, la lettura seconda fatta a circuito chiuso essendo intercettato il raggiamento.

La terza lettura serve a misurare l'effetto termico della fiamma sola; la differenza tra la seconda e la quarta lettura dà l'effetto complessivo del raggiamento della sfera rovente, e della parte anteriore della fiamma che la circonda. In tal guisa si può facilmente conoscere l'effetto termico prodotto sulla pila dal raggiamento della sola sfera rovente. Com'è noto, e come io stesso verificai con molte esperienze, le fiamme azzurre del bruciatore di Bunsen sono quasi completamente diatermiche: perciò dalla differenza fra la quarta e la seconda lettura, che dà l'effetto complessivo, basta sottrarre quel numero di divisioni, che rappresentano l'effetto termico della parte anteriore della fiamma, il quale, in causa del debole poter emissivo della fiamma, è d'ordinario piccolo in confronto del numero di divisioni spettanti al raggiamento del corpo rovente.

Nella prima delle due esperienze calorimetriche si ebbe dalla differenza fra la II^a e la IV^a lettura 248,9 divisioni da cui togliendo 13,6 divisioni, dovute a quella parte anteriore della fiamma che riusciva visibile dalla pila, si ottenne $235^D,9$ quale misura dell'effetto termico prodotto sulla faccia della pila n. 1.

Il centro della sfera distava dalla faccia della pila 185 mm., e 66 mm. dal 1° schermo, il cui foro minore aveva il diametro di 15 mm. Il diametro della sfera era di 30 mm. Con semplice calcolo si trova che in tali condizioni ogni punto della pila riceveva il raggiamento non dalla sfera intera, ma da una calotta sferica: e l'effetto termico del raggiamento di quella calotta è equivalente a quello che produrrebbe un disco circolare del diametro di 21,42 mm. situato tangenzialmente alla sfera nella sua parte anteriore, e quindi ad una distanza dalla pila uguale a 170 mm. Perchè la superficie

circolare del diametro di 21,42 mm. apparisca sotto l'angolo visuale di 32',3'',6, la faccia della pila avrebbe dovuto essere situata alla distanza di 2296,5 mm. in luogo di 170. Mettendo a profitto la legge dei quadrati inversi delle distanze si trova che se alla distanza di 170 mm. l'effetto termico era rappresentato da 235,9 divisioni della bussola, alla distanza di 2296,5 mm. esso corrisponde a 1,322 divisioni.

Per confrontare il risultato dell'esperienza calorimetrica, con quello della osservazione alla bussola si possono seguire due vie che conducono allo stesso scopo. Si può in primo luogo introdurre nella formola i valori di T e di T-Θ dati dall' esperienza calorimetrica e ricavare quindi da essa il valore di y. In questo caso si avrebbe

$$T = 273 + 762,1 = 1035,1$$
$$\Theta = 273 + 11^\circ,0 = 284,0$$
$$T - \Theta = 751^\circ,1$$

e dalla formola si ricava $y = 1,3943$.

Oppure si potrebbe in secondo luogo introdurre nella formola stessa il valore $y = 1,322$ desunto dalla osservazione alla bussola e ricavare da essa il valore di T e quindi di t.

Così operando e rammentando che la temperatura dell' ambiente era 11°,0 e perciò $\Theta = 11^\circ,0 + 273 = 284$ si ottiene $t = 1019^\circ,0$ $t = 746,0$. Ora sia che si confrontino fra di loro i due valori di y

1,3943 e 1,322 ovvero i due valori di t 762,1 e 746°,0

si vede che la differenza fra i valori calorimetrici, e i valori desunti dalle osservazioni alla bussola coll'uso della formola non differiscono moltissimo fra loro, ma però quanto basta per far sospettare che la formola non sarebbe applicabile a temperature ancor più elevate.

Fu allora che mi venne in mente che quella non grande differenza potesse dipendere dal potere emissivo della sfera di rame rovente, e pensai che siccome le esperienze che avevano servito di base per il calcolo delle costanti nella formola erano state fatte con una superficie raggiante coperta da nero fumo, forse ogni differenza sarebbe scomparsa, se anche alle temperature elevate la superficie raggiante fosse stata affumicata. Ideai allora un metodo, che credo nuovo, per confrontare l' effetto termico del raggiamento inviato da corpi aventi temperature elevate, e la cui superficie era prima nuda e poscia affumicata, in guisa che facendo il rapporto tra i due valori ottenuti si aveva un numero che rappresentava il potere emissivo del corpo nudo paragonato al poter emissivo del nero fumo; e ritenuto quest' ultimo, come si suole, uguale ad uno, si aveva in tal modo il poter emissivo specifico del corpo sottoposto all'esperienza.

Del metodo usato parlerò nel successivo articolo; ora dirò che da quelle indagini ebbi per il poter emissivo specifico del rame, nelle condizioni in cui esso si trovava, cioè circondato dalla fiamma, il valore 0,943.

Nella esperienza calorimetrica di cui ci siamo occupati la sfera di rame nudo produceva col suo raggiamento un effetto termico sulla pila, che misurato alla bussola era espresso da

$$y = 1,322.$$

Se quella sfera fosse stata coperta da nero fumo, l'effetto sarebbe stato $y_1 = \frac{1,322}{0,943} = 1,402$, e dalla formola si ha che vi corrisponde il valore $t = 763,6$.

I valori 1,394 e 1,402
762°,1 » 763°,6

sono così concordanti che si può esserne assai soddisfatti, e conchiudere, che la formola può applicarsi anche alle temperature elevate qualora la superficie raggiante sia il nero fumo, ovvero quando si tenga conto del poter emissivo specifico della superficie raggiante.

Ho descritto minutamente questa esperienza per dare una giusta idea del modo con cui procedetti in queste ricerche. Tralascio di riferire molte altre esperienze calorimetriche fatte in simil guisa, le quali mi diedero sempre risultamenti del pari soddisfacenti. Passo invece a descrivere il già ricordato metodo.

§ VI.

Metodo per determinare il potere emissivo specifico dei corpi ad alte temperature.

Per determinare il potere emissivo specifico dei corpi a temperature elevate, ideai un metodo quanto semplice, altrettanto preciso. Ognuno conosce la forma che presenta la fiamma del gas illuminante nei bruciatori del Bunsen, quando è libero l'accesso all'aria nell'interno del bruciatore stesso. Ho fatto degli studî sulla temperatura dei varî strati di codesta fiamma (*Sulla temperatura delle fiamme.* Atti del R. Istituto veneto Vol. III, 1877) dai quali risulta che la parte superiore interna di essa compresa fra il vertice del cono interno e il vertice del manto esterno, ha una temperatura che non supera i 1200°. Collocando dunque in quel luogo della fiamma un corpo, questo assumerà una temperatura al certo inferiore a quella della fiamma, che sarà dipendente da varie circostanze, cioè dalla massa, dal calore specifico, dalla maggiore o minore conducibilità per il calore, dal potere emissivo; e se il corpo è sostenuto, come è necessario, da qualche filo o asticciuola, anche la conducibilità di questi eserciterà notevole influenza. Però si può ritenere con certezza, che ove la fiamma si mantenga invariata, il medesimo corpicciuolo collocato nella identica posizione assumerà la stessa temperatura in due o più esperienze successive. Ora se in una di queste esperienze successive il corpo si lascia colla sua superficie nuda, e nella seconda lo si ripone nella fiamma dopo averlo coperto con nero fumo, è evidente che si avrà il modo di paragonare l'effetto termico del raggiamento inviato prima dalla superficie nuda, poscia dalla superficie affumicata, e così si potrà stabilire il valore del potere emissivo del corpo, paragonato a quello del nero fumo. È condizione essenziale però che il nero fumo si mantenga aderente alla superficie del corpo durante l'esperienza. Questa cosa si verifica appunto qualora il corpo sia collocato nella posizione suindicata della fiamma: se esso fosse presso il vertice del cono interno della fiamma, il nero fumo si dileguerebbe ben presto combinandosi coll'ossigeno dell'aria penetrata nell'interno del bruciatore.

Diedi la forma di dischi circolari del diametro di 10 mm. ai corpi che sottoposi all'esperienza; dal centro di quei dischi partiva in direzione perpendicolare un filo o asticciuola possibilmente della stessa sostanza, che presentava l'aspetto di un manico il quale era sostenuto da un cannello di porcellana posto orizzontalmente (fig. 2). In tal guisa il disco veniva a trovarsi in posizione verticale entro quella parte della fiamma che non faceva dileguare il nero fumo: in breve tempo diventava rovente o incandescente, e irradiava, come un piccolo sole, i raggi che passando a traverso i fori dei diaframmi pervenivano sulla faccia della pila opportunamente collocata. Si faceva da prima un'esperienza col disco nudo; indi una seconda col disco coperto da nero fumo; poscia si ripetevano entrambe per assicurarsi che fossero concordanti.

Ecco i risultamenti ottenuti per alcuni corpi.

Rame

				Rapporto
6 dicembre	Disco nudo	105,9	divisioni	0,950
	» affumicato	113,5	»	
1 »	Disco nudo	106,3	»	0,929
	» affumicato	114,8	»	
» »	Disco nudo	114,4	»	0,939
	» affumicato	121,8	»	
12 settembre	Disco nudo	58,5	»	0,945
	» affumicato	62,0	»	
1 »	. . . .			0,956
Medio poter emissivo del rame nudo collocato nell' interno della fiamma	. . . .			0.943

Ferro

11 settembre	Ferro nudo	77,75	divisioni	0,888
	» affumicato	87,5	»	
12 »	Ferro nudo	63,5	»	0,873
	» affumicato	72,75	»	
26 »	Ferro nudo	116,0	»	0,886
	» affumicato	131,0	»	
Medio poter emissivo del ferro	. . . .			0,882

Platino

11 settembre	Platino nudo	35,5	divisioni	0,364
	» affumicato	97,5	»	
3 »	Platino nudo	18,75	»	0,338
	» affumicato	55,5	»	
26 »	Platino nudo	36,0	»	0,360
	» affumicato	100,0	»	
» »	Platino nudo	81,0	»	0,337
	» affumicato	240,0	»	
Medio poter emissivo del platino	. . . .			0,350

Cilindri di ossicloruro di magnesio del Carlevaris.

Siccome mi proponeva di fare delle esperienze sul raggiamento dei cilindretti di ossicloruro di magnesio del Carlevaris resi incandescenti dalla fiamma ossidrogenica, così volli determinare anche il poter emissivo di quella sostanza. I cilindretti hanno il diametro di circa 6 mm.: io collocavo quello su cui voleva sperimentare in posizione orizzontale in guisa che l'estremità penetrava in una ordinaria fiamma del bruciatore Bunsen, e occupava la stessa posizione che nelle esperienze precedenti avevano i dischetti di rame, di ferro, di platino.

Ottenni così facendo:

12 settembre	Cil.° d'ossicloruro	di magnesio	nudo	15,5	div.	0,596
» »	» »	»	affum.	26,0	»	
3 »	» »	»	nudo	14,8	»	0,580
» »	» »	»	affum.	25,5	»	
26 »	» »	»	nudo	23,9	»	0,572
» »	» »	»	affum.	41,6	»	

Medio poter emissivo dell'ossicloruro di magnesio. 0,58

Dunque alle temperature elevate il poter emissivo del rame, del ferro, del platino, dell'ossicloruro di magnesio è rappresentato dai numeri 0,943; 0,882; 0,35; 0,58.

§ VII.

Verificazione dell'applicabilità della formola pel caso di temperature superiori a 800°.

Se si chiama E il poter emissivo specifico dei corpi raggianti, la nostra formola allora diventa

$$y = m.\mathrm{E}\mathrm{T}^2(\mathrm{T}-\Theta) - n(\mathrm{T}-\Theta),$$

e, se le esperienze sono fatte col nero fumo, $\mathrm{E}=1$.

Per verificare se quella formola è applicabile anche quando le temperature sono superiori a quelle delle esperienze calorimetriche, io mi giovai di quelle stesse esperienze che hanno servito per la determinazione del valore di E. Comincierò col riferire le esperienze fatte con dischi di rame.

Sottoposi successivamente all'esperienza tre dischetti di rame del diametro di 10 mm.: il primo aveva la grossezza di 1 mm, il secondo di 2, il terzo di 3 mm. È certo che ognuno di quei dischi collocato nel medesimo luogo della fiamma assume una temperatura diversa; il più sottile una temperatura più elevata degli altri; anzi se il disco di rame fosse più sottile per es. di $^1/_4$ di mm. esso raggiungerebbe la temperatura di fusione del rame, che, com'è noto, si ritiene di 1050° all'incirca, e comincerebbe in fatto a fondersi. Perciò dobbiamo presumere che il disco sottile (1 mm. di grossezza) assuma nella fiamma una temperatura di circa 1000°, e gli altri due dischi una temperatura più bassa. Vediamo i risultati delle esperienze.

3 sett. Rame affumicato, disco (1^{mm}), diam. = 10 mm, distanza dalla pila 438 mm., temp. dell'ambiente 28°C, $\Theta = 273 + 28 = 301$, deviazione 15,9 divisioni.

Fatto il solito calcolo per avere la deviazione che si sarebbe ottenuta qualora la pila fosse stata collocata alla distanza di 1071,7 mm., si ottiene $y = 2,6554$ divisioni.

Introdotto questo valore nella formola, dove in questo caso $E = 1$ si ricava da essa

$$T = 1260, \text{ e quindi } t = 987^\circ.$$

Con altra esperienza fatta collo stesso disco ebbi:

26 sett. Rame affumicato, disco sottile (1^{mm}), distanza dalla pila 163 mm., temp. dell'ambiente 18°C, $\Theta = 291$, deviazione 108,0 divisioni,

$$y = 2,498 \text{ divisioni},$$

a cui corrispondono $T = 1233^\circ,5$ $t = 960^\circ,5$.

Col disco di rame *della grossezza di* 2 *mm.* feci pure due esperienze:

1 dic. Rame affumicato, disco mezzano (2^{mm}), distanza dalla pila 150 mm., temp. dell'ambiente $t = 11^\circ$, $\Theta = 284$, deviazione 121,8 divisioni,

$$y = 2,386, \quad \text{dalla formola si ricava}$$

$$T = 1211, \qquad t = 938,0.$$

6 dic. Disco rame affumicato (2^{mm}), distanza dalla pila 157 mm.

$$\Theta = 284, \text{ deviazione } 113,5,$$

$$y = 2,432,$$

$$T = 1218^\circ, \qquad t = 945^\circ.$$

1 dic. Rame affumicato, disco grosso (3^{mm}), distanza dalla pila 150 mm,,

deviazione 114.3 divisioni

temperatura $11^\circ,0$, $\Theta = 284^\circ,0$,

$$y = 2,239,$$

$$T = 1190,7, \qquad t = 917^\circ,7.$$

6 dic. Rame affumicato, disco grosso (3^{mm}), distanza dalla pila 157mm.

$$y = 2,272,$$

$$T = 1196,3, \qquad t = 923^\circ,3.$$

Le temperature di 987° e 960° trovate pel disco sottile di rame, quelle di 938° e 945° pel disco mezzano, e le temperature 917,7 e 923,3 trovate pel disco grosso hanno tutta la probabilità di essere le esatte temperature possedute da quei corpi.

Ferro

Il disco di ferro era sottile assai, pure del diametro di 10 mm. Riferirò una sola esperienza.

26 sett. Disco di ferro affumicato, distanza dalla pila 163 mm.

deviazione 131 divisioni

$$y = 3,030,$$

$$\Theta = 291, \qquad T = 1308^\circ,0, \qquad t = 1035^\circ.$$

Platino

Il disco di platino era sottilissimo; esso pure del diametro di 10 mm. Si ebbe:

$$y = 3,847,$$

$$T = 1410, \qquad t = 1147^\circ.$$

Cilindro di ossicloruro di magnesio nella fiamma del bruciatore di Bunsen.

26 sett. Cilindro di ossicloruro di magnesio affumicato. Diam.° mm.6,1,
distanza 163 mm. deviazione 41,6 divisioni

$y = 4{,}091,$

$\Theta = 291°, \quad T = 1432{,}5, \quad t = 1159°{,}5.$

Dunque collocati nella fiamma del bruciatore di Bunsen i dischi di rame hanno assunto una temperatura diversa a norma della minore o maggiore grossezza: il disco sottile raggiunse la temperatura di 987°, il mezzano di 945°, il grosso di 923°. Il disco sottile di ferro 1035°, il disco di platino 1147°, e il cilindro d'ossicloruro di magnesio 1160°.

Si comprende come quest'ultimo abbia assunto una temperatura più elevata di quella degli altri corpi, che essendo metallici hanno una grande conducibilità pel calore, e quindi mediante l'asticciuola, pure metallica, che li sosteneva, perdevano di continuo una certa quantità di calore che comunicavano al cannello di porcellana. Invece l'ossicloruro di magnesio è una sostanza assai poco conduttrice e quindi comunicava poco calore alle branche della morsetta che lo sosteneva.

Esperienze fatte con un cilindretto di ossicloruro di magnesio (del Carlevaris) *reso incandescente dalla fiamma di una miscela di gas illuminante e di ossigeno.*

I cilindretti di ossicloruro di magnesio, che il prof. Carlevaris con molto vantaggio sostituì ai cilindri di calce per ottenere la luce di Drummond, non si trovano d'ordinario in commercio; io potei averne per cortesia dal collega prof. Fr. Filippuzzi. Il cilindretto da me usato in queste esperienze ha la grossezza di 6,1 mm. e la sezione circolare. Nelle prime sperienze sia che i due gas non uscissero con sufficiente pressione, o che io avessi tenuto il cilindretto non abbastanza vicino al forellino d'uscita dei due gas, la fiamma avuta era calda tanto da fondere il platino, ma la luce prodotta dall' incandescenza dell'ossicloruro di magnesio era bensì vivace però non splendidissima. — Nelle esperienze posteriori riuscii ad ottenere una luce abbagliante, ed anche l'effetto termico del raggiamento riuscì molto maggiore di prima. La fiamma era ridotta minima, ma aveva un calore talmente intenso che faceva fondere il platino come fosse cera. S'intende che anche in queste, come in tutte le esperienze, si procedeva per via di differenza delle letture fatte alla bussola, sottraendo dalla prima lettura fatta allorchè il raggiamento era dovuto al cilindretto incandescente e alla fiammella che batteva contro di esso, la seconda lettura che rappresentava il raggiamento della fiammella (dopo rimosso il cilindretto) e dei corpi circostanti: sarà bene di avvertire eziandio che un doppio schermo munito di un foro alquanto più grande della base del cilindretto, era interposto tra questo e la pila, e riduceva al minimo valore l'influenza del raggiamento dovuto ai corpi circostanti.

Ora riferirò i risultamenti delle fatte esperienze:

I.ª Serie.

Cilindretto d'ossicloruro di magnesio nudo del diam.° di mm. 6,1, temp. dell'ambiente 24°,4 C, distanza dalla pila mm. 588,0.

I.ª *Esperienza*. Deviazione osservata 11,2 divisioni.

Col solito calcolo si trova che se la distanza della pila fosse stata millimetri $6,1 \times 107,17$ (affinchè la superficie raggiante apparisse sotto l'angolo di 32′, 3″,6) la lettura sarebbe stata $y = 9,05$ div. Rammentando ora che il potere emissivo dell'ossicloruro di magnesio è $= 0,584$ si deduce immediatamente che se il cilindretto fosse stato coperto di nero fumo, ossia se il poter emissivo di esso fosse stato eguale all'unità, il raggiamento avrebbe prodotto un effetto termico eguale a

$$\frac{9,051}{0,584} = 15,499 \text{ divisioni.}$$

Introducendo questo valore di $y = 15,499$ nella formola, e rammentando che, per essere $t_1 = 24,4$, è $\Theta = 297,4$ si ricava da essa

$$T = 2169^\circ \text{ e perciò } t = 1896^\circ.$$

II.ª *Esperienza*. Si ripete l'esperienza nelle identiche condizioni. — Deviazione letta alla bussola 12,3 div., deviazione calcolata per la distanza $6,1 \times 107,17$

$$y_1 = 9,9404;$$

deviazione dedotta pel potere emissivo eguale ad uno

$$y = \frac{y_1}{E} = \frac{y_1}{0,584} = 17,06;$$

dalla formola si ricava $T = 2236$, $t = 1963^\circ$.

III.ª *Esperienza*. Lettura 12,2 div.

Si ricava $y_1 = 9,859$, $y = 16,84$,

$T = 2227,5$, $t = 1954^\circ,5$.

II.ª Serie.

I.ª *Esperienza*. La luce era brillantissima.

Distanza dalla pila 420 mm., temperatura dell'ambiente 24°,0 C.

Deviazione letta 31,6 divisioni.

» calcolata per la solita distanza $y_1 = 13,00$

Tenendo conto del poter emissivo 0,584

$y = 22,25$ pel poter emissivo unitario;

dalla formola si ottiene $T = 2440^\circ$, $t = 2167^\circ$.

II.ª *Esperienza*. La massima deviazione fu ottenuta in questa IIª esperienza, nella quale il cilindretto d'ossicloruro di magnesio splendeva come un piccolo sole.

Distanza dalla pila mm. 420.

Deviazione letta in tre prove successive:

42,5 divisioni
41,0 »
42,0 »
valore medio $42^D,0$.

Alla distanza $107,17 \times 6,1$ mm. si avrebbe avuto $y_1 = 17,68$ e se il potere emissivo fosse stato eguale all'unità

$$y = \frac{17,68}{0,584} = 29,58;$$

dalla formola si ricava

$T = 2670$, $t = 2397^\circ$.

I numeri trovati di 2167° o 2397°, sebbene superiori a quelli trovati nelle esperienze della Iª serie, non sembreranno certo esagerati ove si consideri, come già dissi, che m'era riuscito di ridurre la fiammella a un dardo piccolissimo ma talmente caldo che il platino si fondeva immediatamente, e che la luce emanata dal cilindretto reso incandescente da quel dardo era splendidissima, quale non m'era riuscito di ottenere altre volte e specialmente nell'occasione in cui feci la Iª serie delle esperienze succitate.

I risultamenti ottenuti credo verranno giudicati come assai soddisfacenti da tutti coloro che si sono occupati di simili indagini; e parmi si possa da essi conchiudere che la formola

$$y = m \, E \, T^2 \, (T - \Theta) - n \, (T - \Theta)$$

che sostenne così bene i cimenti a cui fu sottoposta fino a 2000 gradi, possa essere con fiducia applicata anche al caso di temperature più elevate, e quindi possa essa servire a dare la temperatura del Sole.

Vedremo quali valori essa offra per T quando in luogo di y si sostituiscano le deviazioni ottenute esponendo la pila al raggiamento solare.

Ma prima è necessario ch'io dica il modo da me seguito nel fare le osservazioni sul raggiamento termico del Sole. È ciò che passo ad esporre nel seguente paragrafo.

§ VIII.

Raggiamento termico del Sole.

Le osservazioni sul raggiamento termico del Sole vennero fatte colla pila n. 1 (Duboscq) collocata sul terrazzo attiguo alla soffitta ov'era collocata la bussola. Con somma facilità la pila poteva al momento dell'osservazione esser inclinata in guisa, che la faccia di essa esposta al Sole, riceveva i raggi in direzione normale. Queste osservazioni furono principiate nel luglio, ma, per causa di varie circostanze ed impedimenti, non poterono esser condotte con tutta regolarità se non a cominciare dalla fine di agosto.

Ad ogni osservazione si facevano quattro letture alla bussola: la prima a circuito aperto per stabilire il punto di partenza della scala, che corrispondeva alla posizione di riposo dell'ago della bussola: la seconda a circuito chiuso, lasciando chiusa la custodia della pila: la terza aprendo la porticina della custodia in guisa che la faccia della pila riceveva il raggiamento solare: la quarta lasciando aperta la porticina, ma intercettando i raggi solari mediante un piccolo schermo circolare a doppie pareti e collocato alla distanza di circa un metro dalla pila, così che l'ombra di esso si projettava sulla porticina aperta e perciò anche sulla faccia della pila. Per conseguenza in quest'ultima osservazione, la faccia della pila accoglieva il raggiamento della parte di cielo che circonda il Sole, e che necessariamente esercitava la sua influenza anche nella terza osservazione; laonde facendo la differenza fra la terza e la quarta lettura si otteneva, espresso in divisioni della scala, l'effetto termico del raggiamento solare. — A questo proposito debbo notare che la quarta lettura riesciva quasi sempre negativa, indicando, com'è naturale, l'effetto di un raffreddamento della faccia della pila, che irradiava del proprio calore verso lo spazio del cielo meno caldo di essa.

La corrente elettrica generata dal raggiamento solare è così intensa, che, facendo uso della solita pila n. 1 e chiudendo il circuito mediante i soliti reofori e la bussola, le deviazioni dell'ago magnetico escono dai limiti della scala. Perciò ho dovuto introdurre nel circuito una resistenza atta a scemare la intensità della corrente termoelettrica quanto bastava per mantenere le deviazioni entro i limiti della scala. Mi valsi a tal uopo del reostato di Siemens, e dopo molte prove trovai come più opportuna la resistenza di 16 unità Siemens. Tutte le osservazioni solari s' intendono dunque fatte coll'aggiunta di una resistenza pari a 16 unità del Siemens oltre la resistenza offerta dalla pila, dai reofori, e dal filo della bussola.

Allo scopo di determinare la grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi solari prima di giungere sulla pila termo-elettrica, nelle prime esperienze si notava l'ora precisa della terza osservazione, dalla quale, coi dati desunti dalle effemeridi, si poteva calcolare il valore della distanza zenitale. Più tardi si ebbe ricorso alle determinazioni dirette mediante un teodolite. Quando uno degli sperimentatori aveva compiute le due prime letture alla bussola, l' altro che stava sul terrazzo apriva la porticina della custodia della pila e poscia faceva col teodolite l' osservazione dell'altezza del Sole sull'orizzonte, mentre contemporaneamente il primo faceva la terza lettura alla bussola. Ogni volta si faceva anche l' osservazione dello stato igrometrico dell'aria atmosferica, e per avere indicazioni pronte si ebbe ricorso a un igrometro a capello, la cui graduazione venne effettuata mediante confronto con un igrometro a condensazione o con un psicrometro. Trascrivo lo specchio che dà l'umidità relativa corrispondente ai gradi segnati sulla scala dell'igrometro a capello usato in queste osservazioni, avvertendo che l'indice si spingeva al di là di 100 quando l'umidità dell'aria era rilevante.

Prospetto IV.

Igrometro	umidità relativa
60°	0,361
65°	0,405
70°	0,450
75°	0,500
80°	0,550
85°	0,596
90°	0,646

Si fecero anche le osservazioni barometriche; ma vedremo in seguito che tanto queste indicazioni, quanto quelle dell' igrometro non possono esser utilizzate se non nel caso in cui si facciano osservazioni simultanee a differente altezza.

Prima di dare alcuni prospetti riassuntivi di alcune giornate di osservazione, sarà utile qualche indicazione sul modo usato nel calcolare il valore di E che rappresenta la grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi del Sole.

Se la distanza zenitale Z del Sole all'ora dell'osservazione non supera i 60 gradi, si ha il valore di E con sufficiente esattezza dalla formola $E = \sec Z$. Ma quando il Sole è più basso, riesce indispensabile di calcolare E mediante una formola che

conduca a valori esatti. All'osservatorio meteorologico di Montsouris si fa uso della formola già adoperata dal Pouillet nelle sue ben note osservazioni attinometriche, ma quella formola, quando la distanza zenitale è grande, dà per E dei valori troppo piccoli. La formola di Bouguer e quella di Laplace calcolata da Forbes danno invece dei valori concordanti ed esatti (¹).

Io ho dato la preferenza ai valori di E dedotti da quelle formole, e sono quelli che trovansi registrati nei seguenti prospetti riassuntivi delle fatte osservazioni.

Per avere quei valori con prontezza ho costruito una curva, le cui ascisse rappresentavano la distanza zenitale del Sole, e le ordinate il corrispondente valore di E. A tracciare la curva mi valsi dei valori contenuti nel seguente specchio che furono calcolati da Forbes colla formola di Laplace.

PROSPETTO V.

Distanza zenitale z	grossezza dell'atmosfª E	Distanza zenitale z	grossezza dell'atmosfª E
0 gradi	1,000	75 gradi	3,809
10 »	1,016	80 »	5,57
20 »	1.065	85 »	10,22
30 »	1.156	86 »	12.2
40 »	1,306	87 »	14,9
50 »	1.555	88 »	18,9
60 »	1,995	89 »	25,1
70 »	2,902	90 »	35,5

Fra le moltissime osservazioni fatte dall'agosto al dicembre trascriverò per esteso quelle effettuate nei due giorni 28 e 29 settembre, che nel registro di osservazione ho segnato col nome di *giornate auree,* perchè in esse il cielo si mantenne costantemente sereno, l'aria tranquilla e assai trasparente.

PROSPETTO VI.

Osservazioni sul raggiamento termico del Sole, 28 settembre 1877.

Ora	Distanza Z	Deviazioni alla bussola y	Igrometro
$8^h,30'$	64°,54'	D 188,0	89
$9^h,0$	60°,42'	» 191,0	89
$10^h.0$	58°.27'	» 202,0	86
$11^h,35'$	47°.36'	» 209.2	82
$12^h,0$	47°.34'	» 210,0	80
1^h	50°,12'	» 207,0	74
$2^h,15'$	57°,23'	» 191,0	71
$3^h,0$	63°,23'	» 184,5	68
$4^h,0$	72°,43'	» 164,0	69
$4^h,35'$	78°,36'	» 131,0	76

(¹) M. R. Radau. Veggasi il *Moniteur scientifique du doct. Quesneville.* Mai 1877. pag. 528.

PROSPETTO VII.

29 settembre H = 768,0 t = 16°,5C

Ora	Distanza zenitale Z	Lettura alla bussola y	Igrometro
h 8,45′	° 63,48′	D 180,5	92,5
9,5′	60,22	» 186,5	92,5
9,35′	56,36	» 192,0	92,0
10,5′	53,21	» 197,0	91,0
10,35′	50,48	» 200,0	90,0
11,5′	49,0	» 201,0	88,5
11,35′	48,0	» 204,5	86,0
12,2′	48,0	» 205,0	82,0
1,40′	53,48	» 190,0	—
2,5′	56,36	» 189,0	74,0
3,5′	64,30	» 174,0	74,0
3,45′	70,36	» 155,0	71,0
4,30′	78,5	» 130,0	74,0
4,50′	81,24	» 109,0	74,0

Sebbene le due giornate 28 e 29 settembre sieno state assai favorevoli per questo genere di osservazioni, tuttavia si scorge che a pari distanza zenitale, cioè a pari grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi, le osservazioni antimeridiane non sono appieno concordi con quelle pomeridiane. Fra le osservazioni del 29 settembre troviamo a mo' d'esempio che l'osservazione delle 9^h,35′ diede una deviazione di 192 divisioni, e quella delle ore 2^h,5′ solamente 189 divisioni, sebbene la distanza zenitale fosse in ambedue i casi di 56°,36′. Così in quelle del 28 settembre si ebbero 191 divisioni quando lo strato atmosferico corrispondeva a 9 ore antimer. a 60°,42′ di distanza zenitale, mentre a ore 2^h,15′ si ebbe l'identica deviazione di 191 divisioni, ma lo strato atmosferico attraversato era minore, perchè corrispondeva alla distanza zenitale di soli 57°,23′.

In generale trovai che le osservazioni antimeridiane danno deviazioni alquanto maggiori di quelle corrispondenti alle osservazioni pomeridiane, sebbene quasi sempre l'igrometro indichi nel pomeriggio un grado minore di umidità che nel mattino. Ma anzi questa coincidenza ci dà la chiave per spiegare il fenomeno.

Nelle ore antimeridiane gli strati più bassi dell'atmosfera, quelli che possono influire sull'igrometro, contengono molto vapor acqueo, mentre gli strati superiori dell'atmosfera ne contengono in minor copia. Di mano in mano che il Sole si eleva, anche questo vapore inferiore si eleva e si distribuisce nelle regioni più alte dell'atmosfera. Nel mattino gli strati superiori dell'atmosfera sono meno pregni di vapor acqueo e quindi assorbono meno calore; nel pomeriggio invece l'assorbimento diventa maggiore per l'azione preponderante del vapor acqueo diffuso negli strati superiori dell'atmosfera, sebbene gli strati inferiori sieno intanto divenuti più secchi.

Coi dati contenuti nei due precedenti prospetti si possono costruire delle curve prendendo per ascisse i valori di E (grossezza dello strato atmosferico attraversato dai raggi solari) corrispondenti alle distanze zenitali registrate nella seconda colonna, e per ordinate i valori delle deviazioni lette alla bussola. Si otterrebbero per ogni

giornata due curve che non si sovrappongono. Io ho preferito di costruire per ogni giornata una sola curva, quella cioè che si riferisce alle osservazioni pomeridiane, perchè in generale i punti offerti da quelle osservazioni si allineano bene, e riesce facile e sicuro il tracciato della curva. Credo inutile di allegare a questa Memoria le molte curve tracciate; invece mi limiterò a dare riuniti in prospetti i valori delle coordinate desunti da alcune di esse curve.

PROSPETTO VIII.

Giorno dell'osservazione	E	y	Giorno dell'osservazione	E	y
28 settem.	1,30	217 [1]	10 ottobre	2,00	191,5
»	1,40	213 [1]	»	2,30	182,5
»	1,50	210	»	2,80	170,9
»	1,60	205,3	19 ottobre	1,80	197,4
»	1,80	198,0	»	2,00	190,5
»	2,00	191,2	»	2,50	174,9
»	2,20	185,0	»	3,00	161,8
»	2,60	172,3	»	3,50	149,3
»	3,00	162,0	»	4,00	137,5
»	3,20	158,0	»	4,50	125,5
»	3,60	152,0	»	5,00	114,0
»	4,00	145,0	»	5,50	104,2
»	4,97	131,0	»	6,00	98,8
29 settem.	1,40	206,8 [2]	»	6,50	90,0
»	1,50	202,9	»	7,00	83,0
»	2,00	184,8	21 ottobre	1,80	200,9
»	2,50	169,0	»	2,40	179,8
»	2,60	166,1	»	3,00	166,6
»	3,00	160,2	»	3,60	156,1
»	3,20	153,0	»	4,20	146,1
»	3,50	145,5	»	4,80	137,2
»	4,00	138,0	»	5,40	128,3
»	4,50	132,7	1 novem.	1,80	197,3
»	4,84	130,0	»	2,00	187,5
»	5,00	128,1	»	2,50	170,2
»	5,50	123,0	»	3,00	156,0
»	6,69	109,0	»	3,50	145,0
2 ottobre	1,60	198,7	»	4,00	136,7
»	2,00	178,5	»	4,50	130,0
»	2,50	164,9	»	5,00	123,6
»	3,00	155,0	»	5,50	118,0
»	3,30	150,0	»	6,00	112,0
»	3,60	147,3	17 dicem.	2,7	180,0
3 ottobre	1,60	181,5	»	3,3	165,5
»	2,00	164,8	»	3,9	154,0
»	2,50	149,2	22 dicem.	2,7	162,3
»	3,00	135,8	(Igr.° 100)	3,3	148,0
»	3,50	125,0	»	3,9	137,6
»	4,00	117,0	»	4,5	128,8
10 ottobre	1,60	206,0	»	5,1	120,3
»	1,80	198,0	»	5,7	112,5

[1] Questi due punti sono desunti dalla curva delle esperienze prolungata alquanto al di là del primo punto di osservazione che è il terzo registrato nel Prospetto $E = 1,5$ $y = 210$.

[2] Questo punto fu desunto dalla curva prolungata al di là del primo punto di osservazione che è il secondo registrato $E = 1,5$, $y = 202,9$.

§ IX.

Valutazione dell'assorbimento termico esercitato dall'atmosfera.

Le deviazioni y osservate alla bussola sono prodotte dal fascio di raggi solari incidenti sulla faccia della pila termo-elettrica dopo aver attraversato uno strato più o meno grosso d'aria a seconda della minore o maggiore altezza del Sole sull'orizzonte. In siffatto tragitto l'effetto termico dei raggi solari riesce notevolmente affievolito per l'assorbimento esercitato dall'aria e specialmente dal vapor acqueo in essa diffuso; e volendo confrontare l'effetto del raggiamento termico del Sole con quello di corpi caldi situati a piccola distanza dalla pila (il cui raggiamento attraversando un brevissimo strato d'aria non soffre per conseguenza un indebolimento sensibile in paragone all'altro) è necessario di conoscere quanto grande sia la diminuzione dovuta a questo assorbimento, per poter calcolare l'effetto totale del raggiamento solare incidente sulla faccia della pila.

Sarebbe adunque necessario di conoscere la legge di assorbimento dei raggi solari nello attraversare l'atmosfera terrestre.

Si ammette da molti che questa legge sia espressa dalla formola

$$q = ab^E$$

dove q è la quantità di calore ricevuta nell'unità di tempo sull' unità di superficie, perpendicolarmente alla direzione dei raggi, in un punto della superficie terrestre, a e b sono costanti, ed E è un numero che rappresenta la grossezza dell'atmosfera attraversata dai raggi, prendendo per unità l'altezza dell'atmosfera stessa. Il numero a esprime la quantità di calore che nell'unità di tempo sarebbe ricevuta sull'unità di superficie normale alla direzione dei raggi al limite superiore dell'atmosfera; ed è la quantità che importa di determinare: b è il rapporto in cui viene diminuita questa quantità quando i raggi hanno attraversato normalmente l'atmosfera terrestre, e si suol chiamare coefficiente d'assorbimento.

Il sig. Violle ha procurato di tener conto dello stato igrometrico dell'aria, e fece delle osservazioni contemporanee a differenti altezze sul Monte Bianco. Trovò che il fenomeno era assai bene rappresentato dalla formola

$$y = a.p^{\frac{H + (Z - z)kf}{760}E}.$$

nella quale a, p, k sono costanti;

Z = altezza dello strato atmosferico a partire dal quale non v'è più vapore sensibile:
z = altezza del luogo d'osservazione;
f = tensione media del vapore acqueo contenuto negli strati d'aria compresi fra Z e z;
E = grossezza dello strato atmosferico attraversato [1].

Questo è certamente il metodo migliore per esprimere e valutare la legge dell'assorbimento atmosferico: ma esso esige che si facciano delle osservazioni simultanee a differenti altezze, e non è applicabile al caso di osservazioni fatte in una determinata stazione.

[1] Annales de Chimie et de Physique. *Mémoire sur la température du soleil* par J. Violle. Paris 1877, Vol. X, pag. 319.

Perciò dovetti appigliarmi ad altri metodi.

Tentai dapprima di applicare la formola $y = ab^E$ alle curve da me ottenute in molte giornate di osservazione, ma ho dovuto convincermi che questa semplicissima formola non basta a rappresentare il fenomeno per tutta intera una giornata. Tentai di applicare allora varie altre formole empiriche e specialmente le due forme esponenziali più complesse

$$q = ab^{\frac{E}{\gamma + E}},$$
$$q = \alpha + m\beta^E + n\gamma^E,$$

dove a, b, m, n, α, β, γ sono tutte costanti empiriche. Ma nessuna delle formole adoperate è atta a rappresentare con bastante precisione l'andamento di tutto il fenomeno.

Mi limiterò a riferire i risultamenti ottenuti colla formola $y = ab^{\frac{E}{\gamma + E}}$. Assumendo le tre coppie di valori

$$\left.\begin{array}{ll} E = 1,5 & y = 203,8 \\ E = 2,25 & y = 174,0 \\ E = 3,00 & y = 152,0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{risultò } \gamma = 7,06180 \\ \log b = 8,966537 - 10 \\ a = 309,27 \end{array}$$

E	y osservata	y calcolata	Differenza
1,5	203,8	—	—
1,75	192,6	192,76	0,16
2,00	182,8	182,88	0,08
2,25	174,0	—	—
2,50	166,0	165,98	— 0,02
2,75	158,9	158,71	— 0,17
3,00	152,1	—	—
4,5	132,7	134,42	+ 1,72

In questo caso la formola si presta abbastanza bene.

Applicata la stessa formola alla curva del 28 settembre, intervallo E = 1,4 E = 2,6 diede il valore

$$a = 292,25.$$

Applicata a quella del 1 novembre, intervallo E = 2,0 E = 3,2 diede

$$a = 333,34$$

10 ottobre $a = 339,95$.

Da altre curve si ebbero risultati tanto più piccoli quanto maggiore era l'intervallo assunto per calcolare le costanti della formola.

21 ottobre, intervallo E = 1,8 ed E = 10

$$a = 260,9$$

» » E = 1,8, E = 6

$$a = 272,2.$$

Ma tra i valori calcolati e i valori osservati si riscontrano delle differenze troppo grandi come ne dà prova il seguente specchio

E	y osservata	y calcolata	Differenza
1,8	200,9	—	—
2,4	179,8	183,97	+ 4,17
3,0	166,6	169,41	+ 2,81
3,6	156,1	156,79	+ 0,61
3,9	151,1	—	—
4,2	146,1	145,7	— 0,32
4,8	137,2	136,1	— 1,1
5,4	128,3	127,58	— 0,72
6,0	120,0	—	—

Le differenze troppo grandi in più che presentano i valori calcolati in prossimità di $E = 1,8$ provano che il valore di a calcolato, che corrisponde ad $E = 0$, deve riuscire notevolmente minore del vero.

Ho dovuto quindi rinunziare alla speranza di servirmi d'una sola formola empirica e adattarmi a dividere ogni curva in varie porzioni, ed applicare ad ognuna di queste porzioni un'equazione della forma

$$y = ab^E,$$

determinando nei singoli casi i valori delle costanti a e b. Naturalmente si ottiene così, per ogni giornata di osservazione, una serie di valori differenti di a ed un'altra serie di valori di b. Credo opportuno di qui compendiare in un prospetto i risultati ottenuti applicando questo metodo di calcolo ad alcune giornate di osservazione.

PROSPETTO IX.

Giorno dell' osservazione	per E compreso fra	Valori ottenuti dalla formola		Valore medio di E
		a	b	
28 settembre	1,4 e 2,0	273,68	0,83533	1,7
	2,0 » 2,6	270,49	0,84080	2,3
	2,6 » 3,2	250,79	0,86557	2,9
	3,2 » 5,0	221,71	0,89954	4,1
29 settembre	1,4 » 2,0	272,3	0,82173	1,7
	2,0 » 2,6	263,75	0,8371	2,3
	2,6 » 3,2	237,17	0,8721	2,9
	3,2 » 4,4	210,24	0,9054	3,8
	4,4 » 7,0	196,33	0,909	5,7
3 ottobre	1,5 » 2,1	271,96	0,77931	1,8
	2,1 » 2,7	240,92	0,8256	2,4
	2,7 » 3,3	234,20	0,8342	3,0
	3,3 » 3,9	206,55	0,8667	3,6
21 ottobre	1,8 » 2,4	280,25	0,8312	2,1
	2,4 » 3,0	243,9	0,8807	2,7
	3,0 » 3,6	230,7	0,8972	3,3
	3,6 » 4,2	232,2	0,8955	3,9
	4,2 » 4,8	226,8	0,900	4,5
	4,8 » 5,4	234,6	0,894	5,1

14 ottobre . .	1,7 » 2,3	251,20	0,8212	2,0
	2,3 » 2,9	233,08	0,8484	2,6
	2,9 » 3,5	217,49	0,8689	3,2
	3,5 » 7,74	222,25	0,8635	5,6
17 dicembre . .	2,7 » 3,3	262,7	0,869	3,0
	3,3 » 3,9	245,9	0,887	3,6
22 dicembre .	2,7 » 3,3	245,8	0,8575	3,0
	3,3 » 3,9	220,9	0,8856	3,6
	3,9 » 4,5	212,7	0,8943	4,2
	4,5 » 5,1	213,2	0,8938	4,8
	5,1 » 5,7	212,7	0,8943	5,4

Facciamo ora qualche considerazione sui valori ottenuti per b e per a. I valori di b in ogni giornata di osservazione vanno aumentando col crescere della grossezza E dello strato atmosferico, e in differenti giornate per un medesimo valore di E si hanno valori differenti per b. Questi due fatti erano già stati notati da altri osservatori, ma qui riescono evidentissimi. — Come si disse b rappresenta il rapporto fra la quantità di raggi solari che perverrebbero sulla faccia della pila nel luogo dell'osservazione dopo aver attraversato normalmente la grossezza $E = 1$ dell'atmosfera, e la quantità di raggi che essa riceverebbe se l'atmosfera non esistesse, cioè se fosse $E = 0$. È naturale che essendo diverso lo stato igrometrico dell'aria nelle differenti giornate, anche i valori di b ottenuti dalla formola per un medesimo valore di E abbiano a riuscire differenti.

Che il valore di b in tutte le giornate vada crescendo coll'aumentare di E è un fatto conforme alle leggi dell'assorbimento. Infatti l'assorbimento dei raggi che attraversano corpi trasparenti ha luogo in proporzione maggiore nei primi strati, poi negli strati successivi esso diventa minore.

Le osservazioni dei giorni 29 settembre, 24 ottobre, 21 ottobre, 22 dicembre dimostrano che al di là di una certa grossezza di E il coefficiente d'assorbimento b diventa costante.

Consideriamo ora i valori di a. Nessuno di quei valori rappresenta nelle unità assunte per la costruzione della curva la quantità vera di calore che verrebbe ricevuta sull'unità di superficie al limite dell'atmosfera. Si vede però che al diminuire della grossezza E il valore di a cresce, ed è evidente che se si avesse potuto fare delle osservazioni con grossezze di E ancora minori, si avrebbe ottenuto per a dei valori più elevati. Se si costruiscono graficamente i valori di a prendendo per ascisse la media aritmetica fra i due valori di E (media che trovasi registrata nell'ultima colonna del precedente prospetto) che servirono al calcolo di ciascun valore di a, e per ordinate i singoli valori di a, si trova che i varî punti così ottenuti si schierano presso a poco in una linea retta. Questa regolarità nella distribuzione dei valori di a è tanto meno imperfetta quanto più le condizioni atmosferiche della giornata, in cui si fecero le osservazioni, furono buone.

Io quindi, in mancanza di un metodo più rigoroso, mi credetti autorizzato a prendere quale valore vero della quantità di calore che cade sull'unità di superficie,

nell'unità di tempo al limite superiore dell'atmosfera, l'intercetta fra l'origine e il punto di tragitto della retta testè considerata per l'asse delle y. Per ottenere maggiore precisione, anzichè limitarmi a una semplice costruzione grafica, ho determinato col metodo de' minimi quadrati quale fosse l'equazione

$$a = m + n\,E$$

della retta che meno di ogni altra si discosta nei singoli casi dai punti rappresentanti i valori di a in corrispondenza delle varie grossezze medie E, ed ho assunto come valore della quantità cercata il numero m. Questo calcolo fu fatto per varie curve ottenute in condizioni molto differenti, e diede per m dei risultati, che, quando si consideri la moltiplicità delle cause che necessariamente turbano le osservazioni di questo genere, sono abbastanza concordi fra loro.

Ecco i risultati ottenuti per le giornate di osservazione indicate nel precedente prospetto.

28 settembre	$a = 317{,}17$
29 »	$a = 328{,}66$
3 ottobre	$a = 329{,}72$
14 »	$a = 306{,}96$
21 »	$a = 298{,}96$
17 dicembre	$a = 346{,}70$
22 »	$a = 354{,}45$
Valor medio di	$a = 326{,}08$

I calcoli fatti per altre quattro giornate diedero per valor medio $a = 318{,}7$. Media delle 11 giornate $a = 323{,}4$ div.

Perchè si possa apprezzare giustamente il grado di precisione raggiunto con questa determinazione, basterà ch'io dica che essendo a rappresentato in divisioni lette alla bussola quando nel circuito erano introdotte 16 unità Siemens di resistenza, una divisione corrisponde a circa un decimo di grado, sicchè il massimo divario fra i valori di a, che più si discostano e la media non supera i 3 gradi.

Ho voluto indagare quale sarebbe il valore che dovrebbe assumere b nei singoli casi, affinchè risultasse per a il valore ora determinato. Trovai che se al valore di b calcolato coi dati di due osservazioni si toglie la quantità 0,08, si ottiene un nuovo valore $b_1 = b - 0{,}08$, che dà per a dei valori soddisfacenti. Così se coi dati desunti dalle curve di osservazione (Prospetto VIII) si calcola il valore di a col mezzo della solita formola $y = ab_1^E$ attribuendo a b_1 i valori trovati per b (Prospetto IX) diminuiti della quantità 0,08, si hanno valori che si discostano assai poco dalla media trovata $a = 323{,}4$, come ne dà prova il seguente specchio, nel quale i valori di y ed E sono tolti dal prospetto VIII, il valore di b dal prospetto IX e si fece $b_1 = b - 0{,}08$.

28 settembre

E	y	b	b_1	$a = \frac{b_1}{y^E}$
1,4	213,0	0,835	0,755	315,68
2,0	191,2	0,840	0,76	331,03
2,6	172,3	0,865	0,785	323,23
3,2	158,0	0,900	0,82	298,16

29 settembre

1,4	206,8	0,822	0,742	314,04
2,0	184,8	0,837	0,757	322,49
2,6	166,1	0,872	0,792	304,57
3,2	153,0	0,905	0,825	283,16
4,4	132,7	0,909	0,829	308,59
		21 ottobre		
1,8	200,9	0,831	0,751	328,46
2,4	179,8	0,881	0,801	306,25
3,0	166,6	0,897	0,867	305,49
3,6	156,1	0,897	0,816	323,15
4,2	146,1	0,896	0,820	343,21
4,8	137,2	0,900	0,814	355,67

Si può dare anche un'altra prova alla regola ora accennata. Se dalle varie curve delle osservazioni si desumono i valori di y corrispondenti a un medesimo valore di E si hanno, com'è da prevedere, numeri differenti. — Per es. per $E = 2{,}7$ si ha

28	settembre	174,0
29	»	163,3
30	»	164,0
2	ottobre	160,0
18	»	175,0
19	»	169,0
21	»	172,2
10	»	172,4
1	novembre	164,0
10	dicembre	168,0
17	»	180,0
22	»	162,2

Il medio aritmetico di quei valori corrisponde a

$$y = 168{,}7$$

e se si cerca il medio valore di b corrispondente a $E = 2{,}7$ si trova essere

$$b = 0{,}86.$$

Facendo ora $b_1 = 0{,}86 - 0{,}08 = 0{,}78$ e sostituendo questi valori di y, b_1 ed E nella formola $y = ab_1^E$, si ricava

$$a = 330$$

valore assai prossimo al medio 323,4.

Se in luogo di $b_1 = 0{,}78$ si avessero assunti i due valori 0,75 e 0,80 si avrebbe ottenuto rispettivamente per a i due valori

308 e 367,

il che prova che basta una piccola differenza nel valore del coefficiente d'assorbimento b, perchè risultino valori molto diversi per a: e prova altresì che il metodo seguìto per stabilire il valor medio di a è assai opportuno, essendo che i valori estremi che hanno fornito quel valor medio si discostavano da questo di una quantità minore di quella che risulta col variare di due o tre centesimi il coefficiente di assorbimento.

Possiamo adunque accettare con molta fiducia questo valore

$$a = 323$$

per rappresentare la così detta *costante solare* espressa in divisioni della scala della bussola da me adoperata, con 16 unità Siemens di resistenza introdotte nel circuito, oltre quella offerta dalla pila termo-elettrica n. 1, dai reofori, e dal filo della bussola.

Rimane ora da determinare a che cosa corrisponda questo valore di a, per poter fare il confronto fra l'effetto termico prodotto dal raggiamento solare, e quello ottenuto col raggiamento delle sorgenti calorifiche sottoposte all'esperienza, e poter in fine stabilire quale sia la temperatura effettiva del Sole.

§ X.

Determinazione della temperatura effettiva del Sole.

Abbiamo veduto che la costante solare, cioè l'effetto termico che produrrebbe il raggiamento solare incidendo normalmente sulla faccia affumicata della pila n. 1, qualora l'atmosfera terrestre non esistesse, o, ciò che torna lo stesso, ove la pila termo-elettrica si trovasse al limite superiore dell'atmosfera è espresso da $a = 323$ divisioni. Le osservazioni del raggiamento solare furono fatte con 16 unità Siemens di resistenza introdotte nel circuito, mentre le esperienze sul raggiamento di sorgenti termiche artificiali, le quali hanno servito a stabilire la formola che rappresenta la legge del raggiamento, ed anche quelle, col mezzo delle quali venne verificata l'applicabilità della formola stessa al raggiamento di corpi aventi temperature molto elevate, furono fatte senza che nel circuito ci fosse altra resistenza all'infuori di quella offerta dalla pila termo-elettrica, dal filo della bussola e dai reofori.

Per poter fare i necessarî confronti fra le une e le altre esperienze, e per poter applicare la formola al raggiamento solare, è necessario di convertire il valore di $a = 323$ risultante dalle osservazioni solari nel valore y che lo stesso raggiamento solare avrebbe prodotto se fossero state tolte le 16 unità Siemens di resistenza. A tal uopo importa di conoscere il valore della resistenza offerta dalla pila n. 1, dai reofori, e dal filo della bussola. Vennero fatte molte ed accurate esperienze per determinare complessivamente e separatamente quelle tre resistenze. Credo inutile di qui riferirle, e solo dirò i risultati.

Dodici esperienze diedero quale medio valore della resistenza complessiva il numero

$$3{,}408;$$

i valori che più si discostano dal medio erano i due

$$3{,}374 \text{ e } 3{,}496.$$

Altre nove esperienze diedero per valore medio

$$3{,}411.$$

Io adottai quindi il numero

$$R = 3{,}41$$

per esprimere quella resistenza complessiva, la quale era così ripartita:

$$\begin{array}{lrl} \text{filo della bussola} & r & = 1{,}522, \\ \text{reofori} & r_1 & = 0{,}552, \\ \text{pila n. 1} & r_2 & = 1{,}336. \end{array}$$

Ora è facile il calcolare il valore di y, che riesce eguale a

$$y = \frac{19,41}{3,41} a = 5,6921.a,$$

e ritenuto $a = 323$

$$y = 1838,5 \text{ divisioni.}$$

Si suol chiamare *temperatura effettiva* del Sole quella che dovrebbe avere un corpo incandescente di pari grandezza e situato alla stessa distanza del Sole per produrre il medesimo effetto termico y, qualora esso fosse dotato del medesimo poter emissivo, quando cioè fosse per esso $E = 1$.

In questo caso è applicabile senz'altro la formola

$$y = m\, T^2 (T - \Theta) - n\, (T - \Theta),$$

e ritenuto che le osservazioni sieno state fatte mentre la temperatura dell'ambiente era 24°, per cui $\Theta = 297$, si ottiene da essa il valore

$$T = 10238°,4,$$

e quindi la temperatura effettiva del Sole espressa in gradi della scala centigrada riesce eguale a

$$t = 9965°,4,$$

che rappresenta la temperatura effettiva del Sole, desunta dal raggiamento termico di quell'astro, tenendo il dovuto conto dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre. Che se si avesse voluto trascurare la correzione richiesta da codesto assorbimento, allora si dedurrebbe dalla solita formola una temperatura minore. Infatti nelle osservazioni fatte dal settembre in poi, il massimo effetto lo si ebbe all'ora del mezzogiorno del dì 28 settembre e corrisponde a 210,0 divisioni che danno per y il valore

$$y = 5,6921 \times 210 = 1195,4.$$

Introdotto questo valore nella solita formola si ottiene

$$T = 8883,8,$$

$$\text{e} \quad t = 8610,8.$$

Il risultamento da me ottenuto abbisogna tuttavia di una modificazione quando si voglia tener conto, oltre che dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre anche di quello dovuto all'atmosfera che circonda il Sole. Giusta le esperienze del Secchi l'atmosfera solare esercita un potente assorbimento sui raggi provenienti dalla fotosfera; in virtù di esso solamente 12 centesime parti del raggiamento del Sole potrebbero oltrepassare i limiti dell'atmosfera solare, mentre 88 centesime parti verrebbero da questa assorbite. Ritenendo esatto questo valore offerto dal Secchi, si può calcolare l'effetto termico che produrrebbe il Sole quando fosse privo dell'atmosfera che lo circonda. Esso sarebbe eguale a

$$y = 1838,5 \times \frac{100}{12} = 15320,8;$$

dalla formola si ottiene

$$T = 20653,7,$$

$$\text{e quindi} \quad t = 20380,7.$$

Ci sono ancora due cause che possono alquanto modificare questi risultamenti, ma non al certo di molto, poichè gli effetti di esse sono contrarî e possono compensarsi.

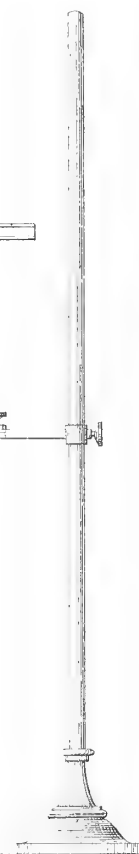
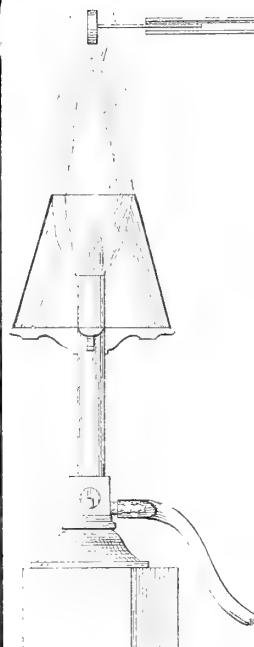
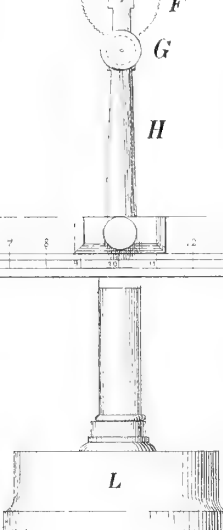
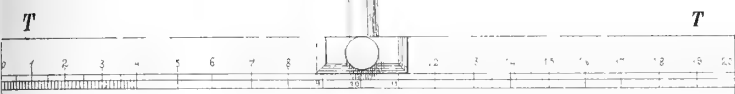
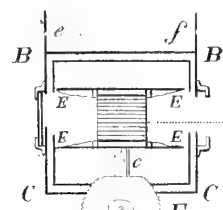
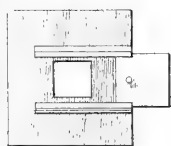
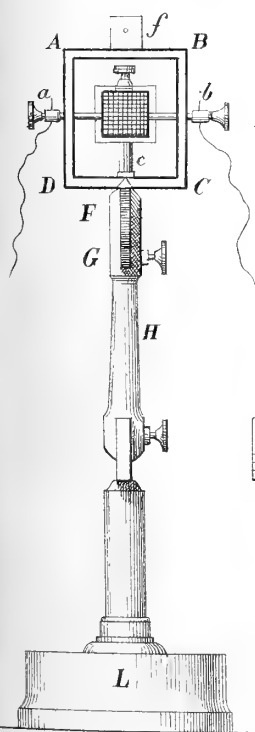
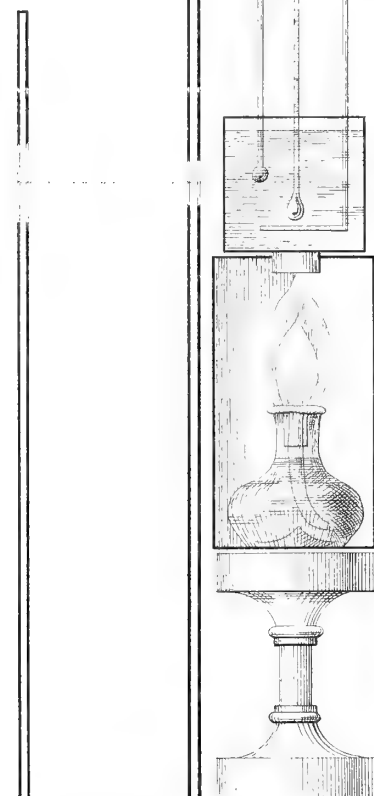
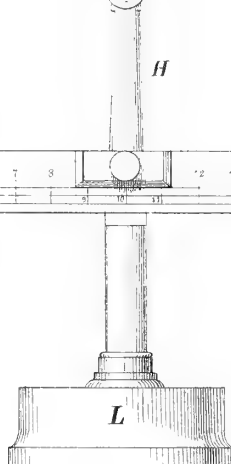
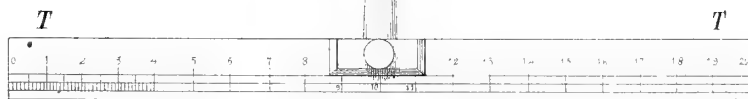
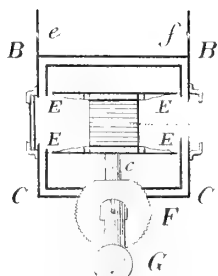
Una di queste cause è il valore del poter emissivo specifico del Sole: può darsi ch'esso sia minore dell'unità, e in tal caso la temperatura *reale* del Sole sarebbe più elevata.

L'altra causa è la trasparenza dei varî strati dell'atmosfera solare: sebbene questa trasparenza sia piccola, pure è certo che noi riceviamo i raggi dei varî strati sovrapposti, e quantunque la loro temperatura sia al certo inferiore a quella della fotosfera sottoposta, pure al raggiamento di essa si aggiunge anche una parte del raggiamento di questi strati, sicchè in tal caso basta una temperatura più bassa del Sole per produrre il riscaldamento misurato coi nostri strumenti.

Laonde parmi di poter conchiudere che la *vera temperatura* del Sole non debba esser gran fatto diversa da quella che venne chiamata *temperatura effettiva* di quell'astro, e questa non debba esser inferiore di molto ai *dieci mila gradi*, ove si tenga conto solamente dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera terrestre; nè di molto superare i *venti mila gradi* quando si voglia eziandio aver riguardo all'assorbimento prodotto dall'atmosfera solare, e questo corrisponda a $\frac{88}{100}$ del raggiamento totale [1].

[1] Mi torna cosa gradita il dichiarare che in queste indagini mi fu di non lieve giovamento la intelligente cooperazione degli egregi miei assistenti d.r M. Bellati e d.r G. De Lucchi, e che, ogni qual volta occorse, ebbe la cortesia di prestarsi anche il chiarissimo collega prof. A. Naccari.

Lit. Bruno e Salomone, Roma

Lava dis.

La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari.

Memoria dell' ing. prof. G. B. FAVERO,

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 marzo 1878.

INTRODUZIONE

Fra i problemi di cui la Statica Grafica si occupa, quello di determinare le forze interne nelle travi, è per avventura il più importante, atteso il grande uso che nelle costruzioni si fa di travi reticolari ed omogenee.

Le espressioni analitiche di quelle forze sono spesso complicate, ed il loro calcolo numerico esige in generale un tempo notevolmente più lungo, di quello che occorre per una determinazione grafica. Questa è perciò preferibile in tutti quei casi nei quali l'esattezza, che si può ottenere col graficismo, sia sufficiente per il caso che si tratta: e ciò avviene quasi sempre in pratica. L'uso dei metodi grafici ha cominciato quindi ad estendersi fra i costruttori, specialmente dopochè robusti ingegni, anche esclusivamente cultori delle matematiche pure, si sono occupati di migliorare ed estendere i metodi stessi.

Se si considerano nel loro insieme i metodi grafici sviluppati principalmente da Culmann, Fleeming Jenkin, Cremona, per giungere alla determinazione delle forze interne nelle travi reticolari, si trova che il poligono delle forze, il poligono funicolare e le figure reciproche sono per così dire i cardini intorno ai quali tutti i procedimenti si aggirano.

Del poligono delle forze e del poligono funicolare si serve il prof. Culmann tanto per trovare le reazioni sugli appoggi, quanto per giungere a determinare lo sforzo in ogni asta del sistema reticolare. Le proprietà statiche delle figure reciproche, già riconosciute del prof. Clerk Maxwell, condussero ai metodi proposti dal prof. Fleeming Jenkin; ed il nuovo modo di ottenere le figure reciproche, proposto dal prof. Cremona, lo condusse a quegli eleganti diagrammi, che gli sono dovuti, e dei quali difficilmente si può immaginare alcun che di più pronto; semprechè, per un dato sistema di forze esterne, siano già trovate le reazioni sugli appoggi, e si vogliano determinare gli sforzi in *tutte* le aste di una trave.

Se si ricerca ora quale sia l'idea dominante, che servì quasi di guida in tutti gli studî ora accennati, si riconosce facilmente che l'intendimento comune a cui mirarono tutte le ricerche, si fu costantemente la conoscenza dell' intensità delle

forze interne della trave, dovute ad un dato sistema fisso di forze esterne. Si trattò dunque sempre della valutazione d' una *grandezza* incognita, dovuta a cause determinate ed invariabili, o considerate come tali.

Ma la questione presenta anche un altro lato. Si può cioè proporsi di determinare non l'*intensità* (la *grandezza*) delle forze interne, come effetto di forze esterne determinate; ma di determinare la *legge di variazione* delle forze interne stesse, come conseguenza di forze esterne, supposte variabili. Tale legge di variazione delle forze interne può, come è chiaro, studiarsi anche prescindendo dalla loro intensità effettiva; poichè per lo studio della legge di variazione bastano i rapporti fra i successivi valori assunti dalle forze interne, divenute variabili.

Ora siccome le forze esterne possono variare di numero, di intensità, di posizione e di senso, così lo studio delle leggi secondo cui variano le forze interne, si presenta a primo aspetto come un campo vastissimo di ricerche. Siccome però, come in seguito si esporrà, la relazione fondamentale fra le forze esterne e le interne è assai semplice, così un tal campo viene sensibilmente a restringersi, e lo studio delle leggi di variazione resta da tale circostanza molto facilitato. E ciò tanto più quando si abbiano in mira i casi della pratica, per i quali i modi di variare delle forze esterne sono limitati e semplici, e tali quindi riescono pure le leggi di variazione delle forze interne, che ne sono la conseguenza.

Lo studio delle leggi con cui variano le forze interne delle travi, nella supposizione di forze esterne variabili, si presta direttamente alla ricerca dei valori massimi e minimi, a cui possono giungere quelle forze interne. La ricerca invece delle intensità di queste forze, quali esse risultano da un sistema determinato, invariabile, di forze esterne, esclude di natura sua le questioni di massimo e di minimo; le quali sono sempre basate sul confronto fra loro di un numero infinito di grandezze o rapporti di grandezze; e tale confronto riesce sempre malagevole, senza la conoscenza della legge, da cui quelle grandezze o quei rapporti sono collegati. Infatti, finchè la ricerca si limita alla determinazione delle intensità delle forze interne, quale effetto di un sistema determinato, invariabile, di forze esterne, si potrà bensì decidere del massimo e del minimo valore fra un numero finito di casi, che isolatamente si siano considerati, ma non fra l'infinito numero di casi possibili. A meno che non riesca in qualche caso speciale, d'intravvedere qual sarebbe il risultato dell'esame per tutti i nuovi casi che si potrebbero considerare.

Ma sebbene lo studio delle leggi con cui variano le forze interne, si presti più propriamente alla ricerca dei massimi e minimi valori di quelle forze, tale studio può essere utilizzato altresì alla determinazione delle intensità effettive delle forze interne, quale conseguenza di un sistema determinato, invariabile, di forze esterne. Questo studio si presta cioè anche alla soluzione di quel problema, che fu l'oggetto principale delle ricerche finora fatte su questo argomento. È chiaro infatti, che la conoscenza della legge di variazione delle forze interne, conduce a conoscere l'intensità di queste forze per uno qualunque degl'infiniti sistemi di valori assunti dalle forze esterne, supposte variabili. Ora quando sia dato un sistema determinato di forze esterne, nulla vieta di considerarlo come uno fra gli infiniti sistemi di valori, che può essere assunto da un sistema variabile di forze esterne. Si potrà anzi supporre

a beneplacito un sistema variabile di forze esterne, e pure a beneplacito supporre la legge della loro variabilità; purchè questo arbitrio della scelta si assoggetti alla sola condizione, che fra gl' infiniti valori assunti dal sistema variabile di forze, sia compreso anche il dato sistema di forze esterne.

La conoscenza delle leggi con cui variano le forze interne d'una trave, abbraccia quindi un numero maggiore di problemi, poichè essa serve non solo a trovare i valori massimi e minimi assunti da quelle forze, ma può essere utilizzata eziandio alla determinazione quantitativa delle forze interne per un determinato sistema invariabile di forze esterne.

Anche le reazioni sugli appoggi si possono considerare dal medesimo punto di vista. Anzichè cioè ricercare quale ne sia il valore per un determinato sistema di forze esterne, si può domandare quale sia la legge, con cui quelle reazioni variano, nel caso che il sistema di forze esterne sia supposto variabile. E la conoscenza di una tal legge può essere poi applicata, analogamente a quanto sopra si disse per le forze interne, sia alla ricerca dei valori massimi e minimi delle reazioni stesse, sia anche alla determinazione dell' intensità di tali reazioni per un determinato sistema di forze esterne.

Ma seppure questo nuovo modo di trattare la questione potesse essere interessante dal lato teorico, esso perderebbe però per la pratica ogni valore, qualora i procedimenti grafici, che ne fossero la conseguenza, fossero lunghi e complessi; e non potessero per alcun modo misurarsi con quelli oggi noti e diffusi. Ma, come si vedrà nel seguito di questa Memoria, la cosa non è così. Per molti problemi anzi, il metodo grafico qui proposto è più rapido e più pronto degli altri metodi conosciuti; mentre poi per tutte le questioni di massimo e di minimo, per le quali non è possibile il confronto coi soliti metodi grafici, esso è abbastanza breve, da potersene consigliare l' applicazione in quei casi della pratica, nei quali la ricerca del massimo e del minimo è di speciale importanza.

Il metodo è applicabile non solo alla determinazione degli sforzi sopportati dai singoli membri delle travi reticolari; ma anche, come si mostrerà in una Memoria ulteriore, alla determinazione degli sforzi di taglio e dei momenti nelle travi omogenee.

La causa principale che le costruzioni dedotte del metodo qui proposto riescono semplici, sta nel fatto che la legge con cui in pratica variano le forze esterne è semplicissima, e che semplicissima riesce pure la legge con cui variano le forze interne. Perciò anche nei casi, nei quali si tratta di determinare l'intensità delle forze interne corrispondenti ad un dato sistema di forze esterne, e nei quali dunque, come sopra si disse, è arbitraria la legge di variazione, che si può assumere per quest' ultime, riesce conveniente di assumere quello stesso modo di variazione che ha luogo comunemente in pratica, e dal quale si ottengono facili e brevi costruzioni.

La presente Memoria ha per iscopo di far conoscere qualcuno dei procedimenti grafici, dedotti dal nuovo metodo, per mostrarne l'applicabilità ad alcune forme di travi reticolari. Egli è perciò che si sono limitate al puro necessario le considerazioni d'ordine teorico. Si è fatta invece più ampia parte alle applicazioni, cimentando il nuovo metodo rispetto a diversi casi della pratica.

Si è pure creduto di far precedere alle considerazioni meccaniche ed alle applicazioni una breve considerazione intorno ai tipi geometrici delle travi reticolate, la quale ha lo scopo anzitutto di far vedere come tutti i sistemi di travi reticolate generalmente usati, possano derivarsi da un unico concetto fondamentale; e poscia di far conoscere come le proprietà meccaniche su cui riposa il nuovo metodo, siano comuni a tutti i tipi di travi reticolate.

I. Tipi geometrici di sistemi rigidi nel piano.

1. Siano P e Q (fig. 1) due curve piane, collocate nel piano degli assi OX, OY, ai quali s' intendano riferite; e sia M un corpo qualunque rigido. Si prendano nel corpo due punti A e B, e per essi si faccia passare un piano π, che s' intenderà fisso al corpo. Si faccia ora muovere il corpo in modo, che il piano π coincida costantemente col piano degli assi, e che inoltre i due punti A e B restino rispettivamente nelle curve P e Q.

Egli è chiaro che in generale il corpo potrà prendere in tali condizioni un infinito numero di posizioni diverse rispetto agli assi. Fatto coincidere infatti uno dei due punti presi nel corpo (per es. A) con un punto della rispettiva curva (P), preso ad arbitrio, non vi sarà in generale che un numero finito di posizioni del corpo M, per le quali l'altro punto si trovi sull' altra curva. Ma la prima coincidenza si può fare in un nùmero infinito di modi: il numero totale delle posizioni sarà dunque infinito.

Diremo per brevità *mobilità* questa proprietà del corpo di poter prendere diverse posizioni; e quando la mobilità sia ristretta dalle condizioni sopra accennate, la indicheremo colla notazione (1).

2. Se si sopprime una delle curve, per es. la Q, e si assoggetta il corpo M alle sole due condizioni, che il piano π coincida col piano degli assi, e che il punto A si trovi sulla curva P, la mobilità del corpo diventa infinitamente maggiore. Preso infatti sulla curva P un punto ad arbitrio, e fattovi coincidere il punto A, il corpo potrà prendere ancora infinite posizioni, che si otterrebbero facendolo rotare intorno ad un asse passante per A, e normale al piano degli assi OX, OY.

Analogamente alla notazione superiore, indicheremo in questo caso con (2) la mobilità del corpo M rispetto agli assi.

Se si sopprime anche la curva P, e si assoggetta il corpo unicamente alla condizione che il piano π coincida con quello degli assi, allora con una considerazione simile alle precedenti si arriva a conchiudere che, in questo caso, la mobilità del corpo M rispetto agli assi dovrà analogamente essere segnata con (3).

3. Resterebbe ora da sopprimere anche l' ultima condizione, quella cioè che il piano π coincida col piano degli assi ; ma ciò condurrebbe a considerare la mobilità del corpo nello spazio, mentre per lo scopo di questa Memoria basta considerarne la mobilità nel piano. Nelle seguenti ricerche adunque, parlando della mobilità rispettiva dei corpi s'intenderà sempre che essa avvenga nel piano, ossia in altre parole, che ognuno dei corpi considerati abbia un piano fisso, obbligato a coincidere costantemente con un piano comune.

4. Se i due punti A e B coincidono, non si potrà soddisfare alla condizione che essi trovinsi rispettivamente sulle due curve P e Q, se non nel caso che queste abbiano uno o più punti comuni. Scelto allora uno di questi punti comuni, e collocativi i due punti coincidenti A e B, il corpo M potrà rotare intorno all'asse passante per il punto scelto, e normale al piano degli assi OX, OY; e potrà prendere quindi infinite posizioni rispetto agli assi. La sua mobilità sarà dunque anche in questo caso notata con (1), come nel caso che i due punti A e B siano distinti.

Per lo scopo di questa Memoria non occorre entrare nella discussione di altri casi particolari. Tale sarebbe per es. quello, in cui la curva P avesse dei punti, coi quali facendo coincidere il punto A del corpo, non vi fosse più alcuna posizione, per la quale il punto B si potesse trovare sulla Q; o quello in cui la distanza fra due punti qualunque, presi rispettivamente sulle due curve P e Q, fosse sempre maggiore della distanza A B fra i due punti presi nel corpo; ecc.

5. Se le curve sono tre P, Q ed R (fig. 2), e tre pure i punti A, B, C, presi nel corpo M, per i quali passi il piano π; e si voglia che i tre punti si trovino rispettivamente sulle tre curve, allora non vi sarà in generale che un numero finito di posizioni del corpo M rispetto agli assi, che soddisfi alle poste condizioni. Si dirà in questo caso che il corpo è *fisso* rispetto agli assi, e la sua mobilità dovrà indicarsi colla notazione (0).

6. Si considerino ora due corpi M ed N (fig. 3), ambedue rigidi, e si supponga che due curve P e Q siano invariabilmente connesse col corpo M, supposto fisso nel piano. Si prendano nel secondo corpo due punti A e B, e si assoggettino alla condizione di trovarsi rispettivamente sulle due curve P e Q. Un ragionamento affatto simile a quello fatto sopra, ci condurrà a conchiudere che in questo caso la mobilità del corpo N rispetto al corpo M sarà quella caratterizzata dalla notazione (1). Similmente, se si sopprime una delle curve, per es. la Q, la mobilità di N rispetto ad M sarà espressa dalla nota (2); se si sopprime anche la curva P la mobilità prenderà la nota (3). Che se si suppone, che le curve siano tre P, Q ed R, e tre i punti A, B e C, presi nel corpo N, ed obbligati a stare nelle tre curve, allora questo corpo resterà fisso rispetto ad M, e la sua mobilità sarà quindi notata con (0). In questo caso adunque i due corpi costituiscono un *sistema rigido*.

Ora si osservi, che qualora si supponga fisso nel piano il corpo N, invece del corpo M, e mobile invece quest'ultimo; restando però le curve P, Q ed R fisse pur sempre al corpo M e mobili quindi con esso, si troverà facilmente, che la mobilità di M rispetto ad N è espressa ancora da (0), (1), (2), (3); secondochè si considerano tre curve, o due od una, oppure si sopprimono totalmente. Generalizzando quindi alcun poco l'idea, si potrà dire che la mobilità rispettiva di due corpi può notarsi con (0), (1), (2) o (3), secondochè l'uno di essi sia obbligato ad avere tre punti sopra tre curve fissate all'altro corpo, o due punti sopra due curve, od un punto sopra una curva, o finalmente i due corpi siano affatto indipendenti l'uno dall'altro.

7. Si considerino ora due corpi M ed N (fig. 4), e si supponga che una curva P sia invariabilmente connessa col corpo M, ed una seconda curva Q invariabilmente connessa col corpo N. Si facciano muovere i due corpi uno rispetto all'altro, in modo però che il punto A, appartenente al corpo N, si trovi costantemente sulla curva P,

ed il punto B, appartenente al corpo M, costantemente sulla curva Q. Anche in questo caso si vedrà facilmente, che preso ad arbitrio un punto della P e fattovi coincidere il punto A, non vi sarà in generale che un numero finito di posizioni del corpo N, tali che il punto B trovisi nella curva Q, posizioni che si otterranno, tenendo fermo il corpo M, e facendo rotare il corpo N intorno ad asse passante per A, normale al piano della figura. La mobilità adunque rispettiva dei due corpi dovrà notarsi con (1).

Che se le curve siano tre, e due di queste siano invariabilmente connesse col corpo M, mentre la terza sia invariabilmente connessa col corpo N; e si ponga la condizione, che due punti dati del corpo N si trovino rispettivamente sulle due curve connesse al corpo M, ed un punto dato di quest' ultimo si trovi sulla curva connessa col corpo N; si troverà facilmente che in questo caso i due corpi sono fissi rispettivamente; cioè la loro mobilità rispettiva dovrà notarsi con (0).

8. Se dunque per brevità di linguaggio si chiami *legame* la condizione, per la quale un punto dato di un corpo debba trovarsi sopra una curva data, invariabilmente connessa ad un altro corpo, si potranno riassumere le superiori considerazioni nella proposizione seguente:

« Se fra due corpi si stabiliscono l legami, la loro mobilità rispettiva sarà espressa da $(3-l)$; dove $l=0, 1, 2, 3$ ».

Quando $l=3$, i due corpi costituiscono un sistema rigido. Se si prendesse $l=p$, dove p sia intero positivo e >3, ciò vorrebbe dire, analogamente, che fra i due corpi si stabiliscono più di tre legami, ossia che le curve sono più di tre. In tal caso è generalmente impossibile di soddisfare a tutte le condizioni. Se però per un numero finito di posizioni rispettive dei due corpi esse fossero soddisfatte, si potranno sempre sopprimere in generale $p-3$ delle date curve, mantenendo la rigidità del sistema.

Per maggiore semplicità delle figure, i corpi saranno in seguito indicati mediante piccoli circoli, e l'esistenza d' un legame fra due corpi, sarà indicata da un arco congiungente i due corpi. Le figure 5, 6 e 7 indicheranno dunque che fra i corpi 1 e 2 esistono uno, due e tre legami rispettivamente.

9. Si prendano ora a considerare tre corpi 1, 2, 3 (fig. 8); e si stabiliscano tre legami fra i corpi 1 e 2, e tre legami pure fra i corpi 2 e 3. I tre corpi costituiranno evidentemente un sistema rigido, poichè tanto i due corpi 1 e 2, presi per sè, come i due corpi 2 e 3, formano un sistema rigido. La mobilità rispettiva dei tre corpi potrà dunque notarsi con (0). Se si sopprime uno dei legami fra 2 e 3, la mobilità del sistema dei tre corpi diventa (1); poichè, soppresso il legame, il corpo 3 acquista la mobilità (1) rispetto a 2, ossia rispetto al sistema composto dei due corpi 1 e 2, fra i quali sussistono i tre legami, ed i quali quindi costituiscono un solo sistema rigido. Con simile ragionamento si vedrà, che qualora dei sei legami esistenti in origine se ne tolgano due, uno fra 1 e 2, l'altro fra 2 e 3, la mobilità del sistema dei tre corpi diventa (2). Questa mobilità diventa (2) anche nel caso, che si lascino intatti i tre legami fra 1 e 2, e se ne sopprimano due fra 2 e 3. Seguitando così a sopprimere i legami uno per uno, non importa con qual ordine, si troverà facilmente, che la mobilità del sistema dei tre corpi cresce

successivamente e prende le notazioni (3), (4), (5) e (6); la quale ultima ha luogo, quando tutti i legami siano soppressi.

10. Ritornando ora alla fig. 8, si sopprima un legame fra 2 e 3, e se ne aggiunga poscia uno fra 1 e 3, col che si avrà la fig. 9. Anche a questo modo si ottiene un sistema rigido, poichè la mobilità che era (0) nella figura primitiva, diventa (1), quando si sopprime un legame fra 2 e 3, e ritorna (0) coll'aggiungere il legame fra 1 e 3. Infatti i due corpi 1 e 2 mantengono sempre i loro tre legami, e costituiscono quindi sempre un sistema rigido: fra questo sistema rigido, considerato come un solo corpo, ed il corpo 3 restano poi stabiliti tre legami, tanto se tutti tre abbiano luogo fra il corpo 2 ed il 3, come se due legami siano stabiliti fra il 2 ed il 3, ed il terzo legame fra 1 e 3.

11. Se ora nella fig. 9 si toglie uno dei legami fra 1 e 2, e se ne aggiunge uno fra 1 e 3, si ha la fig. 10; e non sarà difficile dimostrare, seguendo le tracce delle considerazioni superiori, che anche in questo caso si ha un sistema rigido di tre corpi.

Sebbene però le disposizioni dei legami indicate nelle figure 8, 9 e 10, costituiscano sempre un sistema rigido di tre corpi, esse presentano queste differenze. Nella fig. 8 vi sono due combinazioni o coppie di corpi, ognuna delle quali costituisce per sè un sistema rigido: cioè la coppia 1, 2 e la coppia 2, 3; mentre ognuna di queste coppie è costituita da due corpi collegati da tre legami. Nella fig. 9 invece vi è una sola coppia, quella formata dai due corpi 1 e 2, che costituisca un sistema rigido per sè, poichè solamente i corpi 1 e 2 sono direttamente uniti da tre legami: le altre due coppie, cioè 2, 3 ed 1, 3 non costituiscono sistemi rigidi per sè; mentre fra 2 e 3 vi sono due soli legami, e fra 1 e 3 un solo legame. Nella fig. 10 finalmente non vi è alcuna coppia di corpi, che formi sistema rigido per sè, poichè i due corpi di ognuna delle tre coppie sono uniti solamente da due legami.

Egli è perciò che tanto la fig. 8, che la fig. 9 si possono considerare come sistemi rigidi formati di due corpi, anzichè di tre; basta perciò riguardare nella fig. 8 la coppia 1, 2, oppure la 2, 3 come un corpo unico; e nella fig. 9 la coppia 1, 2. La fig. 10 invece non può in alcun modo riguardarsi come sistema rigido formato da due corpi.

Considerando le fig. 8 e 9 come sistemi rigidi formati da due corpi, esse ricadono nel caso della fig. 7; siccome però nelle figure 8 e 9 uno dei corpi è esso stesso un sistema rigido di due, così per distinzione si dirà, che la fig. 7 rappresenta un sistema rigido *semplice*; le figure 8 e 9 invece sistemi rigidi *composti*. Per distinguere poi queste disposizioni da quella indicata nella fig. 10, si dirà, che le figure 7, 8 e 9 rappresentano sistemi rigidi di *secondo ordine*, e che la fig. 10 rappresenta un sistema rigido di *terzo ordine*.

Quando alcuni dei corpi collegati formano un sistema rigido per sè, in forza dei legami che li uniscono fra loro direttamente, tale sistema sarà detto *parziale* rispetto al sistema totale dei corpi.

Intanto si osservi che qualunque sia la disposizione adottata, per rendere rigido un sistema di tre corpi occorrono sei legami.

12. Le idee precedenti relative ai sistemi rigidi semplici e composti, all'ordine loro ed ai sistemi parziali, si estendono e si generalizzano, considerando sistemi costituiti da un maggior numero di corpi.

Il sistema di quattro corpi, collegati come è indicato nella fig. 11, può considerarsi in più modi come sistema di secondo ordine, composto. Esso contiene i sistemi parziali 1, 2; 2, 3; 3, 4; (1, 2), 3; (2, 3), 4. ecc. Da esso, togliendo un legame fra 3 e 4 ed aggiungendone uno fra 1 e 4, si ha la disposizione della fig. 12, che costituisce un altro sistema composto, pure di secondo ordine. Un sistema composto di secondo ordine si ha pure togliendo un legame fra 1 e 2, ed aggiungendolo fra 1 e 3 (fig. 13). Togliendo poi nella fig. 12 un legame fra 2 e 3, ed aggiungendolo fra 1 e 4; oppure togliendo nella fig. 13 un legame fra 2 e 3 ed aggiungendolo fra 1 e 4 si hanno i sistemi composti indicati dalle figure 14 e 15, i quali sono di terzo ordine. Infatti nella fig. 14 i corpi 1 e 2 costituiscono per sè un sistema rigido: similmente i corpi 3 e 4 nella fig. 15. Si ricade dunque, tanto per l'una che per l'altra di queste due figure nel tipo della fig. 10, che rappresenta i sistemi di terzo ordine.

Se ora nella fig. 14 si toglie un legame fra 1 e 2, e se ne aggiunge uno fra 1 e 3; oppure se nella fig. 15 si toglie un legame fra 3 e 4, e se ne aggiunge uno fra 2 e 4, si hanno le disposizioni delle figure 16 e 17, che rappresentano sistemi semplici di quarto ordine. Questi ultimi sono caratterizzati dalla proprietà, che in essi non si trova alcuna combinazione nè di due nè di tre corpi, i quali costituiscono un sistema rigido per se, in forza dei legami da cui sono direttamente collegati.

13. Dalla disposizione della fig. 11 si possono dedurre molti altri sistemi composti di secondo e di terzo ordine, e molti altri semplici di quarto, oltre quelli che come esempî sono indicati nelle figure 12, 13, 14, 15, 16 e 17. La deduzione si può fare facilmente in varie guise, sempre togliendo un legame fra due corpi ed aggiungendone un altro fra altri due. La mobilità del sistema, che è (0) evidentemente nella disposizione della fig. 11, diventa (1) quando si toglie uno dei legami, e deve ritornare (0) coll'aggiungere l'altro legame. Affinchè però questo avvenga, bisogna avere l'avvertenza nell'aggiungere il secondo legame, che esso colleghi fra loro due corpi, che rispettivamente divennero mobili col togliere il primo legame. Senza di ciò il secondo legame non farebbe che ricongiungere parti fra loro già fisse, senza togliere la mobilità delle altre. Intanto si osservi che sopprimendo successivamente i legami della fig. 11, la mobilità del sistema dei quattro corpi va crescendo da (0) fino a (9); e che il numero dei legami necessarî e sufficienti a rendere rigido il sistema dei quattro corpi è sempre 9.

14. Risultati analoghi ai superiori si hanno esaminando i sistemi rigidi che si possono avere con cinque corpi, con sei ecc. Si potrà dunque dire in generale, che un sistema di n corpi può rendersi rigido in varie maniere, in modo che esso può presentarsi come sistema composto d'un ordine inferiore ad n, o come sistema semplice d'ordine n; che il numero necessario e sufficiente di legami per ottenere la rigidità è sempre $3n - 3$, e che la mobilità del sistema, qualora si sopprimono successivamente tutti i legami, cresce da (0) fino a $(3n - 3)$. Fra tutti i sistemi

rigidi possibili con n corpi, meritano attenzione specialmente quelli che sono dell'ordine n^{mo}, quelli cioè, nei quali non esiste alcuna combinazione di un numero di corpi inferiore ad n, la quale costituisca un sistema rigido per sè.

Un sistema di ordine n fra n corpi si ottiene sempre direttamente come segue: Si attribuisca ai corpi, presi in un ordine qualunque, un numero progressivo, e considerandoli come vertici se ne formi un poligono chiuso; si suddivida poi l'area del poligono in triangoli mediante una spezzata non interrotta. Si sostituiscano quindi ad ogni lato del poligono due legami, e ad ogni lato della spezzata un legame. Le figure 18, 19 e 20 mostrano questa disposizione per 5, 6 e 9 corpi, presi con numeri progressivi.

15. Si supponga ora che le curve, che servono a stabilire i legami fra i corpi, siano curve circolari. In tal caso la condizione di collegamento, che risulta da una di queste curve, si può immaginare realizzata mediante un' asta fermata a snodatura ai due corpi, che devono essere collegati. Così se la curva P (fig. 21) sia una circonferenza col centro D invariabilmente connessa col corpo M, ed il corpo N debba avere costantemente un suo punto A sulla P, basterà immaginare un' asta DA, eguale in lunghezza al raggio del circolo, e fermata al corpo M con una snodatura in D, ed al corpo N con una snodatura in A.

Similmente se il corpo N (fig. 22) avesse due punti A e B obbligati a muoversi rispettivamente lungo due circonferenze P e Q, aventi i centri D ed E, ed invariabilmente connesse col corpo M, ciò potrebbe realizzarsi mediante le due aste DA, EB, fissate analogamente alla DA della fig. 21.

La stessa disposizione si otterrebbe, se il corpo N avesse un punto A obbligato a stare sopra una circonferenza P, invariabilmente connessa col corpo M; ed il corpo M avesse un punto E obbligato a restare sopra una circonferenza Q', invariabilmente connessa col corpo N (n. 7).

Se i punti A e B coincidono in A si ha la disposizione della fig. 23 (n. 4).

Se le curve di collegamento sono tre circonferenze, si avranno tre aste, DA, EB, FC; ed i due corpi saranno fissi uno rispetto all'altro (fig. 24).

16. Riguardo ai corpi collegati non si è fatta finora alcuna supposizione, ritenendoli unicamente corpi rigidi. Si supponga ora, che i corpi siano aste rigide rettilinee, o triangoli, costituiti da tre aste rigide, unite a snodatura nei vertici. Quanto alle curve di unione, si mantenga la supposizione che siano circolari, ossia che il collegamento sia fatto da aste fermate alle estremità mediante snodature.

In tali supposizioni si potranno dai superiori tipi geometrici dedurre, in molte maniere, forme svariatissime di sistemi rigidi composti di aste.

Eccone alcuni esempî:

Dalla fig. 7 si ottiene il sistema rigido rappresentato dalla fig. 25, supponendo che i due corpi 1 e 2 della fig. 7 siano due aste 11', 22' (fig. 25); il collegamento fra i due corpi si fa allora mediante le tre aste 12, 12', 1' 2', che rappresentano i raggi delle curve circolari di unione.

Nella fig. 21 e nelle seguenti si sono indicate le snodature con piccoli circoli per maggiore chiarezza.

Dalla fig. 7 si può dedurre anche il sistema rigido fig. 26, supponendo che il

corpo 1 della fig. 7 sia, nella 26, il triangolo 11′ 1″, ed il corpo 2 sia l'asta 22′: le tre aste di collegamento sono allora 12′, 1′2, 1″2′.

Anche il sistema fig. 27 può considerarsi come un caso particolare della fig. 7. I due corpi sarebbero in questo caso i due triangoli 11′ 1″ e 22′ 2″, e le tre aste di collegamento le 1′2, 1′2″, 1″2′.

Confrontando il tipo della fig. 28 con quello della fig. 27, si rileva intanto, che il sistema fig. 28 ha un'asta di più di quelle che siano necessarie per renderlo rigido. Ciò può dedursi anche dalla considerazione, che per collegare n punti nel piano sono sufficienti $2n - 3$ aste: ora nella fig. 28, che ha sei punti (nodi) vi sono 10 aste invece di 9.

Dalla fig. 8 si può ottenere il sistema fig. 29, supponendo che i tre corpi della fig. 8 siano i tre triangoli 11′ 1″, 22′ 2″, 33′ 3″: i tre collegamenti fra il primo ed il secondo corpo saranno allora formati dalle tre aste 12, 1″2, 1″2′, e quelli fra il secondo ed il terzo dalle tre aste 2″3, 2″3′, 2′3′.

Dalla fig. 10 si ha il sistema rigido fig. 30, supponendo che i tre corpi della fig. 10 siano le tre aste 11′, 22′, 33′; allora i due collegamenti fra il primo ed il secondo corpo sono formati dalle due aste 1′2, 1′2′; quelli fra il secondo corpo ed il terzo dalle aste 2′3, 2′3′; e finalmente quelli fra il terzo ed il primo dalle aste 3′1, 3′1′.

Dalla stessa fig. 10 possono pure derivarsi i sistemi rigidi fig. 31, 32, 33. Nel primo i tre corpi sono i tre triangoli 11′1″, 22′2″, 33′3″, e le tre coppie di aste di collegamento sono le 12″, 1″2; 2″3″, 2′3; 3′1″, 31′. Nel secondo (fig. 32) i tre corpi sono il triangolo 11′ 1″, l'asta 22′ ed il triangolo 33′ 3″. Le aste di collegamento sono facili da trovarsi. Nel terzo (fig. 33) i tre corpi sono il triangolo 11′ 1″, l'asta 22′ ed il triangolo 33′ 3″. Fra il primo ed il secondo corpo vi sono le due aste di collegamento 1′2, 12′; fra il secondo ed il terzo le due aste 23, 2′3″; e fra il terzo ed il primo le due aste 13′, 1″3″.

Dalla fig. 12 si deduce facilmente il sistema rigido fig. 34, nel quale i quattro corpi sono le quattro aste 11′, 22′, 33′, 44′: si hanno tre collegamenti tanto fra il primo ed il secondo, che fra il secondo ed il terzo corpo; si hanno invece due soli collegamenti fra il terzo ed il quarto, cioè le aste 34′, 3′4′, ed un solo collegamento, cioè l'asta 41′ fra il quarto ed il primo corpo.

Dalla fig. 16 si deduce il sistema rigido di quarto ordine fig. 35, supponendo che i quattro corpi siano i quattro triangoli 11′1″, 22′2″, 33′3″, 44′4″.

Dalla fig. 18 si deduce il sistema rigido di quinto ordine, fig. 36, supponendo che i cinque corpi siano le cinque aste 11′, 22′, 33′, 44′, 55′. Ecc.

17. Similmente dato un sistema rigido formato da aste, nel quale non ve ne siano di sovrabbondanti, si potrà ridurlo, generalmente in più modi, all'uno od all'altro dei tipi geometrici sopra indicati. Nel dare qui alcuni esempî di tali riduzioni, si sono per la maggior parte preferiti quei sistemi, che s'incontrano nelle costruzioni, come tipi di travi reticolate.

Molte di queste travi sono costituite da una serie di triangoli riuniti per modo, che ogni triangolo ha un lato comune col triangolo immediatamente successivo, un altro lato comune col triangolo che immediatamente precede, ed il terzo lato non

comune con alcun altro triangolo; ad eccezione però del primo e dell'ultimo triangolo della serie, che hanno ognuno due lati non comuni con altri triangoli.

In tale disposizione può avvenire che un nodo sia vertice comune di due, tre, quattro o più triangoli (figure 37, 38, 39, 40 e 41).

Quando nessun nodo è vertice comune a più di quattro triangoli, la trave si può sempre ridurre al tipo della fig. 42, nel quale due corpi immediatamente successivi sono sempre connessi da tre legami. Così nella fig. 37 si possono a tale scopo assumere per corpi le aste 11′, 22′, 33′, ecc. ed il triangolo 66′6″. Nella fig. 38 si possono assumere per corpi i triangoli 11′1″, 22′2″, 33′3″, 44′4″. Nella fig. 39 le aste 11′, 22′, 33′, 44′. Nella fig. 40 le aste 11′, 22′, 33′, 44′ ed il triangolo 55′5″. In tal modo le figure 37, 38, 39 e 40 si riducono tutte al tipo indicato dalla fig. 42.

Che se un nodo sia vertice comune a più di quattro triangoli, il sistema non può più ridursi al semplice tipo della fig. 42; ma bisogna ricorrere ad altri tipi. Così nella fig. 41 si possono considerare come corpi successivi le aste 11′, 22′, 33′, 44′ e 55′, e si troverà facilmente, che il collegamento fra questi corpi ha luogo secondo il tipo della fig. 43, che può in più modi considerarsi come un sistema rigido composto, di secondo ordine, fra cinque corpi.

Il sistema della fig. 44 può ridursi al tipo della fig. 45, considerando come corpi i triangoli 11′1″, 33′3″, 66′6″, e le aste 22′, 44′, 55′. Il tipo fig. 45 può, similmente al 43, considerarsi in più modi di secondo ordine fra sei corpi.

Il sistema della fig. 46 può ridursi al suo tipo geometrico, considerando come corpi i due triangoli 11 1″ e (15) (15)′ (15)″, e tutte le aste verticali 22′, 33′, 44′, ecc. In tal modo si troverà che la fig. 46 si riduce al tipo fig. 47, che è pure un sistema composto, di secondo ordine, fra quindici corpi.

Il sistema della fig. 48 può ridursi, assumendo per corpi le aste 11′, 22′, 33′, ecc. .... (10) (10)′. Si ottiene così il tipo fig. 49, composto, di secondo ordine, con sistemi parziali di terzo. Infatti i tre corpi 1, 2, 3, ed i tre 8, 9, 10 formano due sistemi parziali semplici, di terzo ordine. Considerando ciascuno di questi sistemi, come un solo corpo, la fig. 49 si riduce alla fig. 50. Ora in questa i tre corpi (1, 2, 3), 4, 5, ed i tre (8, 9, 10), 6, 7 formano altri due sistemi parziali di terzo ordine. Considerandoli ciascuno come un solo corpo, si ha la fig. 51, che rappresenta un sistema di secondo ordine.

18. Come si vede da questo esempio un sistema composto, formato da un certo numero di corpi, può ridursi ad un numero minore di corpi, considerando come equivalenti ad un corpo solo i sistemi parziali ch'esso può contenere: e ciò può farsi generalmente in più modi.

Fra queste riduzioni ad un numero minore di corpi, quando sono possibili, merita specialmente di essere considerata quella che può farsi relativamente ad uno dei legami del sistema. Questa riduzione consiste in ciò, che si mantengono separati fra loro i due corpi fra i quali ha luogo il legame che si considera; ma si fanno del resto tutte le riduzioni possibili. Così per es. volendo ridurre il tipo fig. 49 al minimo numero possibile di corpi relativamente al legame che ha luogo fra i due corpi 6 ed 8, si avrà la fig. 52, che rappresenta un sistema di quattro corpi. Una

simile riduzione rispetto al legame fra i corpi 3 e 4, conduce alla fig. 53, che pure rappresenta un sistema di quattro corpi. Se invece la riduzione si fa rispetto al legame che ha luogo fra i corpi 5 e 6, si ha la fig. 51 fra due soli corpi.

Ritornando ora alla fig. 48 si osservi, che se si congiungesse il nodo 4 col nodo 6′ mediante un'asta, il sistema avrebbe un'asta sovrabbondante. La figura infatti contiene 20 punti, per collegare i quali bastano $2 \times 20 - 3 = 37$ aste, e tante sono quelle segnate in figura. Se si aggiungesse l'asta 46′, se ne avrebbero 38, cioè una di troppo.

19. Nel sistema fig. 54 si possono considerare come corpi i due triangoli 11′1″ ed 88′8″, e le aste 22′, 33′, ecc. Si ottiene così il tipo fig. 55, che è un sistema semplice di ottavo ordine. In esso infatti non esiste alcun sistema parziale; come si può dedurre dalla circostanza, che, considerando una combinazione qualunque di m corpi fra gli otto della figura ($m < 8$), si trova che essi sono uniti con un numero di legami sempre inferiore a $3m - 3$, e non possono quindi costituire per sè un sistema rigido (n. 14).

Le diagonali della fig. 54 formano una sola spezzata, che si estende dal nodo 2 al nodo 7′, toccando tutti gli altri nodi.

I sistemi rappresentati dalle figure 56 e 58 si riducono facilmente ai tipi 57 e 59, che dopo gli esempî già dati, riescono chiari senza ulteriori spiegazioni. Le figure 57 e 59 rappresentano sistemi semplici di nono e di undecimo ordine: come facilmente si deduce da una considerazione simile a quella fatta per la fig. 55.

I sistemi fig. 60, 62, 64 si riducono facilmente ai tipi 61, 63, 65, che sono tutti sistemi composti, di secondo ordine; il 61 contiene poi due sistemi parziali di quinto.

I sistemi delle travi Bollman e Fink, fig. 66 e 68, si riducono facilmente ai tipi fig. 67 e 69, di cui il primo è un sistema semplice di settimo ordine, il secondo un sistema composto di terzo.

II. Forze interne nei sistemi rigidi.

20. Si abbia ora uno dei sistemi rigidi sopra considerati, formato da n corpi, uniti insieme mediante curve qualunque; e siano al sistema applicate delle forze esterne, sotto l'azione delle quali esso trovisi equilibrato; sia perchè le forze esterne si equilibrino fra sè, sia perchè il sistema abbia dei punti d'appoggio.

Suppongasi in generale che il sistema abbia subìta una riduzione, cosicchè esso possa considerarsi composto di m corpi, e siano questi numerati progressivamente $1, 2, \ldots, k, \ldots, m$. Alcuni di questi corpi saranno allora sistemi parziali: nel caso che il sistema sia semplice, sarà $m = n$.

Il corpo k avrà in generale un certo numero di punti, obbligati a restare sopra curve invariabilmente connesse con altri corpi; e vi sarà inoltre un altro certo numero di curve, invariabilmente connesse al corpo k, sulle quali dovranno restare costantemente altri punti appartenenti ad altri corpi. Ora quando un punto appartenente ad un corpo deve trovarsi sopra una curva invariabilmente connessa con un altro, ha luogo in generale, sotto l'azione delle forze esterne, un'azione reciproca dei due corpi

l'uno sull'altro, azione passante per il punto in questione e diretta secondo la normale alla curva; qualora, come qui intendiamo di fare, si prescinda affatto dalla resistenza d'attrito. Se quest'azione, considerata come forza applicata all'un corpo, ha il valore N, essa avrà il valore $-$N, considerata come forza applicata all'altro corpo.

Suppongasi ora primieramente che il sistema sia libero: in tal caso ognuno dei corpi del sistema sarà in equilibrio per sè, sotto l'azione di quelle fra le forze esterne che sono ad esso applicate, e sotto l'azione delle forze N, che derivano da quei corpi con cui esso è collegato.

Per esprimere questo equilibrio con notazioni algebriche, siano $R^{(1)}_k, R^{(2)}_k, \ldots$ quelle fra le forze esterne del sistema, che sono applicate al corpo k; ed $N^{(1)}_k, N^{(2)}_k, \ldots$ le azioni degli altri corpi sul corpo k, derivanti dai legami. Siano inoltre rispetto ad un sistema d'assi ortogonale X_k, Y_k le componenti di R_k; P_k, Q_k le componenti di N_k; e finalmente M_k, L_k i momenti delle R_k, N_k rispettivamente, riferiti all'origine degli assi.

L'equilibrio del corpo k sarà espresso dalla coesistenza delle tre equazioni

$$\text{A)}\left\{\begin{array}{ll} 1. & \Sigma X_k + \Sigma P_k = 0 \\ 2. & \Sigma Y_k + \Sigma Q_k = 0 \\ 3. & \Sigma M_k + \Sigma L_k = 0 \end{array}\right.$$

I corpi essendo m di numero, si avranno in tutto $3m$ equazioni. Esse però non sono tutte fra loro indipendenti. Infatti siccome nel sistema degli m corpi esistono contemporaneamente gli N ed i $-$N, così vi esistono pure contemporaneamente i P ed i $-$P, i Q ed i $-$Q, gli L ed i $-$L. Se dunque nella 1. si fa $k = 1, 2, \ldots, m$, e si somma il sistema d'equazioni che ne risultano, e si procede similmente colla 2. e colla 3., si otterranno le note equazioni fra le forze esterne

$$\text{B)}\left\{\begin{array}{l} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{array}\right.$$

nelle quali la ΣX rappresenta la somma di tutte le X, che derivano dalle forze esterne applicate al sistema; e similmente le ΣY, ΣM.

21. Volendo utilizzare le A) per trovare i valori delle P, Q, L, si osservi che il numero delle curve del sistema è $3m - 3$ (n. 14); e siccome da ogni curva deriva una forza N, così le quantità P, Q, L contenute nelle A) sono $3(3m - 3)$ di numero; mentre le A) non istabiliscono fra queste quantità, che $3m - 3$ equazioni, attese le B). Occorrono adunque altre $2(3m - 3)$ equazioni per poter determinare le P, Q, Queste si trovano facilmente osservando che le P, Q, L sono inoltre collegate fra loro come segue. Dette a e b le coordinate del punto d'applicazione della N, e t la tangente dell'angolo che la N fa con le x positive, sarà

$$\text{C)}\left\{\begin{array}{l} Q - tP = 0 \\ L - bP + aQ = 0 \end{array}\right.$$

Applicando queste equazioni alle P, Q, L di tutto il sistema, si avranno $2(3m - 3)$ equazioni, che unite alle $3m - 3$ contenute nelle A), danno un totale di $3(3m - 3)$

equazioni fra le $3(3m-3)$ quantità P, Q, L, e possono servire a determinarle.

Siccome poi fra le N, P, Q, L esistono sempre le relazioni

$$\text{D)}\left\{\begin{array}{l} P=\alpha N \\ Q=\beta N \\ L=\gamma N \end{array}\right.$$

così, trovati i valori delle P, Q, L, si possono avere quelli delle N mediante le D).

Più direttamente si hanno i valori delle N, sostituendo nelle A) i valori delle P, Q, L dati dalle D). Le A) stabiliranno allora fra le $3m-3$ incognite N un sistema di $3m$ equazioni, che però, attese le B), si riducono a $3m-3$.

22. Quanto alla natura di queste ultime equazioni, contenenti le incognite N, si osservi in primo luogo, che rispetto alle incognite stesse, esse sono lineari. In secondo luogo le quantità ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k vi figurano linearmente, e non sono comprese, neppure implicitamente, nei coefficienti α, β, γ. Infatti i punti d'applicazione e le direzioni delle N dipendono dalla forma del sistema rigido dato e delle curve di collegamento dei suoi corpi, e non già dalle forze esterne, le quali, se variassero, potrebbero far mutare l'intensità delle N, ma non le loro direzioni, nè i punti per cui passano. In altre parole le quantità α, β, γ, che figurano nelle D) sono indipendenti dalle R, e dipendono unicamente dalle quantità t, a, b, considerate nelle C), e di cui sono funzioni.

Ritenute dunque $3m-3$ equazioni del sistema A), opportunamente scelte, e portate nei secondi membri le ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, i primi membri costituiranno un sistema di forme lineari, ed il valore di ogni incognita N, sarà dato dal rapporto D: T fra due determinanti, dei quali T non conterrà le ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, e D le conterrà linearmente in una sola colonna. Ora siccome ogni determinante è una funzione lineare degli elementi d'una sua colonna, ne viene che il determinante D, e quindi ciascuna delle incognite N sono funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k; e tali, in forza delle D), sono pure le P, Q, L.

23. Se il sistema rigido dato non è libero, allora alle R bisognerà aggiungere le reazioni dei punti d'appoggio. In tal caso le N, P, Q, L diventeranno dunque funzioni lineari non solo delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, sopra contemplate, e le quali provengono immediatamente dalle forze esterne; ma anche di quelle X, Y, M, che provengono dalle reazioni dei punti d'appoggio. Cerchiamo ora qual è il valore di queste X, Y, M.

Siano A_1, A_2, A_3, ... i punti d'appoggio, e per distinzione dalle X_k, Y_k, M_k, indichiamo con X_a, Y_a, M_a le incognite cercate. Supponendo sempre che sussista l'equilibrio, queste incognite potranno determinarsi mediante le B); purchè nei primi membri alle ΣX, ΣY, ΣM s'intendano aggiunte le X_a, Y_a, M_a, e purchè tale determinazione si possa far dipendere da tre sole incognite, il cui valore possa esser dato dalle tre equazioni B). Quest'ultima condizione si verifica sempre, quando il sistema abbia non più di tre punti A, obbligati a stare sopra altrettante curve, fisse rispetto agli assi. Siano in questo caso le reazioni di queste curve espresse da F_1, F_2, F_3: queste F saranno dirette secondo le normali alle curve, e le X_a, Y_a, M_a saranno funzioni delle F. Espresse dunque le X_a, Y_a, M_a mediante le F, con equazioni

analoghe alle D), e sostituiti i loro valori nelle B), se ne dedurranno i valori delle F, e mediante questi si avranno i valori delle X_a, Y_a, M_a, da aggiungere a quelli delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k per avere i valori delle N, nel caso ora contemplato che vi siano dei punti d'appoggio.

Ma le X_a, Y_a, M_a sono funzioni lineari delle F, ed entrano nelle B) pure linearmente. Quando dunque nelle B) si sostituiscono i valori delle X_a, Y_a, M_a, espressi mediante le F, le B) diventano equazioni lineari rispetto alle incognite F. E siccome le B) d'altra parte sono funzioni lineari delle ΣX, ΣY, ΣM, e queste non entrano nei coefficienti delle F, così tanto i valori delle F, come i valori delle X_a, Y_a, M_a, sono funzioni lineari delle ΣX, ΣY, ΣM.

Ora siccome le N, P, Q, L sono, nel caso che esistano punti d'appoggio, funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k e delle X_a, Y_a, M_a, come sopra si è osservato, così sostituendo alle X_a, Y_a, M_a i loro valori espressi per ΣX, ΣY, ΣM, si otterranno le N, P, Q, L, come funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, e delle ΣX, ΣY, ΣM. Ma queste ultime sono evidentemente funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, dunque si può dire:

« Quando il sistema rigido in equilibrio sia affatto libero, od abbia non più di tre punti obbligati a restare sopra altrettante curve fisse rispetto agli assi, tanto le F, come le N, P, Q, L sono sempre funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k ».

24. Se esistono sistemi parziali, cioè se $m < n$, le azioni reciproche fra i corpi del sistema parziale sono funzioni lineari delle X, Y, M derivanti dalle forze esterne. Infatti le azioni reciproche dei corpi componenti il sistema parziale, sono, per ciò che precede, funzioni lineari delle X, Y, M, relative ad essi corpi e provenienti dalle forze esterne, ed inoltre delle P, Q, L provenienti dai legami del sistema parziale cogli altri corpi. Ma quest'ultime sono funzioni lineari delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k, come sopra si è detto; dunque le azioni reciproche dei corpi componenti il sistema parziale sono funzioni lineari delle X, Y, M suddette, e delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k; ma queste ultime alla lor volta sono funzioni lineari delle X, Y, M relative a tutto il sistema, dunque può dirsi che le azioni reciproche dei corpi componenti il sistema parziale sono funzioni delle X, Y, M relative a tutto il sistema.

25. Se le curve sono circolari, ed il collegamento sia fatto mediante aste (n. 15), ogni asta coincide colla direzione della N rispettiva, e sopporterà quindi uno sforzo longitudinale eguale ad N, cioè lo sforzo longitudinale sopportato dall'asta sarà una funzione lineare delle ΣX_k, ΣY_k, ΣM_k derivanti dalle forze esterne. Che se inoltre i corpi del sistema sono costituiti da aste o da triangoli snodati ai vertici (n. 16), anche gli sforzi sopportati da tali aste, o dai lati di tali triangoli saranno funzioni lineari delle X, Y, M; come è facile dimostrare dopo ciò che nel numero precedente si è detto dei sistemi parziali.

Per un sistema rigido nel piano, composto di aste unite a snodatura, e mancante di aste sovrabbondanti, si ha dunque la proposizione seguente:

« Se un tale sistema sia in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, tanto le reazioni dei punti d'appoggio, se ve ne sono, come gli sforzi longitudinali sopportati dalle aste, sono funzioni lineari delle X, Y, M, provenienti dalle forze esterne ».

26. Anche le curve, che servono a stabilire gli appoggi del sistema possono essere circolari; ed allora la condizione che un punto A del sistema debba trovarsi

sopra una tale curva, può intendersi realizzata mediante un'asta fissata a snodatura con un estremo al punto A in questione, coll'altro al centro del circolo. Per gli sforzi longitudinali sopportati da questa asta, vale allora ciò che sopra si è detto delle reazioni sui punti d'appoggio. Che se per realizzare la suddetta condizione invece di una semplice asta, si prende un secondo sistema rigido, composto di aste, e si fissa un suo punto a snodatura sul punto A del primo sistema, ed un altro punto al centro del circolo; in tal caso, come è facile dimostrare, lo sforzo sopportato da ogni asta del secondo sistema, sarà sempre in generale una funzione lineare delle X, Y, M provenienti dalle forze applicate al primo sistema. Fra i casi particolari, a cui conduce la supposizione che il sistema abbia tre punti obbligati a restare sopra tre curve rispettivamente, vi è quello che due di quei punti coincidano, nel qual caso si ha un punto fisso, intorno al quale il sistema può girare.

27. Le relazioni sopra trovate fra le forze esterne, gli sforzi sopportati dai punti d'appoggio e le azioni reciproche dei corpi del sistema, sono fondamentali per le ulteriori ricerche, e la loro semplicità rende facile lo studio delle leggi, secondo le quali al variare delle forze esterne variano le reazioni sugli appoggi e le azioni reciproche dei corpi, ossia le forze interne del sistema. In causa di una tale semplicità si può inoltre arrivare per gli ordinarî casi della pratica a facili costruzioni grafiche, che permettono di determinare con breve procedimento tanto le reazioni sugli appoggi, quanto gli sforzi delle aste ed i loro valori massimi o minimi.

Fra i tanti modi, nei quali si possono supporre variabili le forze esterne giova qui limitarsi a due soli, in vista dello scopo del presente scritto. Si supponga in primo luogo, che mantenendo fisso rispetto agli assi il sistema degli n corpi, tutto il sistema delle forze R, che lo sollecitano, si trasporti parallelo a se stesso in una data direzione rettilinea; cosicchè ognuna delle forze R, senza cambiare d'intensità e di senso, nè di posizione rispetto alle altre forze, si trasporti parallela a se stessa. Si domanda qual sia in questo caso la legge con cui varia l'azione reciproca N fra due corpi qualunque del sistema, e quella con cui variano le reazioni sugli appoggi.

Per valutare la traslazione del sistema di forze si prenda sopra una linea retta AB, tirata nella direzione del movimento, un punto A fisso rispetto agli assi (fig. 70); e s'immagini poi un punto O, invariabilmente connesso col sistema delle forze e collocato sulla AB. La distanza variabile $AO = u$ può servire a valutare la traslazione del sistema, durante la quale i punti d'intersezione delle forze colla AB determinano su di essa altrettante punteggiate eguali a quella determinata dal punto O.

Affine di avere l'espressione più semplice della N, s'immagini anzitutto ridotto il sistema al minor numero possibile di corpi rispetto a quel legame, da cui proviene l'azione N (n. 18). Fatta la riduzione, si notino i corpi coi numeri progressivi $1, 2, \ldots, m$. Per una data posizione iniziale delle forze R si avrà dunque, per ciò che sopra si è detto,

$$N = A' \Sigma X_1 + A'' \Sigma X_2 + \text{ecc.} \ldots + B' \Sigma Y_1 + B'' \Sigma Y_2 + \text{ecc.} \ldots + C' \Sigma M_1 + C'' \Sigma M_2 + \text{ecc.}$$

Se ora il sistema delle forze si muove nel modo indicato, possono supporsi due casi:

a) che tutte le forze restino applicate a quei medesimi corpi del sistema, a cui erano applicate nello stato iniziale, variando solo il loro punto d'applicazione;

b) che il punto d'applicazione di una o più forze passi, durante la traslazione, da uno ad un altro dei corpi del sistema, o che una o più forze cessino affatto d'essere applicate al sistema.

Nel primo caso i valori delle ΣX_1, ΣX_2, ... e delle ΣY_1, ΣY_2, ... restano evidentemente inalterati, ed i valori delle ΣM_1, ΣM_2, ... diventano funzioni lineari della u. Infatti, restando inalterata l'intensità ed il senso delle forze, il momento d'ogni forza R (fig. 70) varia in proporzione della normale OQ, calata dall'origine delle coordinate sulla direzione della R. Ora siccome la R si trasporta parallela a se stessa, essa determina nella OQ una punteggiata simile a quella da essa determinata nella AB, ossia simile alla punteggiata generata dal punto O. Perciò le normali calate dall'origine delle coordinate sulle direzioni delle forze, e quindi i momenti di queste, sono funzioni lineari di u.

Il valore sopra dato di N si trasforma quindi in questo caso in una funzione lineare di u.

Un simile risultato si sarebbe evidentemente ottenuto, prendendo a considerare le reazioni F sugli appoggi, le quali sono funzioni lineari delle ΣX, ΣY, ΣM relative a tutto il sistema; per lo che si potrà porre

$$F = D' \Sigma X + E' \Sigma Y + G' \Sigma M$$

Riassumendo si avrà adunque la seguente proposizione:

« Se le forze sollecitanti il sistema sono dotate di traslazione rettilinea, durante la quale mantengono inalterata la loro posizione relativa e restano applicate ai medesimi corpi rispettivamente, tanto una reazione qualunque sugli appoggi, quanto l'azione reciproca di due corpi qualunque, è rappresentabile dalle ordinate di una linea retta ».

Se il sistema è composto di aste, la proposizione vale naturalmente per gli sforzi longitudinali sopportati da un'asta qualunque del sistema.

28. Per rappresentare la reazione d'un appoggio, oppure l'azione fra due corpi qualunque (o lo sforzo sopportato da un'asta, qualora il sistema sia composto da aste), si possono prendere come ascisse sopra una retta qualunque AB (fig. 71) i valori delle u, e portarvi normalmente i valori della F, o della N che si considera: si avrà allora una retta SS, che rappresenterà la legge con cui varia la F, o la N considerata.

Ora siccome AB ed SS hanno sempre un solo punto d'intersezione, così si avrà la proposizione:

« Vi è sempre una sola posizione del sistema di forze, per la quale una data reazione sugli appoggi, od una data azione qualunque fra due corpi, si annulla ».

29. Nel secondo caso, siano u_1, u_2, ..., u_q, u_{q+1}, ... i successivi valori di u, per i quali l'una o l'altra delle forze R cessa di essere applicata ad un corpo per essere applicata ad un altro. Finchè la posizione del sistema di forze si mantiene tale, che il valore di u resta compreso fra due dei valori superiori, immediatamente successivi, finchè sia, cioè, $u_q < u < u_{q+1}$, varrà senz'altro la conclusione del caso precedente, cioè tanto una F, quanto una N qualunque sarà rappresentabile dalle ordinate d'una retta.

Ma se si prendono due valori della u, dei quali uno immediatamente preceda, l'altro immediatamente segua il valore u_q, e si confrontino fra loro i due valori di N corrispondenti a questi due valori della u, si vedrà che per $u = u_q$ ha luogo in generale discontinuità nel valore di N. Siano infatti k e k' i due corpi fra i quali ha luogo il passaggio del punto d'applicazione della forza R per il valore $u = u_q$. Le due somme ΣX_k, $\Sigma X_{k'}$, che entrano nel valore di N, cambiano bruscamente di valore per $u = u_q$, mentre la prima perde e la seconda guadagna bruscamente quella X, che proviene dalla forza R. Lo stesso dicasi delle due somme ΣY_k, $\Sigma Y_{k'}$ e delle due ΣM_k, $\Sigma M_{k'}$. Ora siccome i coefficienti $A^{(k)}$, $A^{(k')}$ sono in generale fra loro diversi, e così pure i coefficienti $B^{(k)}$, $B^{(k')}$ ed i $C^{(k)}$, $C^{(k')}$, ne viene che per $u = u_q$ il valore di N è discontinuo. Alla stessa conclusione si arriverebbe, supponendo, che per $u = u_q$ l'una o l'altra delle forze R cessasse bruscamante d'essere applicata al sistema.

Venendo ora alle reazioni sugli appoggi, queste sono funzioni lineari di ΣX, ΣY, ΣM, e di queste quantità le due prime, finchè tutte le forze restano applicate al sistema, restano inalterate durante la traslazione; mentre la ΣM è una funzione lineare continua di u. Infatti l'essere una forza applicata piuttosto ad un corpo che ad un altro è una circostanza che resta affatto senza influenza sul valore di ΣM. Che se per il valore u_q l'una o l'altra delle forze cessi affatto d'essere applicata al sistema, si troverà con simile ragionamento, che in tal caso anche il valore di F diventa discontinuo per $u = u_q$.

Per questo secondo caso potrà adunque dirsi:

« Se le forze sollecitanti il sistema sono tutte dotate della stessa traslazione rettilinea, ed una od alcune di esse cambiano punto d'applicazione da un corpo all'altro durante il moto, o cessano d'essere applicate al sistema, allora l'azione reciproca N fra due corpi qualunque è rappresentabile da tronchi di rette, separati gli uni dagli altri per tutti quei punti, per i quali una forza cambia punto d'applicazione da un corpo all'altro, o cessa di agire sul sistema (fig. 72) ».

« Le reazioni F invece diventano discontinue solamente, quando l'una o l'altra forza cessi d'essere applicata al sistema ».

Il cambiamento nel punto d'applicazione da un corpo all'altro del sistema, cambiamento che determina la discontinuità della N, s'intende naturalmente riferito ai corpi del sistema ridotto, di quel sistema cioè che si ottiene col ridurre il primitivo al minor numero possibile di corpi rispetto a quel legame che si considera (n. 18, 20).

30. Si faccia ora una seconda supposizione relativa alla variabilità delle forze esterne. Ritenuto lo stesso sistema di forze R, e la sua traslocazione rettilinea nel senso della AB, come sopra, si supponga che le forze R non siano direttamente applicate ai corpi del sistema, ma ogni forza R_μ si decomponga prima in due R'_μ, R''_μ, parallele alla R_μ, e queste si applichino poi a due punti E'_μ, E''_μ, di cui almeno uno appartenga al sistema degli n corpi. Si supponga poi che mentre le R si muovono parallele a se stesse, i punti E restino fissi rispetto agli assi.

Siccome in questo caso ogni forza R_μ mantiene la propria intensità ed il proprio senso, e cambia solamente di posizione rispetto agli assi, così le R'_μ, R''_μ, obbligate a passare per i punti fissi E'_μ, E''_μ varieranno d'intensità. Se K, K', K'' sono i punti in cui le R_μ, R'_μ, R''_μ tagliano rispettivamente la AB, si avrà $R_\mu : R'_\mu : R''_\mu = K'K'' : KK'' : KK'$, dove $K'K''$ è costante e le KK'', KK' sono funzioni lineari di u. Ne viene

che R'_μ ed R''_μ sono anch'esse funzioni lineari di u, e tali quindi saranno pure le loro componenti rispetto agli assi ed i loro momenti. Per cui tutte le X, Y, M del sistema saranno in questo caso funzioni lineari della variabile u. Quindi, attese le superiori espressioni di N e di F (n. 27), anche queste quantità saranno funzioni lineari della u. Si avrà dunque la seguente proposizione:

« Se le forze sollecitanti il sistema sono tutte dotate della stessa traslazione rettilinea, ed ogni forza sia decomposta in due parallele, applicate a due punti fissi, di cui almeno uno appartenga al sistema degli n corpi; in tal caso tanto una reazione qualunque sugli appoggi, quanto l'azione fra due corpi qualunque è rappresentabile dalle ordinate d'una linea retta ».

31. Suppongasi ora che il cammino percorso dal punto O (n. 27) sia suddiviso in intervalli, e che i punti E'_μ, E''_μ, relativi alla forza R_μ restino inalterati, finchè O si trova entro uno di quegli intervalli; ma cambino bruscamente di posizione, quando O passa da un intervallo al seguente. Per tutta generalità supporremo, che, cambiando bruscamente di posizione, i punti E possano non solo passare dall'uno all'altro dei corpi costituenti il sistema rigido; ma possano anche cessare affatto dall'appartenere al sistema. Se in tal caso si ricerca qual sia l'andamento dei valori di N e di F, mentre O, col crescere progressivo di u, percorre successivamente i diversi intervalli, si troverà facilmente, ricorrendo alle superiori espressioni di N e di F, che la N è in generale discontinua per tutti i valori u_1, u_2, ... di u, che corrispondono ai limiti fra un intervallo e l'altro; mentre il valore di F diventa discontinuo solamente per quei valori di u, per i quali qualcuno dei punti E cessa bruscamente di appartenere al sistema rigido.

Finchè u resta compreso entro uno stesso intervallo, tanto la N che la F sono rappresentabili dalle ordinate d'una linea retta. L'andamento totale tanto della N che della F potrà dunque indicarsi con una figura analoga alla 72, nella quale ad ogni ascissa limite u_q corrispondono in generale due diverse ordinate.

32. Può avvenire però, come caso particolare, che le due ordinate corrispondenti ad ogni ascissa limite u_1, u_2, ... siano fra loro eguali, nel qual caso i successivi tronchi rettilinei, indicati nella fig. 72, formeranno una spezzata non interrotta (fig. 74). Un tale caso particolare sarebbe il seguente.

Suppongasi che una delle forze esterne, per es. la R_μ, durante il moto di traslazione, prenda successivamente le posizioni r', r'', r''', ecc. (fig. 73), le quali corrispondano ai valori u_1, u_2, u_3, ...; e siano E'_μ, E''_μ, E'''_μ, ... altrettanti punti, collocati rispettivamente sulle r', r'', r''', ..., ed appartenenti, tutti od in parte, al sistema degli n corpi. Suppongasi poi, che per valori di u compresi fra u_1 ed u_2 le R'_μ, R''_μ siano applicate ai punti E'_μ, E''_μ rispettivamente: per valori di u compresi fra u_2 ed u_3 le R'_μ, R''_μ siano applicate ai punti E''_μ, E'''_μ rispettivamente: ecc. Analoghe supposizioni si facciano per le altre forze esterne R.

In tal caso le funzioni lineari di u, esprimenti i valori delle ΣX_1, ΣX_2, ..., ΣY_1, ΣY_2, ..., ΣM_1, ΣM_2, restano inalterate, sebbene O passi da un intervallo all'altro, finchè R'_μ, R''_μ, sebbene cambino punto di applicazione, agiscono però sempre sopra un medesimo corpo del sistema. Che se per un valore limite u_q una delle R'_μ, R''_μ passa da un corpo all'altro o cessa di agire sul sistema, in tal caso quelle funzioni

vengono alterate. È però facile dimostrare, che i valori di quelle funzioni corrispondenti ad una u, la quale preceda immediatamente u_q, differiscono infinitamente poco da quelli corrispondenti ad una u, la quale segua immediatamente u_q. Le $\Sigma X_1, \Sigma X_2, \ldots$ non cambiano dunque bruscamente di valore per $u = u_q$. Ne viene che neppure i valori di N, che ne dipendono cambieranno bruscamente di valore per $u = u_q$: questi valori saranno dunque in generale rappresentati dalle ordinate d'una spezzata (fig. 74), la quale avrà i suoi vertici in corrispondenza di quelli fra i valori limiti di u, per i quali il punto d'applicazione d'una R'_μ od R''_μ qualunque, passi da un corpo all'altro del sistema, o cessi affatto d'appartenere al sistema stesso.

Quanto ai valori di F, essi dipendono unicamente da ΣX, ΣY, ΣM, e quindi saranno rappresentati da una spezzata simile alla superiore solo nel caso, che vi siano intervalli di u, per i quali l'uno o l'altro dei punti E non appartenga al sistema degli n corpi, altrimenti la F sarà rappresentata da una semplice retta.

Ricorderemo intanto che in questa discussione si suppone sempre, che il sistema degli n corpi sia stato ridotto al minor numero possibile rispetto a quella curva, da cui dipende la N che si considera (n. 18).

Le conchiusioni, a cui si giunse colla discussione del caso particolare ora sviluppato, sono immediatamente applicabili alle travi reticolari dei ponti. Per queste travi le forze R sono i pesi delle ruote dei veicoli, i punti E sono quelli a cui sono fissate le travi trasversali. Varrà dunque per le travi principali del ponte la seguente proposizione:

« Durante il passaggio d'uno o più veicoli, le cui ruote conservino le loro rispettive distanze, gli sforzi sopportati da un'asta qualunque, o dai punti d'appoggio, sono rappresentabili dalle ordinate d'una spezzata ».

33. Ogni forza R, che sollecita il sistema rigido, dà luogo a due componenti X ed Y e ad un momento M (n. 20). Fra queste quantità avranno luogo delle relazioni analoghe alle D) (n. 21), cioè le X, Y, M saranno eguali alla R moltiplicata per determinati coefficienti, che si manterranno inalterati, qualora la R non cambii nè direzione, nè punto di applicazione, ma varii solamente d'intensità. Se ora nelle espressioni di N ed F (n. 27), si sostituiscono a tutte le X, Y, M i loro valori espressi per le rispettive R, tanto il valore di N, che quello di F, si trasformano in funzioni lineari delle R. Ne viene che tanto gli sforzi sopportati dalle aste, che le reazioni dei punti d'appoggio sono funzioni lineari delle forze R, e potranno esprimersi con $N = \Sigma \delta_\mu R_\mu$, $F = \Sigma \varepsilon_\mu R_\mu$, dove i coefficienti δ_μ, ε_μ restano inalterati, finchè le forze mantengono inalterata la loro direzione, ed il loro punto d'applicazione.

Questa proprietà degli sforzi N ed F può del resto dedursi direttamente dalla considerazione, che ognuno di quegli sforzi non può essere che la somma algebrica dei singoli sforzi causati dalle singole forze; e che ogni singolo sforzo è necessariamente proporzionale direttamente alla forza che lo produce, qualora si supponga che tale forza varii bensì d'intensità, ma non cambii nè di direzione, nè di punto d'applicazione.

Se la forza è una sola, e si prenda l'asse delle x parallelo alla sua direzione, allora, detta X la forza, si avrà $N = \delta X$, $F = \varepsilon X$. E se inoltre il sistema rigido abbia tre punti obbligati a restare su tre curve fisse, dette F_1, F_2, F_3 le reazioni di queste curve, si potrà porre, analogamente alla D) del n. 21,

$$X_1 = \alpha_1 F_1 \qquad X_2 = \alpha_2 F_2 \qquad X_3 = \alpha_3 F_3$$
$$Y_1 = \beta_1 F_1 \qquad Y_2 = \beta_2 F_2 \qquad Y_3 = \beta_3 F_3$$
$$M_1 = \gamma_1 F_1 \qquad M_2 = \gamma_2 F_2 \qquad M_3 = \gamma_3 F_3$$

per cui le equazioni B) del n. 20 diverranno

$$X + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 = 0$$
$$\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \beta_3 F_3 = 0$$
$$M + \gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \gamma_3 F_3 = 0.$$

Posto quindi

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

si avrà

$$F_1 = -\begin{vmatrix} X & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ M & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} : T, \text{ ecc.}$$

Se si prende l'origine degli assi nella direzione della forza X, si ha dunque

$$F_1 = -\frac{X}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha_1}, \quad F_2 = -\frac{X}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha_2}, \quad F_3 = -\frac{X}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha_3},$$

e quindi
$$F_1 : F_2 : F_3 = \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial T}{\partial \alpha_3}.$$

Se invece si indicano con O_1, O_2, O_3 i punti d'incontro della F_2 colla F_3, della F_3 colla F_1 e della F_1 colla F_2, e si ponga l'origine successivamente nei tre punti O_1, O_2 ed O_3 si avrà

$$F_1 = -\frac{M_1}{T_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial \gamma_1}, \quad F_2 = -\frac{M_2}{T_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial \gamma_2}, \quad F_3 = -\frac{M_3}{T_3} \cdot \frac{\partial T}{\partial \gamma_3}$$

dove M_1, M_2, M_3; T_1, T_2, T_3 sono i valori assunti da M e da T in quei tre punti. Ma in questo caso si ha

$$T_1 = \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial \gamma_1}, \quad T_2 = \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial \gamma_2}, \quad T_3 = \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial \gamma_3},$$

dunque
$$F_1 = -\frac{M_1}{\gamma_1}, \quad F_2 = -\frac{M_2}{\gamma_2}, \quad F_3 = -\frac{M_3}{\gamma_3}$$

nelle quali equazioni le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ indicano le tre altezze del triangolo $O_1 O_2 O_3$. Se dunque si dicono q_1, q_2, q_3 le tre normali calate dai vertici del detto triangolo sulla direzione della X, si avrà $M_1 = q_1 X$, $M_2 = q_2 X$, $M_3 = q_3 X$, e quindi

$$F_1 \gamma_1 + X q_1 = 0, \quad F_2 \gamma_2 + X q_2 = 0, \quad F_3 \gamma_3 + X q_3 = 0,$$

come facilmente si può dimostrare anche direttamente.

III. Travi triangolari.

A. *Nozioni geometriche.*

34. Nella denominazione di *travi triangolari* si comprendono nel presente scritto tutti quei sistemi, che risultano da una serie di triangoli riuniti nel modo indicato al n. 17.

Ogni triangolo della serie, in una trave PQ (fig. 75), per es. il triangolo ABC, ha per lo meno un lato BC non comune ad alcun altro triangolo. Se questo lato si sopprime, la trave si decompone, per così dire, in due parti per sè rigide, la PAB e la QAC, le quali restano unite a snodatura nel punto A.

Se invece di sopprimere il lato BC, si sopprime un lato il quale sia comune ad un altro triangolo della serie, per es. il lato AB (fig. 76 e 77), che è comune al triangolo ABD, allora sono da distinguersi due casi, secondochè, cioè, nel triangolo ABD sia il lato BD (fig. 76), oppure AD (fig. 77) quello, che non è comune ad alcun altro triangolo della serie. Nel primo caso colla soppressione del lato AB la trave si decompone ancora in due parti per sè rigide, PAD e QAC, unite a snodatura in A; nel secondo invece le due parti rigide PDB e QAC, in cui si decompone la trave, restano collegate dalle due aste AD e BC, costituendo con quelle aste un quadrilatero deformabile.

Il primo e l'ultimo triangolo della serie hanno ciascuno due lati non comuni con altri triangoli. Sopprimendo uno di questi due lati per es. AB (fig. 78), la trave si decompone nella parte rigida QBC e nell'asta AC, le quali restano unite a snodatura in C, e costituiscono le due parti rigide, in cui si decompone la trave per la soppressione dell'asta AB. Se invece si sopprime il lato che è comune al secondo (o penultimo) triangolo della serie, per es. il lato BC, allora la trave si decompone nella parte rigida QDC, e nell'asta AB, le quali parti restano unite mediante le due aste AC e DB, e costituiscono, come nel caso generale, le due parti rigide, in cui si decompone la trave.

Quando sopprimendo un'asta, le due parti rigide in cui si decompone la trave, restano unite a snodatura in un punto, noi chiameremo un tal punto *centro di rotazione relativo a quell'asta*, o semplicemente *centro dell'asta*, quando la chiarezza non ne soffra. Qualora, sopprimendo un'asta, le due parti rigide restano unite da due aste, colle quali esse formano un quadrilatero deformabile, intenderemo prolungate queste due aste fino al loro punto d'incontro, e questo punto d'incontro sarà pure detto centro di rotazione relativo all'asta soppressa.

In tal modo per ogni asta di una trave triangolare vi sono sempre due parti rigide ad essa relative, quelle cioè in cui la trave si decompone, quando l'asta si sopprime; e per ogni asta vi è pure un centro che le è relativo.

35. Se le forze che sollecitano la trave sono tutte parallele fra loro, come quando essa è caricata da pesi, in tal caso la trave può essere semplicemente appoggiata su due punti, in modo che le reazioni dei punti d'appoggio siano parallele alle forze sollecitanti. Confrontando questo modo di appoggiare la trave col caso generale (n. 23), si vede che qui si hanno due soli punti, e che le due curve su cui essi devono trovarsi sono due rette normali alla direzione delle forze. Supponendo che le forze siano pesi, le reazioni degli appoggi saranno verticali.

Se invece la trave ha un punto fisso, intorno al quale possa muoversi a cerniera, ed un altro punto obbligato a restare sopra una curva circolare, come per es. avviene nei ponti ad arco snodati, allora sebbene le forze sollecitanti siano parallele (verticali), le reazioni saranno obblique.

36. Si consideri ora una trave semplicemente appoggiata a due punti, e sollecitata

da una sola forza (peso) P, che si trasporti parallela a se stessa. Si supponga che questo peso non sia immediatamente applicato alla trave, ma sia sostenuto da travi semplici $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ... (fig. 79), disposte l'una in seguito all'altra, e semplicemente appoggiate ai sostegni verticali e_1, e_2, e_3, ...; e che questi ultimi finalmente trasmettano l'azione della forza P ai punti E_1, E_2, ..., E_n. Di questi punti il primo e l'ultimo potranno non appartenere alla trave; degli altri supporremo che siano nodi qualunque della trave. Anche i punti A e B d'appoggio supponiamo esser nodi della trave.

Ciò premesso, si considerino ora i due punti d'appoggio A e B ed i punti E in relazione a quelle due parti rigide, in cui si decompone sempre una trave triangolare, quando si sopprime un'asta (n. 34). Quanto ai punti d'appoggio, data l'asta e determinate le due parti rigide che le corrispondono, può avvenire che uno dei due punti d'appoggio, per es. A, appartenga all'una delle due parti rigide, e l'altro punto d'appoggio (B) all'altra parte: oppure che ambedue i punti d'appoggio A e B appartengano alla medesima parte rigida. Quanto ai punti E, prescindendo dai due estremi E_1 ed E_n, che possono non appartenere alla trave, gli altri potranno generalmente suddividersi in due gruppi, comprendendo in un gruppo quelli che appartengono all'una, e nell'altro quelli che appartengono all'altra delle due parti rigide relative ad una data asta. Si avranno allora per es. i punti E_2, E_3, ..., E_r appartenenti alla prima parte rigida, ed i seguenti E_{r+1}, E_{r+2}, ..., E_{n-1}, appartenenti alla seconda parte.

Se però le due parti rigide fossero unite a snodatura, come quelle che competono all'asta BC (fig. 75), e che nel nodo A comune alle due parti cadesse uno dei punti E, per es. E_λ, allora questo punto E_λ può riguardarsi come comune alle due parti rigide. I punti precedenti invece E_2, ..., $E_{\lambda-1}$ apparterrebbero esclusivamente alla prima parte rigida, i seguenti $E_{\lambda+1}$, ..., E_{n-1} esclusivamente alla seconda.

Avuto riguardo a ciò che in seguito si esporrà, meritano attenzione speciale i punti E_r ed E_{r+1}, sopra indicati, cioè l'ultimo appartenente alla prima parte rigida, ed il primo appartenente alla seconda; come pure il punto comune E_λ. Questi punti E_r, E_{r+1}, E_λ saranno quindi detti in seguito *punti di passaggio*.

37. Come casi speciali di quelli ora considerati, sono da rilevarsi i seguenti:

Che una delle due parti rigide manchi affatto di punti E; nel qual caso, invece di due punti di passaggio E_r, E_{r+1}, ve ne sarà uno solo;

Che ad una delle due parti rigide non appartengano altri punti E, che il punto comune E_λ;

Che i due gruppi in cui si suddividono i punti E non costituiscano due serie di punti immediatamente successivi, come i due gruppi E_2, E_3, ..., E_r ed E_{r+1}, E_{r+2}, ..., E_{n-1}, sopra indicati, ma che vi siano trasposizioni da una serie all'altra. Tale sarebbe per es. il caso, in cui nella serie ordinata E_2, E_3, ..., E_{n-1} di punti ve ne fossero quattro successivi E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, E_{r+3}, dei quali i due E_r, E_{r+2} appartenessero alla prima parte rigida, e gli altri due E_{r+1}, E_{r+3} appartenessero alla seconda. In tal caso i due gruppi sarebbero E_2, E_3, ..., E_r, E_{r+2} ed E_{r+1}, E_{r+3}, ..., E_{n-1}. Vedremo più innanzi (n. 51) un esempio di simile trasposizione.

B. *Forze interne nelle travi a reazione verticale.*

38. Premesse le superiori considerazioni, il primo problema da risolvere sarà quello di rappresentare graficamente la legge con cui variano le reazioni sugli appoggi, e gli sforzi sopportati da un'asta qualunque del sistema durante il transito del peso P, che supporremo si muova lungo la $M_1 M_n$ (fig. 79), partendo dalla posizione iniziale M_1, e procedendo fino alla posizione finale M_n.

Come è chiaro si tratta qui di un caso particolare della ricerca fatta al n. 32; per cui tanto le reazioni sugli appoggi, quanto gli sforzi sopportati dalle aste saranno in generale rappresentabili da linee rette o da linee spezzate, che ora si tratta di costruire.

Prima però di procedere a tale costruzione, essendo le travi triangolari di comunissimo uso nella pratica, non sembra fuor di luogo il dimostrare direttamente per questa specie di travi, che quelle reazioni e quegli sforzi sono realmente rappresentabili da linee rette semplici o da spezzate.

Siano dunque $P_1, P_2, \ldots, P_n$ le pressioni, che durante il transito del peso P, vengono trasmesse da sostegni $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ai punti $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Di queste pressioni la prima e l'ultima, nella disposizione della fig. 79, non agiscono sulla trave.

Si cerchi anzitutto la reazione F_1 dell'appoggio in A. Prendendo i momenti rispetto al punto B, ed indicando con $b_2, b_3, \ldots$ i bracci di leva (positivi o negativi) delle $P_2, P_3, \ldots$ rispetto al punto B, e con l la distanza AB, si avrà

$$P_2\, b_2 + P_3\, b_3 + \ldots + P_{n-1}\, b_{n-1} - F_1\, l = 0. \qquad (1)$$

Ciò posto, indichiamo con u la distanza variabile del peso P dalla verticale condotta per M_1, e poniamo $M_1 M_2 = d$, $M_{n-1} M_n = d'$, $AM'_1 = g$, $BM'_n = g'$, $l + g + g' = L$.

Finchè il peso P resta sopra la trave semplice $M_1 M_2$, cioè finchè $o < u < d$, si avrà

$$P_1 = P\,\frac{d-u}{d}, \quad P_2 = P\,\frac{u}{d} \qquad (2)$$

e le altre pressioni $P_3, P_4 \ldots$ saranno tutte nulle. Dunque in tale supposizione la (1) diventa

$$F_1 l = P\,\frac{b_2}{d}\,.\,u\,. \qquad (3)$$

Se il peso P, oltrepassato N_2, trovasi fra M_2 ed M_{n-1}, il suo momento rispetto a B sarà sempre eguale alla somma dei momenti delle componenti P_2, P_3, ... rispetto allo stesso punto. Si potrà dunque porre in questo caso

$$P\,(l + g - u) = P_2\, b_2 + P_3\, b_3 + \ldots + P_{n-1}\, b_{n-1}$$

e quindi la (1) diventerà

$$F_1\, l = P\,(l + g - u). \qquad (4)$$

Se finalmente il peso P trovasi fra M_{n-1} ed M_n si avrà

$$P_{n-1} = P\,\frac{L-u}{d'}, \quad P_n = P\,\frac{u-(L-d')}{d'}: \qquad (5)$$

le altre pressioni $P_2, P_3, \ldots, P_{n-2}$ saranno nulle. La (1) diventa quindi in questo caso

$$F_1 l = P \frac{b_{n-1}}{d'} (L - u). \qquad (6)$$

Dalle equazioni (3), (4) e (6) si rileva che F_1 è sempre una funzione di primo grado di u, la quale però non si conserva la stessa nei tre intervalli $M_1 M_2$, $M_2 M_{n-1}$, $M_{n-1} M_n$. Prendendo dunque u come ascissa, il valore di F_1 sarà rappresentabile entro ognuno di questi intervalli dalle ordinate d'una linea retta, diversa però da un intervallo all'altro.

Siano s', s'', s''' le tre rette, relative ai tre intervalli. Quando il peso P trovasi precisamente in M_2, ciò che ha luogo per $u = d$, tanto la (3) che la (4) danno per F_1 il medesimo valore $F_1 = P\frac{b_2}{l}$, poichè $l + g - d = b_2$. Similmente quando il peso P trovasi in M_{n-1}, ciò che ha luogo per $u = L - d'$, tanto la (4) che la (6) danno per F_1 il medesimo valore $F_1 = - P \frac{g' - d'}{l}$, poichè $b_{n-1} = d' - g'$. Dunque la retta s' taglia la retta s'' in un punto situato nella verticale condotta per M_2: e similmente la retta s'' taglia la retta s''' in un punto situato nella verticale condotta per M_{n-1}. Inoltre per $u = 0$, $u = L$, ed $u = l + g$, si ha $F_1 = 0$.

Risulta adunque, riassumendo, che il valore di F_1, ossia della reazione sul punto A, durante il transito del peso P da M_1 ad M_n è rappresentato dalle ordinate di una spezzata a tre lati, la quale comincia in M_1, e termina in M_n, ed ha due vertici, uno sulla verticale per M_2, l'altro sulla verticale per M_{n-1}: il lato intermedio della spezzata taglia inoltre l'orizzontale $M_1 M_n$ nel punto dov'essa è incontrata dalla verticale condotta per il punto B.

Trovato in generale l'andamento della spezzata, facile riuscirebbe la discussione dei casi particolari, quali sarebbero quelli, in cui mancassero i punti E nell'intervallo fra M'_1 ed A, o fra A e B, oppure fra B ed M'_n, ecc.

Un analogo risultato si troverebbe naturalmente per la reazione sul punto B, il cui valore per l'intervallo da M_1 ad M_2 sarà dato dalla

$$F_2 l = - P \frac{g - d}{d} . u, \qquad (7)$$

per l'intervallo da M_2 ad M_{n-1} dalla

$$F_2 l = P (u - g), \qquad (8)$$

e finalmente per l'intervallo da M_{n-1} ad M_n dalla

$$F_2 l = P \frac{L - u}{d'} (L - g - d'). \qquad (9)$$

39. Cerchiamo ora la legge secondo la quale varia lo sforzo N in un'asta qualunque della trave. Soppressa quest'asta, la trave, come sopra si è detto, si decompone in due parti rigide, l'una a destra l'altra a sinistra, unite fra loro sia a snodatura sia mediante due aste (n. 34). Se, soppressa l'asta, si vuole conservato l'equilibrio di una delle due parti, per es. di quella a sinistra, bisognerà all'asta soppressa sostituire una forza equivalente allo sforzo N sopportato dall'asta.

Questa parte a sinistra sarà allora sollecitata dalla forza N, dalla reazione o dalle reazioni che la parte a destra esercita su quella a sinistra in causa della snodatura o delle due aste che uniscono le due parti, inoltre da quelle forze P_2, P_3, ..., che hanno i loro punti d'applicazione E sulla parte a sinistra, e finalmente dalla reazione F_1 dell'appoggio A, o dalle reazioni F_1, F_2 degli appoggi A e B, qualora uno od ambedue quegli appoggi appartengano alla parte a sinistra (n. 36).

Suppongasi ora che il centro dell'asta che si considera, non si trovi nella direzione dell'asta stessa, e si riferiscano i momenti a questo centro. Sia SS (fig. 79) l'asta in questione, O il suo centro, ed $OQ = q$ la normale calata dal punto O sulla direzione dell'asta. Siano inoltre b'_2, b'_3, ... i bracci di leva delle P_2, P_3, ..., ed f_1, f_2 i bracci di leva delle F_1, F_2 rispetto allo stesso centro O dell'asta.

Si avrà allora per l'equilibrio

$$N_q + P_2 b'_2 + P_3 b'_3 + \ldots - \overline{F_1 f_1} - \overline{F_2 f_2} = 0. \tag{10}$$

I momenti relativi alla reazione della snodatura, od alle reazioni delle aste di collegamento non figurano nell'equazione, poichè essi sono nulli rispetto al centro dell'asta. I termini $P_2 b'_2$, $P_3 b'_3$, ..., saranno tanti, quante sono le forze P_2, P_3, ..., i cui punti E sono nodi della parte rigida a sinistra; e quanto ai termini $F_1 f_1$, $F_2 f_2$, essi figureranno o no nell'equazione, secondochè i punti di appoggio A e B appartengono o no alla parte sinistra che si considera. Indichiamo questa eventualità con una linea orizzontale tirata sopra i termini stessi.

Ora le P_2, P_3, ..., e le F_1, F_2 sono o nulle o funzioni di primo grado della u; dunque il valore di N sarà sempre, dovunque si trovi il peso P fra M_1 ed M_n, una funzione di primo grado della u.

Vediamo ora entro quali intervalli della u, questa funzione si mantenga inalterata. Finchè P si trova fra M_1 ed M_2, si è trovato

$$P_2 = P \frac{u}{d}, \quad P_3 = P_4 = \ldots = P_n = 0, \quad F_1 = P \frac{b_2}{ld} u, \quad F_2 = -P \frac{g-d}{ld} u,$$

dunque l'equazione superiore diverrà, finchè $o < u < d$,

$$N_q + P \frac{b'_2}{d} u - \overline{P \frac{b_2 f_1}{ld} u} + \overline{P \frac{(g-d) f_2}{ld} u} = 0. \tag{11}$$

Se E_r sia, nella serie dei punti E, l'ultimo che appartenga alla parte a sinistra, e P trovisi fra M_2 ed M_r, il momento di P rispetto al centro dell'asta, eguaglia la somma dei momenti delle componenti P_2, P_3, ..., P_r rispetto allo stesso punto. Sarà adunque

$$P (f_1 + g - u) = P_2 b'_2 + P_3 b'_3 + \ldots + P_r b'_r$$

e sarà inoltre $P_{r+1} = P_{r+2} = \ldots = P_n = 0$. Di più per tutto l'intervallo da M_2 ad M_{n-1}, e quindi anche per quello da M_2 ad M_r, si ha

$$F_1 = P \frac{l+g-u}{l}, \quad F_2 = P \frac{u-g}{l}.$$

Dunque fra M_2 ed M_r si avrà dalla (10)

$$Nq + P (f_1 + g - u) - \overline{P \frac{f_1 (l+g-u)}{l}} - \overline{P \frac{f_2 (u-g)}{l}} = 0. \tag{12}$$

Se il punto seguente E_{r+1} appartiene alla parte rigida a destra, ed il peso P trovisi fra M_r ed M_{r+1}, si ha, come è facile dedurre,

$$P_r = P\,\frac{(l+g-b_{r+1})-u}{b_r-b_{r+1}}\,,\quad P_{r+1}=P\,\frac{u-(l+g-b_r)}{b_r-b_{r+1}}$$

ed inoltre $P_2 = P_3 = ... = P_{r-1} = 0$, e così pure $P_{r+2} = P_{r+3} = ... = P_n = 0$; mentre i valori di F_1 e di F_2 restano i medesimi come per l'intervallo precedente.

Dunque fra M_r ed M_{r+1} la (10) diventerà

$$Nq + P\,\frac{b'_r(l+g-b_{r+1}-u)}{b_r-b_{r+1}} - \overline{P\,\frac{f_1(l+g-u)}{l}} - \overline{P\,\frac{f_2(u-g)}{l}} = 0\,. \qquad (13)$$

Se E_{r+1} sia, nella serie dei punti E, il primo che appartiene alla parte destra, e P trovisi fra M_{r+1} ed M_{n-1}, allora si ha $P_2 = P_3 = ... = P_r = 0$, cioè la parte sinistra non è più sollecitata dalla forza P, e l'equazione diverrà per questo intervallo

$$Nq' - \overline{P\,\frac{f_1(l+g-u)}{l}} - \overline{P\,\frac{f_2(u-g)}{l}} = 0\,. \qquad (14)$$

Finalmente se P trovisi fra M_{n-1} ed M_n, anche in questo caso la parte a sinistra non è più sollecitata dalla forza P, ed è soggetta eventualmente alle due reazioni F_1 ed F_2, che in questo caso hanno i valori

$$F_1 = P\,\frac{b_{n-1}}{ld'}\,(L-u)\,,\qquad F_2 = P\,\frac{L-g-d'}{ld'}\,(L-u)\,;$$

per questo ultimo intervallo si avrà dunque

$$Nq - \overline{P\,\frac{f_1 b_{n-1}(L-u)}{ld'}} - \overline{P\,\frac{f_2(L-g-d')(L-u)}{ld'}} = 0\,. \qquad (15)$$

Dalle formole (11)...(15) risulta che la funzione di primo grado in u, esprimente il valore di N, resta inalterata entro i cinque intervalli seguenti: da M_1 ad M_2, da M_2 ad M_r, da M_r ad M_{r+1}, da M_{r+1} ad M_{n-1} e da M_{n-1} ad M_n. Quando il peso P trovasi precisamente nei punti limiti M_2, M_r, M_{r+1} ed M_{n-1}, si ha per N lo stesso valore, sia che si prenda l'equazione dell'intervallo che precede, sia che si prenda quella dell'intervallo che segue il punto limite, come facilmente si può verificare colle equazioni superiori. Siccome poi si ha $N = 0$ tanto per il punto M_1 quanto per il punto M_n, così riassumendo si vede che i successivi valori della N, ossia dello sforzo dell'asta, durante il transito del peso P da M_1 ad M_n, sono rappresentabili in generale dalle ordinate d'una spezzata a cinque lati, la quale comincia in M_1, finisce in M_n ed ha i suoi quattro vertici nelle verticali condotte per i punti M_2, M_r, M_{r+1}, ed M_{n-1}.

40. Fra i diversi casi particolari, rileveremo i seguenti:

a) Se l'asta che si considera è tale, che l'appoggio A appartenga alla parte rigida a sinistra e sia compreso fra le verticali condotte per M_2 ed M_r, e l'appoggio B

analogamente appartenga alla parte rigida a destra, e sia compreso fra le verticali condotte per M_{r+1} ed M_{n-1}, allora le equazioni (12) e 14) diventano

$$Nq + P(f_1 + g - u) - P\frac{f_1(l+g-u)}{l} = 0$$

$$Nq - P\frac{f_1(l+g-u)}{l} = 0.$$

Per $u = g$ si ha dalla prima $N = 0$; per $u = l + g$ si ha dalla seconda $N = 0$. Dunque:

« Quando a ciascuna delle due parti rigide relative ad un'asta appartenga un punto d'appoggio nelle condizioni sopra dette, la spezzata dell'asta taglia la $M_1 M_n$ nei due punti, dove questa è incontrata dalle verticali condotte per A e per B».

In questo stesso caso le (11) e (15) diventano

$$Nq + P\frac{b'_2}{d}u - P\frac{b_2 f_1}{ld}u = 0$$

$$Nq - P\frac{f_1 b_{n-1}(L-u)}{ld'} = 0.$$

b) Se ora M_2 si trovi sulla verticale condotta per A ed M_{n-1} sulla verticale condotta per B, sarà $b_2 = l$, $b'_2 = f_1$, $b_{n-1} = 0$, e quindi per i due intervalli $M_1 M_2$ ed $M_{n-1} M_n$ si ha $N = 0$, cioè:

« Quando a ciascuna delle due parti rigide spettanti ad un'asta appartenga un punto d'appoggio, ed i due punti E_2, E_{n-1} si trovino rispettivamente sulle verticali condotte per A e per B, allora l'asta non soffre alcuno sforzo per tutte le posizioni di P esterne alle verticali stesse».

c) Se quelle fra le forze $P_2, P_3, \ldots$, che sollecitano la parte sinistra, sono tutte nulle, ed i due punti di appoggio A e B appartengono alla parte destra, la (10) darà $N = 0$. Se invece siano tutte nulle quelle fra le $P_2, P_3, \ldots$, che sollecitano la parte destra, ed ambedue i punti d'appoggio A e B appartengano alla sinistra, allora si avrà

$$P_2 b'_2 + P_3 b'_3 + \ldots - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0$$

poichè le forze $P_2, P_3, \ldots, P_n, -F_1, -F_2$ hanno sempre un momento nullo rispetto a qualunque punto del piano. Anche in tal caso dunque si ha $N = 0$. Siccome poi quando l'uno dei due casi ora considerati si avvera per la parte sinistra, l'altro si avvera per la parte destra e viceversa, così si può dire:

« Finchè durante il transito del peso P una delle due parti rigide appartenenti ad un'asta non è soggetta ad alcuna azione dovuta al peso P, nè ad alcuna reazione dei punti d'appoggio, lo sforzo in quell'asta è nullo ». Ciò che del resto è per se stesso evidente.

In tal caso una parte della spezzata coincide colla retta $M_1 M_n$.

d) Se i quattro punti E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, E_{r+3} sono tali, che il primo ed il terzo appartengano alla parte rigida a sinistra, ed il secondo ed il quarto alla parte rigida a destra, ed il peso P trovisi nell'intervallo fra M_{r+1} ed M_{r+2}, allora si avrà

$$P_{r+1} = P\frac{(l+g-b_{r+2})-u}{b_{r+1}-b_{r+2}}, \quad P_{r+2} = P\frac{u-(l+g-b_{r+1})}{b_{r+1}-b_{r+2}}$$

ed entro l'intervallo suddetto si avrà dalla (10)

$$Nq + P\frac{b'_{r+2}(u+b_{r+1}-l-g)}{b_{r+1}-b_{r+2}} - P\overline{\frac{f_1(l+g-u)}{l}} - P\overline{\frac{f_2(u-g)}{l}} = 0, \qquad (16)$$

e la spezzata dell'asta avrebbe sei lati invece di cinque. Similmente si procederebbe se vi fossero altre trasposizioni di questo genere fra i punti E.

e) Se l'asta avesse un solo punto di passaggio E_λ (n. 36), un tal punto sarebbe pure centro dell'asta, e quindi il momento della P_λ rispetto a quel punto sarebbe sempre nullo. Se ne deduce facilmente che la funzione di primo grado di u, che rappresenta il valore di N resterebbe inalterata da M_2 ad M_λ e cambierebbe poi da M_λ ad M_{n-1}. La spezzata in questo caso avrà dunque solamente quattro lati: i suoi punti estremi resteranno gli M_1 ed M_n, ed i tre vertici si troveranno sulle verticali condotte per M_2, M_λ ed M_{n-1}.

Non ci occuperemo d'altri casi particolari, che facilmente possono svolgersi in base alle superiori equazioni.

41. Nella superiore discussione si è supposto che il centro dell'asta, che si considera, non si trovi nella direzione dell'asta stessa. Se tale condizione non è adempiuta, lo sforzo N dell'asta diviene generalmente infinito.

Atteso però il significato che sopra si è dato al centro dell'asta (n. 34), bisogna eccettuare il caso, in cui questo centro sia uno dei nodi dell'asta, come sarebbe il caso per l'asta AB (fig. 76), il cui nodo A è anche il suo centro. In tal caso lo sforzo dell'asta non diventa infinito.

Per un'asta in tali condizioni possono avvenire due casi, cioè 1° che l'altro nodo B non sia uno dei punti E; 2° che il nodo B sia uno dei punti E. Nel primo caso si vede facilmente che gli sforzi delle tre aste BD, BA, BC, durante il transito del peso P, si equilibrano costantemente intorno al punto B, e mantengono costanti i loro rapporti. Ora gli sforzi di una delle due aste BD e BC sono rappresentabili dalle ordinate d'una spezzata; dunque anche gli sforzi della BA godranno della stessa proprietà.

Nel secondo caso l'azione del peso P sul nodo B, durante il transito, è semplicemente una forza verticale, applicata in B, cioè una delle $P_2, P_3, \ldots, P_n$, la quale od è nulla, oppure si esprime mediante una funzione lineare della variabile u. Il punto B adunque è sempre in equilibrio, durante il transito del peso P, sotto l'azione di questa forza e degli sforzi delle tre aste in esso concorrenti. Ora siccome due di questi sforzi, cioè quelli dovuti alle aste BD e BC, sono essi pure funzioni lineari della u, così anche lo sforzo dell'asta BA sarà una funzione lineare della u. Infatti decomponendo ciascuno degli sforzi delle BD e BC in una forza orizzontale ed una verticale, e sommando poi algebricamente tutte le forze orizzontali e tutte le verticali applicate in B, non comprese quelle provenienti dall'asta BA, si potrà indicare la somma delle orizzontali con $\alpha+\beta u$, e quella delle verticali con $\alpha'+\beta' u$. Ora queste due somme, ossia le due quantità $\alpha+\beta u$ ed $\alpha'+\beta' u$, per l'equilibrio, devono dare sempre una risultante diretta nel senso dell'asta BA; queste quantità devono dunque, qualunque sia il valore di u, conservare fra loro un rapporto costante. Ora ciò non sarebbe possibile, essendo u variabile, se i

rapporti $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ non fossero eguali fra loro. Posto dunque $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = k$, la risultante nella direzione della BA, ossia lo sforzo di quest'asta sarà espresso da $\sqrt{(\alpha+\beta u)^2+(\alpha'+\beta' u)^2}$, cioè da $(\alpha+\beta u)\sqrt{1+k^2}$, cioè questo sforzo è una funzione lineare di u.

Lo sforzo della BA sarà dunque rappresentabile in ambedue i casi dalle ordinate d'una spezzata.

Riassumendo adunque gli ottenuti risultati, potremo conchiudere:

« Durante il transito di un peso P nelle supposte condizioni, tanto le reazioni sugli appoggi, quanto lo sforzo sopportato da un'asta qualunque di una trave triangolare, sono rappresentabili dalle ordinate d'una spezzata ».

Veniamo ora alla costruzione di tali spezzate ed alla determinazione degli sforzi sopportati dalle aste.

IV. Spezzate delle aste.

A. *Spezzate quando la trave non si estende oltre gli appoggi.*

42. Si consideri anzitutto il caso che la trave non si prolunghi oltre i punti d'appoggio, che E_2 ed E_{n-1} (fig. 79) cadano rispettivamente in A e B, o nelle verticali condotte per questi punti, e che i tratti $M_1 M_2$, $M_{n-1} M_n$ si annullino. In tale supposizione tanto la spezzata relativa alle pressioni sui punti d'appoggio, quanto quelle relative alle singole aste, restano comprese fra le due verticali condotte per i punti d'appoggio.

Per maggiore chiarezza del disegno, la spezzata, che si tratta di costruire, sarà riferita non alla retta $M_1 M_n$, ma ad una sua parallela $A_1 B_1$ (fig. 80), tirata sotto lo schema della trave.

Per costruire una spezzata qualunque basta conoscere i suoi due punti estremi, ed i suoi vertici successivi. Congiunti allora per ordine questi punti con linee rette si ha la spezzata che si cerca.

La spezzata relativa alla pressione in A si riduce, nel caso attuale, ad una semplice linea retta, compresa fra le due verticali passanti per i punti d'appoggio; poichè, essendosi annullati i due tratti $M_1 M_2$ ed $M_{n-1} M_n$, il primo ed ultimo lato della spezzata trilatera sopra considerata (n. 38) sono spariti.

Quando il peso è in M_2 (fig. 80) il valore di F_1, dato dalla (4) diventa $F_1 = P$, essendo in questo caso $g = 0$, $u = 0$. Quando il peso è in M_{n-1}, si ha dalla stessa $F_1 = 0$, essendo in questo caso $g = 0$, $u = l$. Presa dunque nella scala delle forze $A_1 C_1 =$ al peso P, e congiunto C_1 con B_1, la $C_1 B_1$, riferita alla $A_1 B_1$, rappresenterà colle sue ordinate le pressioni sopportate dall'appoggio A, durante il passaggio del peso P.

Se la scala con cui si valutano le forze fosse tale, che il peso P fosse rappresentato dalla distanza orizzontale AB fra i punti d'appoggio, allora si prenderebbe $A_1 C_2 = AB$, e la $C_2 B_1$ sarebbe la retta cercata.

Se si prende sulla verticale condotta per A un punto C_3 ad arbitrio, e si tira

la $C_3 B_1$, si vede che due ordinate qualunque DM_3, GN_3 della $C_3 B_1$ hanno fra loro lo stesso rapporto, che due ordinate corrispondenti DM_1, GN_1 della $C_1 B_1$.

Se si tratta adunque dei rapporti fra i valori delle pressioni sopportate dall'appoggio A, e non del loro valore effettivo, può servire una retta qualunque $C_3 B_1$, che congiunga il punto B_1 con un punto qualsiasi della verticale condotta per A.

La retta $C_3 B_1$, può considerarsi come omologica-affine della $C_1 B_1$ rispetto alla $A_1 B_1$, presa come asse di omologia.

Ricercando le spezzate relative tanto ai punti d'appoggio, come alle singole aste del sistema, occorre spesso, come si vedrà in seguito, di considerare delle linee o spezzate analoghe alle $C_1 B_1$, $C_2 B_1$, $C_3 B_1$ sopra costruite. Per maggiore chiarezza riesce quindi opportuno d'introdurre le seguenti denominazioni: *Spezzata vera*, quella, la quale, come la $C_1 B_1$, dà colle sue ordinate lo sforzo realmente sopportato dal punto d'appoggio, o dall'asta; *Spezzata relativa alla luce*, quella, la quale, come la $C_2 B_1$, dà colle sue ordinate lo sforzo nel caso che la distanza fra i punti d'appoggio (la luce) fosse assunta a rappresentare il peso P; finalmente *Spezzata omologica*, quella, le cui ordinate, come quelle della $C_3 B_1$, sono semplicemente proporzionali a quelle della spezzata vera. Naturalmente anche la spezzata relativa alla luce è anch'essa omologica-affine della spezzata vera.

Quanto alla reazione in B, per averne la spezzata vera, basta portare la $A_1 C_1$ in $B_1 C'_1$ e congiungere C'_1 con A_1. Similmente si possono avere la spezzata relativa alla luce, ed una spezzata omologica qualunque relative alla reazione in B.

43. Veniamo ora alla spezzata relativa ad un'asta qualunque, per es. all'asta SS (fig. 81), la quale abbia il centro O, due punti di passaggio M ed N, e soddisfaccia, quanto ai punti d'appoggio, alle condizioni del n. 40 *a*). In tal caso la spezzata sarà generalmente trilatera, essendosi annullati il primo e l'ultimo lato della spezzata a cinque lati (n. 39 in fine). I suoi punti estremi cadranno in A_1 e B_1, ed i suoi due vertici cadranno sulle verticali condotte per i punti M ed N, i quali corrispondono ai punti E_r ed E_{r+1} del caso generale. La spezzata si potrà dunque costruire, tostochè siano trovati i suoi due vertici su queste verticali.

Le ordinate N_m, N_n relative a questi due vertici, si avranno dalla (13), omettendo l'ultimo termine, e ponendo prima $u = l + g - b_r$, il quale valore darà l'ordinata N_m; e poscia $u = l + g - b_{r+1}$, col che si otterrà il valore N_n. Si avrà così per la prima ordinata

$$N_m q + P b'_r - P \frac{f_1 b_r}{l} = 0$$

e per la seconda

$$N_n q - P \frac{f_1 b_{r+1}}{l} = 0.$$

Abbassate le verticali MM', NN', OO' si ponga $A_1 M' = m$, $B_1 N' = n$, $A_1 O' = a$, $B_1 O' = b$, ed essendo $A_1 B_1 = l$, si avrà

$$b'_r = a - m, \quad b_r = l - m, \quad b_{r+1} = n, \quad f_1 = a,$$

e quindi il valore della prima ordinata sarà

$$N_m = P \frac{bm}{lq}$$

e quello della seconda sarà

$$N_n = P \frac{an}{lq}.$$

Per costruire questi valori si può procedere come segue.

Calata sulla SS la normale OQ, si prenda $A_1 Q_1 = OQ$, e fatto $A_1 P$ eguale al peso P nella scala delle forze, si tiri $B_1 Q_2$ parallela a PQ_1. Preso poscia $O'Q'$ eguale ad $A_1 Q_2$ si tirino per A_1 e per B_1 due rette $A_1 M_0$, $B_1 N_0$, rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. Si otterranno così sulle verticali condotte per M ed N due punti M_0 ed N_0, che sono i vertici cercati della spezzata. La spezzata che si cerca è dunque la $A_1 M_0 N_0 B_1$. Infatti si ha $OQ = q$, $A_1 P = P$, $A_1 B_1 = l$, e quindi $A_1 Q_2 = \frac{lq}{P}$.

Ma $A_1 M' : M' M_0 = O'Q' : O'B_1$; ossia per essere $A_1 M' = m$, $O'Q' = A_1 Q_2 = \frac{lq}{P}$, $O'B_1 = b$, sarà

$$M' M_0 = P \frac{bm}{lq}.$$

Similmente si dimostra che

$$N' N_0 = P \frac{an}{lq}.$$

Allo stesso risultato si può arrivare colla seguente costruzione. Preso $O'Q' = OQ$ (fig. 82), si tirino per A_1 e per B_1 due rette $A_1 M_1$ e $B_1 N_1$ rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. Si projettino poi in M'_1, N'_1 i punti M_1, N_1, e preso $A_1 P = P$ nella scala delle forze, si tirino per P le PM'_0, PN'_0 rispettivamente parallele alle $B_1 M'_1$, $B_1 N'_1$. Fatto poi $M' M_0 = A_1 M'_0$, $N' N_0 = A_1 N'_0$, si avrà la spezzata $A_1 M_0 N_0 B_1$, che si cercava.

Questa spezzata è, come risulta dalla costruzione, la spezzata vera dell'asta SS, e rappresenta quindi colle sue ordinate gli sforzi sopportati dall'asta durante il transito del peso P.

44. Se si volesse la spezzata relativa alla luce, la costruzione sarebbe più semplice, poichè in tal caso dovendosi porre $P = l$, i valori delle ordinate dei vertici diventano

$$N_m = \frac{bm}{q}, \qquad N_n = \frac{an}{q}.$$

Preso dunque (fig. 83) $O'Q' = q$, basta tirare le $A_1 M_1$, $B_1 N_1$ rispettivamente normali a $B_1 Q'$, $A_1 Q'$ e la $A_1 M_1 N_1 B_1$ sarà la spezzata relativa alla luce, che si cercava.

Se è data la spezzata relativa alla luce si può facilmente dedurne la spezzata vera, o viceversa. Basta infatti aumentare o diminuire le ordinate corrispondenti ai punti M' ed N' nel rapporto delle due lunghezze l e P, valutata quest'ultima nella scala delle forze.

Che se trattisi di costruire semplicemente una spezzata omologica, si osservi che per tale spezzata basta che le ordinate corrispondenti ai punti M' ed N' abbiano il rapporto $\frac{N_m}{N_n}$, cioè $\frac{bm}{an}$. La quantità q, ossia la distanza $O'Q'$ diventa quindi arbitraria. Per costruire una spezzata omologica basta adunque prendere ad arbitrio

un punto Q' (fig. 84) sulla verticale condotta per O, e tirare le rette $A_1 M_2$, $B_1 N_2$ rispettivamente normali alle $B_1 Q'$, $A_1 Q'$. La spezzata $A_1 M_2 N_2 B_1$ sarà la cercata.

Si osservi intanto che per la costruzione di una tale spezzata omologica non occorre conoscere nè l'inclinazione dell'asta rispetto all'orizzontale, nè il suo braccio di leva rispetto al proprio centro, bastando conoscere la posizione dei punti M′, N′, O′ rispetto ai punti A_1 e B_1. Ora siccome d'altra parte la spezzata omologica, avendo le sue ordinate proporzionali ai veri sforzi sopportati dall'asta, è atta a rappresentare la legge con cui quegli sforzi variano durante il transito del peso P, così si potrà stabilire la proposizione:

« La legge con cui variano gli sforzi d'un'asta durante il transito d'un peso, dipende unicamente dalle distanze orizzontali del suo centro e dei suoi punti di passaggio dai punti d'appoggio ».

45. Nel triangolo $A_1 B_1 Q'$ (fig. 82 ed 83) le tre rette $O'Q'$, $A_1 M_1$. $B_1 N_1$ sono le tre normali calate dai vertici del triangolo sui lati opposti; similmente le tre rette $O'Q'$, $A_1 M_0$, $B_1 N_0$ (fig. 81), e le tre $O'Q'$, $A_1 M_2$, $B_1 N_2$ (fig. 84). Queste normali passano sempre, come è noto, per un medesimo punto; dunque:

« I lati estremi delle spezzate trilatere ora considerate si tagliano sempre nella verticale passante per il centro dell'asta ».

Questa proprietà facilita la costruzione della spezzata. Trattandosi infatti di costruire la spezzata vera, dopo determinato il punto Q', basterà tirare una delle due rette $A_1 M_0$, $B_1 N_0$ (fig. 81), prolungandola, se occorre, finchè essa incontri in un punto V la verticale condotta per il centro dell'asta; l'altra retta si avrà allora congiungendo questo punto V con A_1 oppure con B_1. Lo stesso dicasi quando si tratta di costruire la spezzata relativa alla luce.

Più semplice ancora riesce la costruzione per trovare una spezzata omologica. Essendo infatti in tal caso arbitrario il punto Q', lo sarà pure il punto V. Per cui la costruzione si riduce semplicemente alla seguente: Preso ad arbitrio un punto V sulla verticale condotta per il centro dell'asta (fig. 84), lo si unisca con A_1 e B_1. Le rette $A_1 V$, $B_1 V$ intersecheranno le verticali condotte per i punti di passaggio M ed N nei punti M_2 ed N_2, e la $A_1 M_2 N_2 B_1$ sarà una spezzata omologica.

46. Se si prolunga la $M_1 N_1$ (fig. 83), cioè il lato intermedio della spezzata fino ad incontrare la $A_1 B_1$ in O'', si avrà

$$O''N' : N'N_1 = O''M' : M'M_1,$$

ossia

$$\frac{O''N_1}{O''M'} = \frac{N'N_1}{M'M_1} = \frac{N_n}{N_m} = \frac{an}{bm} = \frac{O'A_1 \;.\; N'B_1}{B_1 O' \;.\; A_1 M'}$$

cioè

$$A_1 M' . B_1 O' . O''N' + N'B_1 . M'O'' . O'A_1 = 0$$

dunque: $A_1 N' . B_1 M' . O'O''$ sono tre coppie di punti conjugati d'un'involuzione. Questa proprietà può anche dimostrarsi, osservando che i tre punti $M_1 N_1 V$ ed il punto all'infinito nella direzione verticale, determinano un quadrangolo completo, i cui lati opposti sono segati dalla trasversale $A_1 B_1$ nelle dette tre coppie di punti.

Se la direzione del peso P coincide colla verticale passante per O'', ed il peso stesso s'intenda decomposto in due componenti verticali P_m, P_n applicate ai punti

di passaggio M ed N, queste produrranno in A e B due reazioni R_a, R_b tali, che sotto l'influenza delle forze P_m, P_n, R_a, R_b l'asta SS non sopporterà alcuno sforzo. Tanto dunque la risultante delle R_a e P_m, quanto quella delle R_b e P_n passano per il punto O'. Ora tanto le P_m, P_n che le $-R_a$, $-R_b$ sono componenti del peso P. Possiamo dunque stabilire in generale questa proposizione:

« Se la risultante R_1 di due forze parallele F_1, F_2 coincide in direzione, senso e grandezza colla risultante di altre due forze parallele F_3, F_4, anche la risultante R_2 delle due forze $\pm F_1$, $\mp F_3$ coinciderà in direzione, senso e grandezza colla risultante delle $\pm F_2$, $\mp F_4$. Tagliando con una trasversale le direzioni delle sei forze F_1, F_4, F_2, F_3, R_1, R_2 si hanno tre coppie di punti conjugati in involuzione ».

La proposizione vale anche quando le forze F non siano parallele, come facilmente si può dimostrare.

Se O″ fosse a distanza infinita si avrebbe $\frac{O''N'}{O''M'}=1$, cioè $N_m=N_n$, ed inoltre numericamente $A_1M':B_1N'=O'A_1:O'B_1$. Abbiamo dunque la seguente proposizione:

« Se la verticale condotta per il centro dell'asta taglia la luce A_1B_1, e l'intervallo orizzontale M'N' fra i punti di passaggio in parti fra loro proporzionali, l'asta sopporta uno sforzo costante, durante il transito del peso P nell'intervallo dei punti di passaggio ».

Se invece fosse a distanza infinita il punto O', allora la verticale condotta per O″ dividerebbe la luce A_1B_1 e l'intervallo orizzontale fra i punti M, N in parti fra loro proporzionali. Si ha dunque la seguente proprietà:

« Se il centro d'un'asta è a distanza infinita, il suo sforzo sarà nullo quando la direzione del peso P taglia gl'intervalli A_1B_1 ed M'N' in parti proporzionali ».

Nei due casi ora indicati i punti O' ed O″ diventano rispettivamente centri dell'involuzione.

47. Se l'asta ha un punto comune di passaggio M (fig. 85), questo è pure centro dell'asta; e la spezzata è bilatera. Essa ha il suo vertice nella verticale condotta per M (n. 40 *e*)). Per costruirla basterà quindi avere l'ordinata corrispondente al punto M'. Per ottenere questa ordinata, basterà tralasciare l'ultimo termine della (12) e porre poi $u=l+g-b\lambda$: osservando che in questo caso $l-f_1=b\lambda$, si avrà

$$Nq=P\,\frac{b\lambda\,(l-b\lambda)}{l}$$

ossia ponendo $A_1M'=a$, $B_1M'=b$, sarà $b\lambda=b$, ed $l-b\lambda=a$, quindi

$$N=P\,\frac{ab}{lq}\,.$$

Preso dunque $A_1P=P$ nella scala delle forze, e fatto $A_1Q_1=MQ$, si tiri B_1Q_2 parallela a PQ_1 e preso $M'Q'=A_1Q_2$ si conducano per A_1 e B_1 le A_1M_0, B_1M_0 rispettivamente normali alle B_1Q', A_1Q'. Il punto M_0 si troverà sulla verticale per M, e la $A_1M_0B_1$ sarà la spezzata vera relativa all'asta che si considera.

Per avere la spezzata relativa alla luce basta prendere $M'Q'=MQ$ (fig. 86), e procedere come sopra.

Si avrà finalmente una spezzata omologica prendendo M_1 ad arbitrio sulla verticale condotta per M e tirando le A_1M_1, B_1M_1 (fig. 86).

Esempî. Per la trave AB fig. 87 domandansi: la spezzata vera delle aste 24, 35; la spezzata relativa alla luce per l'asta 56; una spezzata omologica per l'asta 46.

Per l'asta 24 i punti 2 e 4 sono punti di passaggio ed il punto 3 è il centro. Si ha quindi la costruzione della fig. 88.

L'asta 35 ha un punto comune di passaggio, cioè il nodo 4. Si avrà quindi la costruzione fig. 89.

L'asta 56 ha i due punti di passaggio 4 e 6 ed ha il centro O, esterno alle verticali condotte per i punti di appoggio. Calata dunque la verticale OL' e la normale OL, si farà $O'L'=OL$ (fig. 90), e congiunte le A_1L', B_1L', si tireranno per A_1 e B_1 le A_1M_1, B_1N_1 normali rispettivamente alle B_1L', A_1L'. La $A_1M_1N_1B_1$ è dunque la spezzata dell'asta 56, relativa alla luce. Le A_1M_1, B_1N_1, $O'L'$ devono concorrere in uno stesso punto L'', ciò che può servir di controllo alla costruzione.

Una omologica della 46 si costruisce facilmente, prendendo sulla verticale condotta per il centro 5 il punto V_1 ad arbitrio e procedendo poi come indica la fig. 91.

48. Quando i tipi di travi che si considerano sono quelli adottati generalmente nella costruzione dei ponti in ferro, avviene spesso che volendo costruire le spezzate relative alla luce, le ordinate ne diventino troppo lunghe relativamente al resto del disegno. È preferibile allora costruire una spezzata che sia relativa ad una parte aliquota della luce, per es. alla metà, ad un quarto, ad un dodicesimo o simile. Per ottenere una tale spezzata invece di prendere $O'Q'$ (fig. 82), eguale ad OQ, si prenderà $O'Q'=2.OQ$, $=4.OQ$, $=12.OQ$ e simili e si procederà del resto come sopra; oppure si userà altro procedimento equivalente (come si vedrà nelle fig. 92, 93, 94, ...). Chiamando c il coefficiente che si premette alla OQ, sarà bene, per l'uso ulteriore che dovrà farsi della spezzata, notare lateralmente alla stessa il valore di c, ponendo $c=2, 4, 12, \ldots$ Si vede del resto che attribuendo a c anche altri valori non interi, si può avere una spezzata omologica qualunque. Per cui una spezzata omologica qualunque può considerarsi come una spezzata relativa alla luce, per la quale siasi usato uno speciale coefficiente c. In questo senso può dirsi che ad ogni spezzata omologica spetta un coefficiente c.

Ora due ordinate y_1, y_2 relative ad una medesima ascissa, ma una appartenente alla spezzata vera, l'altra alla spezzata relativa alla luce, stanno fra loro come il peso P (valutato nella scala delle forze) sta alla luce l, cioè $y_1 : y_2 = P : l$. E fra due ordinate y_2, y_3, l'una appartenente alla spezzata relativa alla luce, l'altra alla spezzata che ha il coefficiente c, si ha $y_2 : y_3 = l : \frac{l}{c}$. Dunque $y_1 : y_3 = cP : l$.

49. Nelle costruzioni finora esposte i punti A_1, B_1, M', N', O', nei quali le verticali condotte per A, B, M, N, O incontravano la orizzontale A_1B_1 sono fra loro distinti. Avviene però spesso che due o più di tali punti coincidono, il che dà luogo a forme speciali delle spezzate.

Il caso sopra trattato che l'asta abbia un punto comune di passaggio, può riguardarsi come quello in cui i punti M', N', O' coincidono in un solo punto.

Il caso in cui A_1 ed O' coincidono s'incontra nella trave fig. 92, nella quale AB, A7, B7 siano linee rette. Volendo infatti la spezzata di una delle diagonali 1.2, 2.3, ..., 5.6, per es. della 3.4, i due punti di passaggio sono i nodi 2 e 4,

ed il centro dell'asta lo stesso punto A d'appoggio. Per costruire dunque la spezzata relativa alla luce, procedendo colla regola generale si abbasserà da A la normale AQ sulla direzione dell'asta, si prenderà $A_1 Q' = AQ$ e congiunto Q' con A_1 e con B_1 si tirerà per A_1 una normale $A_1 M_1$ alla $B_1 Q'$, e per B_1 una normale $B_1 N_1$ alla $A_1 Q'$; e si congiungerà finalmente M_1 con N_1. Nella figura 92 alla $Q' B_1$ si è sostituita la $Q' N_1$, essendo $A_1 N_1 = \frac{1}{3} A_1 B_1$, col che si è introdotto il coefficiente $c = 3$. Ora la $A_1 Q'$ coincide colla verticale per A, dunque la $B_1 N_1$ coinciderà colla $A_1 B_1$, cioè il punto N_1 sarà quello dove la $A_1 B_1$ è incontrata dalla verticale condotta per il nodo 4. La spezzata cercata sarà dunque la $A_1 M_1 N_1 B_1$, col lato $B_1 N_1$ coincidente colla $A_1 B_1$.

Se si cercasse la spezzata vera basterà alla $A_1 Q'$ sostituire la $A_1 Q_2$ determinata come sopra (fig. 81).

Una spezzata omologica qualunque si ha finalmente prendendo ad arbitrio il punto M_1 nella verticale condotta per il nodo 2, e tirando le $A_1 M_1$, $M_1 N_1$, $N_1 B_1$.

Qualora si cercassero le spezzate delle diagonali 6.8, 8.9, 9.10, ecc. si troverebbe che O' e B_1 coincidono, e si procederebbe analogamente a quanto si è praticato per la coincidenza di A_1 ed O'.

Il caso ora trattato ci porge occasione di osservare, che qualora il centro cade sopra una delle verticali passanti per i punti di appoggio, e non vi cadano i punti di passaggio, si avrà sempre una spezzata trilatera con un lato coincidente colla $A_1 B_1$. Infatti uno dei valori N_m, N_n (n. 43) si annulla, qualora sia $a = 0$, oppure $b = 0$.

50. Quando si cercano le spezzate relative ad un' asta che fa parte del primo o dell' ultimo triangolo della trave, s' incontra pure il caso, che due o più dei detti punti coincidono.

Sebbene la costruzione di queste spezzate non presenti difficoltà, tuttavia non sembra inutile dire brevemente dei casi che si presentano.

Il primo e l' ultimo triangolo hanno ciascuno, come sopra si è notato (n. 34), due lati non comuni con altri triangoli. Ognuno di questi due triangoli ha per conseguenza:

un vertice dove concorrono due sole aste;
un vertice dove ne concorrono tre e non più;
un vertice dove ne concorrono più di tre.

Il punto d' appoggio A, oppure B, può essere collocato in uno di questi tre vertici.

Suppongasi in primo luogo che l'appoggio sia collocato nel vertice nel quale concorrono due sole aste (fig. 93).

Allora per l'asta A.1 il centro è in 2, il primo punto di passaggio coincide con A, il secondo è il nodo 1. Preso dunque $O'_1 Q' = 2.Q$, si conduca per B_1 una normale alla $A_1 Q'$ fino all' incontro in N_1 colla verticale condotta per il nodo 1, e si congiunga A_1 con N_1. La spezzata bilatera $A_1 N_1 B_1$ sarà quella dell'asta A.1, relativa alla luce. Infatti coincidendo A_1 con M', è facile riconoscere, che uno dei lati estremi della spezzata, che altrimenti sarebbe trilatera, si annulla, e restano solamente il lato intermedio $A_1 N_1$, e l' altro lato estremo $N_1 B_1$. Similmente si costruirebbero la spezzata vera ed un' omologica qualunque. Se il secondo punto di passaggio fosse il nodo 2, invece del nodo 1, allora, oltre alla coincidenza di A_1

con M′, vi sarebbe quella di N′ con O′; e la spezzata invece del vertice N_1 avrebbe il vertice N'_1, dove la N_1 B_1 incontra la verticale condotta per O′. Similmente si opererebbe, se il secondo punto di passaggio fosse qualche altro nodo. Nella figura si è preso $c = 3$ (n. 48), cioè $A_1 O'_1 = \frac{1}{3} A_1 O'$.

Per l'asta A.2 il centro è il nodo 1, il primo punto di passaggio è il punto A, il secondo il nodo 1 stesso. Si ha dunque coincidenza dei punti A_1 ed M′, e dei punti O′ ed N′. Con un ragionamento simile al precedente, si potrà costruire la spezzata relativa alla luce A_1 N_1 B_1 (fig. 94), che riesce pure bilatera. Che se il secondo punto di passaggio fosse il nodo 2, o qualche altro nodo, allora il vertice N_1 della spezzata si trasporterebbe lungo la B_1 N_1 fino a quel punto, in cui questa retta resta tagliata dalla verticale condotta per quel nodo che serve di punto di passaggio.

Resta da considerare l'asta 1.2. Per quest'asta il centro è O, il primo punto di passaggio il nodo 1, ed il secondo il nodo 3. Come dunque si vede, qui i punti sono tutti distinti, e si rientra quindi nel caso generale. Se però il nodo 1 non fosse punto di passaggio; ma dopo il primo punto in A, il seguente fosse nel nodo 2, od in un altro nodo, vi sarebbe coincidenza del punto A_1 col punto M′, e si otterrebbe una spezzata bilatera A_1 N_1 B_1 (fig. 95).

51. Suppongasi in secondo luogo che il punto d'appoggio sia collocato in uno degli altri due vertici del primo od ultimo triangolo, nel quale dunque concorreranno tre (o più) aste (fig. 96).

Se si considerano in questo caso le due parti rigide relative all'asta A.1, si vede che la parte a sinistra è costituita dall'asta 1.2; la parte a destra invece da tutto il resto della trave, ad eccezione dell'asta stessa, che s'intende soppressa (n. 34). I due punti d'appoggio A e B appartengono adunque ambedue alla parte a destra. Quanto ai punti E (n. 36), si vede che il punto E_2 è lo stesso punto A, il punto E_3 è il nodo 1, il punto E_4 è il nodo 2. Ora E_2 ed E_4 appartengono alla parte rigida a destra, mentre E_3 appartiene a quella a sinistra. Si ha dunque qui una trasposizione, quale fu contemplata al n. 37.

Finchè dunque il peso P trovasi fra M_2 ed M_3, ossia fra le verticali condotte per A e per il nodo 1, varrà l'equazione (16), purchè si ommettano i due ultimi termini, col che essa diventa

$$Nq + P \frac{b'_{r+2}(u + b_{r+1} - l - g)}{b_{r+1} - b_{r+2}} = 0,$$

ossia, per essere nel caso attuale $g = 0$, $r = 1$

$$Nq + P \frac{b'_3(u + b_2 - l)}{b_2 - b_3} = 0.$$

Ma si ha evidentemente $b_2 = l$, e calando le verticali per A e per i nodi 1 e 2, e ponendo $O'M' = m$, $A_1 M' = m'$, si ha inoltre $b'_3 = m$, $b_2 - b_3 = m'$. Dunque

$$Nq + P \frac{mu}{m'} = 0. \tag{17}$$

Quando invece il peso P trovasi fra le verticali condotte per i nodi 1 e 2, sarà applicabile l'equazione (13), purchè si ommettano gli ultimi due termini, col che essa diventa

$$Nq + P\frac{b'_r(l+g-b_{r+1}-u)}{b_r-b_{r+1}} = 0.$$

Per il caso nostro si avrà $r=3$, $g=0$, $b'_3=m$, $b_3-b_4=m$, $l-b_4=m+m'$, col che l'equazione diventa

$$N\,q + P\,(m+m'-u) = 0. \qquad (18)$$

Quando il peso P ha oltrepassata la verticale corrispondente al nodo 2, la parte rigida a sinistra è del tutto scarica, e quindi lo sforzo dell'asta A.1 è nullo (n. 40 c)). La spezzata dell'asta A.1 è dunque trilatera, col terzo lato $O'B_1$ coincidente colla A_1B_1. Per avere gli altri due lati basta costruire il vertice corrispondente alla verticale condotta per il nodo 1. A tal fine basta porre in una o nell' altra delle superiori equazioni (17), (18) $u=m'$, e si avrà

$$Nq + Pm = 0.$$

Calata dunque la normale 2.Q sulla direzione dell'asta, e preso $M'Q'$ eguale a quella normale, si farà $M'R$ eguale al peso P nella scala delle forze, e si tirerà per R una normale alla $O'Q'$, la quale incontrerà la verticale condotta per il nodo 1 nel vertice M_1 cercato. La $A_1M_1O'B_1$ sarà dunque la spezzata vera dell'asta A.1.

Da questa si potrà avere facilmente anche la spezzata relativa alla luce (n. 44). Quanto ad una spezzata omologica essa si ottiene, prendendo ad arbitrio il punto M_1.

Per l'asta 1.2 vale un ragionamento analogo: essa pure ha una spezzata trilatera, di cui un lato $O'B_1$ coincide colla A_1B_1. Gli altri due lati s'incontrano nella verticale condotta per il nodo 1. Per determinare questo punto d' incontro si cali da A una normale $AQ_1=q_1$ sulla direzione dell'asta 1.2, e si otterrà in modo simile al superiore l'equazione

$$Nq_1 + Pm' = 0$$

che dà luogo ad una costruzione simile a quella adottata per l'equazione $Nq+Pm=0$.

Che se la spezzata di una delle due aste A.1, 1.2 è già costruita, si potrà avere la spezzata dell'altra asta dalla considerazione, che gli sforzi sostenuti dalle due aste durante il transito del peso P mantengono sempre fra loro il medesimo rapporto, poichè devono dare sempre nel nodo 1 una risultante verticale. Quegli sforzi stanno dunque fra loro come i lati di un parallelogrammo, la cui diagonale sia verticale, ed i cui lati siano paralleli alle aste suddette.

Quanto all'asta A.2, essa ricade nel caso generale, e la costruzione della sua spezzata non presenta difficoltà.

52. Come casi speciali di quelli ora considerati possono riguardarsi quelli, in cui l' asta A.1 od A.2 della fig. 93 diventi verticale. Si hanno in tal modo le disposizioni fig. 97 e 98. Quanto alla posizione del punto E_2, che continueremo a supporre nella verticale condotta per A (n. 42), possono avvenire due casi. Questo punto può cioè coincidere col punto A oppure col nodo 1 (fig. 97): e similmente nella fig. 98 esso può coincidere col punto A, oppure col nodo 2.

Per la disposizione fig. 99 si ha per l'asta A.1 il centro nel nodo 2, il primo punto di passaggio in A, ed il secondo nel nodo 2. Si ha dunque coincidenza del punto A_1 con M', e si otterrà la spezzata bilatera relativa alla luce $A_1N_1B_1$ (fig. 100).

Per l'asta A.2 il centro cade nel nodo 1, ed i due punti di passaggio sono A ed il nodo 2. Si ha dunque qui coincidenza dei tre punti $A_1M'O'$. Seguendo anche

per questo caso il procedimento della costruzione generale, si troverà che il primo lato della spezzata si annulla, e che il secondo e l'ultimo sono i tratti $A_1 N'$, $N' B_1$ della orizzontale $A_1 B_1$. In altre parole tutta la spezzata coincide in questo caso colla $A_1 B_1$.

Per l'asta 1.2 il centro è O, il primo punto di passaggio è A, il secondo è il nodo 2. Vi è dunque coincidenza del punto A_1 con M'. Applicato il procedimento generale si otterrà la $A_1 N_1 B_1$, come spezzata relativa alla luce (fig. 101).

Supponiamo ora che il punto E_2 non sia in A, ma nel nodo 1 (fig. 102).

Se si considerano in questo caso le due parti rigide corrispondenti all'asta A.1, si vede che la parte a sinistra è formata dalla sola asta A.2, la parte a destra invece da tutto il resto della trave, esclusa la A.1. La parte a sinistra adunque è sollecitata dalla sola reazione dell'appoggio in A, oltrechè dallo sforzo dell'asta.

L'equazione generale (10) si riduce dunque in questo caso alla $Nq - F_1 f_1 = 0$, e siccome nel nostro caso $q = f_1$, così sarà $N = F_1$. Dunque la spezzata corrispondente all'asta A.1 è quella stessa indicante la reazione dell'appoggio in A (n. 42).

Per l'asta A.2, si ha, come è facile dimostrare, la stessa equazione $Nq - F_1 f_1 = 0$. Ma il centro della A.2 è il nodo 1, dunque $f_1 = 0$, e perciò $N = 0$. Dunque la spezzata dell'asta A.2 coincide tutta colla $A_1 B_1$.

Quanto finalmente alla terza asta 1.2 del triangolo, il suo centro è O, il primo punto di passaggio è il nodo 1, ed il secondo il nodo 3. Si ha dunque qui coincidenza del punto A_1 col punto M'; e si troverà facilmente che la spezzata relativa alla luce è la $A_1 N_1 B_1$.

Resterebbe ora a considerare la disposizione fig. 98, nella quale il lato A.2 è verticale. Siccome però una tale disposizione difficilmente può incontrarsi in pratica, così non ce ne occuperemo: tanto più che, qualora occorresse, il caso può sempre svolgersi colla guida dei principî sopra sviluppati.

53. Anche nel caso che il punto d'appoggio sia collocato in quel vertice del primo triangolo dove concorrono tre o più aste, può avvenire che l'asta A.1 (fig. 96) sia verticale; il che dà luogo alla disposizione fig. 103, nella quale saranno analogamente da distinguersi due casi secondo che il punto E_2 coincida col punto A (fig. 104), oppure col nodo 1 (fig. 105).

Quando il punto E_2 coincide con A (fig. 104), allora le spezzate delle aste A.1 ed 1.2 coincidono colla orizzontale $A_1 B_1$, come è facile dimostrare. Quanto all'asta A.2, la sua spezzata è bilatera, e di facile costruzione.

Quando invece il punto E_2 coincide col nodo 1 (fig. 105), allora l'asta A.1 ha la spezzata $M_1 N' B_1$, dove $A_1 M_1$ eguaglia il peso P nella scala delle forze. Si ha qui un caso particolare di quello superiormente sviluppato al n. 51.

La spezzata dell'asta 1.2 coincide totalmente colla $A_1 B_1$.

Per l'asta A.2 finalmente, il centro è O, il primo punto di passaggio è il nodo 1, il secondo il nodo 2. Si ha dunque coincidenza del punto A_1 con M', e si avrà quindi la spezzata relativa alla luce $A_1 N_1 B_1$.

Dai risultati sopra ottenuti si deduce intanto che:

« Quando uno dei punti di passaggio trovasi sulla verticale passante per uno degli appoggi, la spezzata diventa bilatera, ed ha il suo vertice nella verticale condotta per l'altro punto di passaggio ».

La stessa proposizione si ha pure direttamente dalle espressioni N_m, N_n (n. 43). Se infatti m od n si annullano, si annulla pure N_m od N_n.

54. Per molte travi generalmente usate nelle costruzioni, il centro O di alcune aste cade fuori del disegno, oppure talmente lontano dal resto della figura, da renderne difficile l'uso allo scopo di determinare le spezzate delle aste stesse. In tali casi giova attenersi al procedimento seguente, il quale è basato sulla costruzione di una figura, che è simile alla data, e della quale poi si fa uso per determinare la spezzata che si cerca.

Sia $S_1 S_2$ (fig. 106) un'asta, il cui centro sia il punto d'incontro delle $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, e della quale si voglia costruire la spezzata relativa alla luce, senza far uso di un tale punto d'incontro. I punti A_2, A_3, e B_2, B_3 siano collocati rispettivamente nelle verticali passanti per i punti d'appoggio A e B.

Si conducano per A_3 e B_3 due parallele $A_3 a$, $B_3 b$ alla $A_2 B_2$; e tirata la verticale $S_1 S_3$ si conduca la $B_2 S_3$, la quale taglierà in a e b le suddette parallele. Si tirino poi le verticali $a A'_2 A'$, $b B'_2 B'$, e preso $B_1 Q'$ eguale alla normale $B_2 Q$, calata da B_2 sulla direzione dell'asta, si tirino le $A' Q'$, $B' Q'$. Condotte poi per A_1 e B_1 due normali $A_1 F$, $B_1 G$ alle $B' Q'$, $A' Q'$ rispettivamente, si avrà la direzione del primo e dell'ultimo lato della spezzata.

Infatti sono simili i gruppi di tre punti $A' B' B_1$, $A'_2 B'_2 B_2$, $a b B_2$, $A_3 B_3 O$, $A_2 B_2 O$, $A_1 B_1 O'$, e simili pure i gruppi $S_3 b B_2$, $S_3 B_3 O$, $S_1 B_2 O$; per cui $S_3 b : S_3 B_2 = S_1 B_2 : S_1 O$. Ma si ha pure $S_3 b : S_3 B_2 = b B_3 : B_2 O = B'_2 B_2 : B_2 O$, ed $S_1 B_2 : S_1 O = B'_2 Q : O Q_1$, dunque $B'_2 B_2 : B_2 Q = B_2 O : O Q_1$, cioè $B' B_1 : B_1 Q' = B_1 O' : O' Q'_1$. Dunque il gruppo dei quattro punti $A' B' B_1 Q'$ è simile al gruppo $A_1 B_1 O' Q'_1$; e perciò le $A' Q'$, $B' Q'$ sono rispettivamente parallele alle $A_1 Q'_1$, $B_1 Q'_1$. Invece dunque di quest'ultime rette si può far uso delle due ad esse parallele per tirare le $A_1 F$, $B_1 G$, ossia per ottenere il primo e l'ultimo lato della spezzata.

I due vertici della spezzata stessa restano naturalmente determinati dall'incontro dei due lati estremi $A_1 F$ e $B_1 G$ colle verticali condotte per i punti di passaggio, le quali per maggiore chiarezza si sono tralasciate nella figura.

La spezzata vera si può ottenere sia deducendola dalla spezzata relativa alla luce (n. 44), oppure direttamente, prendendo invece di $B_1 Q'$ una lunghezza $B_1 Q_2$, la quale abbia colla $B_1 Q'$ lo stesso rapporto, che ha la luce $A_1 B_1$ colla retta rappresentante il peso P nella scala delle forze, e servendosi poi della $B_1 Q_2$ come si è fatto della $B_1 Q'$.

Per avere una spezzata omologica il procedimento è naturalmente più semplice. Trovati i punti A' e B', si prenda ad arbitrio un punto Q' sulla verticale condotta per B_1, e condotte le $A' Q'$, $B' Q'$, si tirino per A_1 e B_1 due rette rispettivamente parallele, oppure perpendicolari alle $A' Q'$, $B' Q'$. Queste due parallele o perpendicolari saranno il primo e terzo lato della spezzata omologica.

Se il punto O d'incontro delle $A_2 B_2$ ed $A_3 B_3$ cadesse a sinistra della figura, invece di cadere a destra, come si è supposto, allora invece della $B_2 S_3$ si tirerà la $A_2 S_3$ e si procederà analogamente per le altre linee che dipendono da B_2.

55. Quando il centro O d'un'asta trovasi a distanza infinita la costruzione diventa più semplice. In tal caso infatti la $A_3 B_3$ (fig. 107) diventa parallela alla $A_2 B_2$,

ed i punti a e b della figura 106 coincidono col punto S_3, e quindi A' e B' coincidono colla projezione di S_1 sulla A_1B_1. Per ottenere la spezzata relativa alla luce si ha dunque in questo caso la seguente costruzione: Abbassata sulla A_1B_1 la normale S_1S_0 e preso $B_1Q' = B_2Q$, si conducano per A_1 e B_1 due normali alla S_0Q', e queste saranno il primo ed il terzo lato della spezzata che si cerca.

Che se si volesse avere solamente una spezzata omologica qualunque basterebbe condurre per A_1 e B_1 due rette qualunque fra loro parallele. Queste sarebbero il primo ed il terzo lato della spezzata.

Il caso che il centro trovisi a distanza infinita è comune a tutte le aste intermedie delle travi a tavole parallele (fig. 108). Così per es. volendo una spezzata omologica dell'asta 5.6, la quale ha i due punti di passaggio nei nodi 4 e 6, si tireranno ad arbitrio le parallele A_1M_2, B_1N_2 e la $A_1M_2N_2B_2$ sarà la spezzata che si cerca.

56. Le superiori costruzioni cadono in difetto, quando il centro si trovi nella direzione dell'asta, alla quale appartiene. Allora lo sforzo dell'asta diventa in generale infinito, come fu sopra osservato (n. 41), e come mostrano le espressioni di N_m ed N_n (n. 43) facendovi $q=0$. Di questo caso, che non s'incontra naturalmente nelle costruzioni, non ci occuperemo. Merita però attenzione il caso, per il quale il centro dell'asta è uno dei suoi due nodi (n. 41). Bisogna allora ricorrere a considerazioni diverse dalle superiori per costruire la spezzata relativa a tali aste.

Sia S_1S_2 (fig. 109) l'asta proposta, avente il centro S_2, per la quale debba costruirsi la spezzata vera.

Suppongasi in primo luogo che nessuno dei punti E sia situato nel nodo S_1. In tal caso gli sforzi delle tre aste concorrenti in S_1 si equilibrano in qualunque posizione del peso P, e lo sforzo nella S_1S_2 mantiene quindi sempre lo stesso rapporto cogli sforzi delle S_0S_1, S_1S_3, ossia le spezzate delle tre aste S_1S_2, S_0S_1, S_1S_3 sono fra loro omologiche-affini (n. 42). Se dunque si suppone costruita la spezzata vera della S_0S_1, oppure della S_1S_3, basterà modificare le ordinate dei vertici dell'una o dell'altra di queste spezzate nel rapporto delle due rette S_1T, S_1U, oppure delle due S_1V, S_1U, appartenenti al parallelogrammo S_1TUV per avere le ordinate dei vertici della spezzata vera relativa alla S_1S_2. Se dunque è data la spezzata vera $A_1M_0N_0B_1$ dell'asta S_0S_1 si potrà costruire la spezzata della S_1S_2 prendendo S_1T, S_1T_1 eguali rispettivamente ad $M'M_0$, $N'N_0$, tirando le TU, T_1U_1 parallele ad S_1S_3 e prendendo poscia $M'M'_0$, $N'N'_0$ eguali rispettivamente ad S_1U, S_1U_1, col che resteranno determinati i vertici M'_0, N'_0 della spezzata $A_1M'_0N'_0B_1$, che si cercava.

Se per l'asta S_0S_1 si avesse la spezzata relativa alla luce, operando allo stesso modo, si otterrebbe la spezzata relativa alla luce della S_1S_2. Del resto la spezzata vera e la spezzata relativa alla luce possono sempre ottenersi l'una dall'altra facilmente (n. 44).

Per avere una spezzata omologica qualunque basta prendere senz'altro una spezzata omologica dell'asta S_0S_1 o della S_1S_3.

57. Qualora uno dei punti E coincide col nodo S_1 (fig. 110), allora questo punto diventa il secondo punto di passaggio per l'asta S_0S_1 ed il primo punto di passaggio per la S_1S_3, e quindi le spezzate relative alle aste S_0S_1, S_1S_3 non

sono più fra di loro omologiche-affini. La spezzata dell'asta $S_1 S_2$ avrà in questo caso tre vertici, di cui uno sulla verticale passante per S_1 e gli altri due sulle verticali corrispondenti agli altri due punti di passaggio delle $S_0 S_1$, $S_1 S_3$. Per ottenere questi ultimi vertici, si costruiscano prima le spezzate vere relative alle aste $S_0 S_1$, $S_1 S_3$, che supporremo essere le $A_1 M_0 N_0 B_1$, $A_1 M''_0 N''_0 B_1$. Costruito poi il parallelogrammo $S_1 T_1 V_1 U_1$, nel quale i lati $S_1 T_1$, $S_1 V_1$ sono rispettivamente eguali alle ordinate $M' M_0$, $M' L$, si avrà nella diagonale $S_1 U_1$ l' ordinata $M' M'_0$ che determinerà il primo vertice della spezzata che si cerca. Procedendo in modo analogo. si otterrà l'ordinata $N' N'_0$ relativa al vertice N'_0. Resta dunque solamente da trovare l'ultimo vertice, quello cioè che cade nella verticale condotta per S_1. Per determinarlo basta evidentemente supporre, che la direzione del peso P coincida colla detta verticale. Si avranno allora nel punto S_1 quattro forze che si equilibrano, cioè gli sforzi delle tre aste ed il peso P. Basterà dunque projettare nella direzione della $S_1 S_2$ gli sforzi delle due altre aste, che sono rappresentati dalle ordinate RM''_0, RN_0, ed il peso P, e prendere la somma algebrica delle projezioni. Applicando questo procedimento si avrà la spezzata vera quadrilatera $A_1 M'_0 R_0 N'_0 B_1$, dove P fu preso eguale alla metà della luce.

La spezzata relativa alla luce potrà dedursi dalla spezzata vera. Se però fossero date le spezzate relative alla luce delle aste $S_0 S_1$, $S_1 S_3$, si potrebbe procedere come sopra, semprechè per rappresentare il peso P si prenda una retta eguale alla luce AB.

Anche una spezzata omologica qualunque potrà facilmente costruirsi dopo le considerazioni superiori.

B. *Osservazioni sulla natura degli sforzi.*

58. Prima di procedere oltre, gioverà esporre qui alcune osservazioni relative alla natura degli sforzi sopportati dalle aste finora considerate, appartenenti alle travi che non si prolungano oltre i punti d'appoggio. Si osservi in primo luogo che le ordinate d' una spezzata bilatera sono tutte positive o tutte negative. Dunque:

« Quando un'asta possiede una spezzata bilatera, lo sforzo a cui quell'asta va soggetta durante il passaggio del peso P è sempre una tensione o sempre una pressione ».

Le ordinate d' una spezzata trilatera possono essere tutte d' un segno , oppure da un punto d' appoggio fino ad un certo punto della luce possono essere positive e per la parte residua della luce negative. Ora siccome i lati estremi d'una spezzata trilatera si tagliano sempre in un punto della verticale condotta per il centro (n. 45), così quando il centro trovasi compreso fra le verticali passanti per i punti d'appoggio A e B, le ordinate della spezzata trilatera sono tutte di un segno; quando invece il centro è esterno ai punti d'appoggio, le ordinate per una parte della luce sono di un segno, e per l'altra parte di segno opposto. Dunque:

« Se il centro d' un'asta, avente una spezzata trilatera, cade fra le verticali condotte per i punti d'appoggio, lo sforzo dell'asta è sempre una tensione o sempre una pressione durante il transito del peso P ».

« Se invece il centro è esterno a quelle verticali, l'asta sopporta prima una tensione e poi una pressione, o viceversa ».

È pure per sè evidente che, se uno dei lati della spezzata coincide coll'asse $A_1 B_1$ per quel tratto lo sforzo dell'asta è nullo. Ora questa coincidenza ha sempre luogo, quando il centro si trova sopra una delle verticali passanti per i punti d'appoggio, senza che vi si trovino i punti di passaggio (n. 49). Dunque:

« Quando il centro cade sopra una delle verticali passanti per i punti d'appoggio e non vi cadano i punti di passaggio, lo sforzo dell'asta è nullo per una parte della luce, ed è una pressione od una tensione per l'altro tratto ».

Se tutta la spezzata coincide coll'asse $A_1 B_1$ tutte le ordinate sono nulle. Ora ciò ha luogo quando il centro ed un punto di passaggio trovansi ambedue sopra una delle verticali condotte per i punti d'appoggio. Infatti se m ed a sono nulli, oppure lo siano n e b, i valori di N_m ed N_n (n. 43) sono ambedue nulli. Dunque:

« Lo sforzo dell'asta è nullo durante tutto il transito del peso P, se il centro ed uno dei punti di passaggio cadono sulla medesima verticale passante per un punto d'appoggio ».

59. Quando i due punti d'appoggio A e B appartengono uno alla parte rigida a destra, l'altro a quella a sinistra d'un'asta, allora la posizione del centro e dei punti di passaggio bastano pure a decidere se lo sforzo sopportato dall'asta durante il transito del peso P sia una tensione od una pressione. Per fissare le idee intenderemo sempre che il transito sia fatto da A verso B.

Per poter facilmente determinare la natura dello sforzo d'un'asta giova osservare: 1° che quando il peso P si trova fuori dell'intervallo determinato dalle due verticali corrispondenti ai punti di passaggio, allora una delle due parti rigide della trave, corrispondenti all'asta, è sollecitata dallo sforzo dell'asta stessa e dalla reazione di uno dei punti d'appoggio, le quali due forze danno una risultante che passa per il centro dell'asta; 2° che quando due forze, che operano nel piano secondo le rette AB, CD (fig. 111), hanno una risultante passante per il punto O, i sensi in cui agiscono le due forze devono essere quelli comprendenti lo spazio angolare dove trovasi il punto O; oppure quelli comprendenti lo spazio angolare opposto al vertice. Così nella fig. 111 le due forze agiranno nei due sensi EC, EB; oppure nei due EA, ED.

Ciò premesso siano A e B (fig. 112) le verticali condotte per i punti d'appoggio, ed SS la direzione (non verticale) d'un'asta qualunque. Il piano resterà diviso da queste rette nei sei spazî indefiniti Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 e Σ_6.

Con una facile discussione dei singoli casi si trova ora quanto segue:

Se l'asta SS ha una spezzata trilatera, essa sarà continuamente soggetta a tensione durante il transito del peso P, se il suo centro cade nello spazio Σ_2;

sarà continuamente soggetta a pressione se il suo centro cade nello spazio Σ_5;

sarà prima soggetta a pressione e poi a tensione, se il suo centro cade nello spazio Σ_3, oppure Σ_4;

sarà prima soggetta a tensione e poi a pressione, se il suo centro cade nello spazio Σ_1 oppure Σ_6;

sarà prima soggetta a tensione e poi non soggetta a sforzo alcuno, o viceversa, secondochè il suo centro cade nella verticale A o B, superiormente alla direzione SS dell'asta;

sarà prima soggetta a pressione e poi non soggetta a sforzo alcuno, o viceversa, secondochè il suo centro cade nella verticale A o B, inferiormente alla direzione SS dell'asta.

Quando il centro cade nell'asta stessa, e col nodo S_1 non coincida uno dei punti E (fig. 109), allora per lo sforzo dell'asta vale la stessa regola, che vale per le due aste S_0S_1, S_1S_3 se la somma dei due angoli $S_0S_1S_2$, $S_2S_1S_3$ è maggiore di due retti; altrimenti lo sforzo della S_1S_2 è di segno opposto a quelli delle altre due aste. Se col nodo S_1 coincide uno dei punti E (fig. 110), la spezzata è quadrilatera e lo sforzo può cambiare due volte di segno.

60. Sé l'asta ha un punto comune di passaggio (n. 36), essa ha una spezzata bilatera (n. 47). L'asta sarà allora sempre soggetta a tensione, durante il transito del peso P, se il suo centro cade nello spazio Σ_2; invece sarà soggetta sempre a pressione, se cade nello spazio Σ_5. Se il centro cade sopra una delle verticali passanti per i punti d'appoggio, lo sforzo dell'asta è nullo, durante tutto il transito del peso P. Infatti il valore di N (n. 47) si annulla tanto per $a=0$, quanto per $b=0$. Anche se uno dei punti di passaggio cade nella verticale per A o per B, senza che vi cada il centro, l'asta ha una spezzata bilatera, poichè uno dei lati della trilatera si annulla. Se la posizione dei punti di passaggio M ed N sulle verticali per A o B si indica con (AM) o (BN), allora dai precetti superiori relativi alle spezzate trilatere, si deducono facilmente per ordine i seguenti relativi alle bilatere.

Posizione del centro nello spazio	Posizione dei punti di passaggio	Natura dello sforzo
Σ_2	(AM), (BN)	tensione
Σ_5	(AM), (BN)	pressione
Σ_3, Σ_4	(AM)	tensione
Σ_3, Σ_4	(BN)	pressione
Σ_1, Σ_6	(AM)	pressione
Σ_1, Σ_6	(BN)	tensione

61. Quando l'asta SS è verticale non si hanno più i sei spazî $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_6$ (fig. 112), ma quattro spazî indefiniti Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 (fig. 113). Per riconoscere in questo caso la natura degli sforzi a cui l'asta va soggetta durante il transito del peso P, giova osservare, che ogni asta verticale ha un nodo superiore ed un nodo inferiore. Quando l'asta si sopprime, e si ottengono così due parti rigide distinte (n. 34), avviene sempre che ad una di queste parti appartiene il nodo superiore, all'altra il nodo inferiore dell'asta verticale soppressa. Diremo per brevità *parte superiore* quella alla quale appartiene il nodo superiore, e *parte inferiore* quella a cui appartiene il nodo inferiore. Così nella fig. 108 per l'asta verticale 4.5 si ha la parte superiore 0.4.3.1.0, e l'inferiore 5.6.10.11.5.

Ciò premesso, mediante considerazioni analoghe alle superiori, si troveranno facilmente i seguenti caratteri per istabilire la natura degli sforzi sopportati da un'asta verticale, ritenendo sempre che il transito del peso P si faccia da A verso B.

Quando l'asta possiede una spezzata trilatera:

se il centro dell'asta e la parte superiore trovansi ambedue nello spazio Σ_2 o nello spazio Σ_3, l'asta è premuta durante tutto il transito;

se il centro dell'asta trovasi in uno dei due spazî Σ_2 o Σ_3, e la parte superiore nell'altro, l'asta è tesa durante tutto il transito;

se il centro trovasi negli spazî Σ_1 o Σ_4 a distanza finita od infinita, l'asta passa dallo stato di pressione a quello di tensione o viceversa, secondochè il peso P, nel suo transito, incontra prima la parte superiore e poi l'inferiore, o viceversa;

se il centro cade nella verticale passante per il punto A d'appoggio, lo sforzo dell'asta passa da una tensione a zero, o da una pressione a zero, secondochè il peso P incontra prima la parte inferiore, oppure la superiore. Similmente:

se il centro cade nella verticale passante per il punto B d'appoggio, lo sforzo passa da zero ad una tensione, oppure da zero ad una pressione, secondochè il peso P incontra prima la parte superiore, oppure l'inferiore.

Se il centro è uno dei nodi dell'asta, valgono le osservazioni del n. 60 (in fine).

62. Quando il punto di passaggio M trovasi sulla verticale condotta per l'appoggio A, od il punto N sulla verticale condotta per l'appoggio B, allora l'asta possiede una spezzata bilatera, e va soggetta unicamente a tensione, oppure a pressione, durante tutto il transito del peso P. Valgono allora i seguenti criterî, nei quali per brevità si sono indicate, come sopra, con (AM), (BN) le dette coincidenze.

Se ha luogo la coincidenza (AM):

Si avrà tensione:

a) se il centro cade nello spazio Σ_2, ed il peso P incontri prima la parte inferiore, e poi la superiore;

b) se il centro cade negli altri spazî o nella verticale per l'appoggio B, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore.

Si avrà invece pressione:

a) se il centro cade in Σ_2, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore;

b) se il centro cade negli altri spazî o nella verticale per A, ed il peso P incontri prima la parte inferiore, e poi la superiore.

Analogamente per la coincidenza (BN) si avrà tensione:

a) se il centro cade nello spazio Σ_3, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore;

b) se il centro cade negli altri spazî, o nella verticale per A, ed il peso P incontri prima la parte inferiore, e poi la superiore.

Si avrà invece pressione:

a) se il centro cade nello spazio Σ_3, ed il peso P incontri prima la parte inferiore e poi la superiore;

b) se il centro cade negli altri spazî o nella verticale per A, ed il peso P incontri prima la parte superiore, e poi l'inferiore.

Se il centro cade in una delle verticali condotte per i punti d'appoggio, in modo che i tre punti A, M, O, oppure i tre B, N, O si trovino sopra una stessa verticale, allora lo sforzo dell'asta è sempre nullo durante tutto il transito del peso P (n. 58 in fine).

C. *Spezzate quando la trave si estende oltre gli appoggi.*

63. Il caso che nessuno dei punti E si trovi sulla verticale passante per il punto d'appoggio A oppure B; e quello che la trave si prolunghi al di là dei punti d'appoggio è meno frequente in pratica. Quando ciò avvenga, la costruzione delle spezzate può senza difficoltà dedursi dalle equazioni fondamentali superiormente sviluppate (numeri 38, 39, 40). Ci limiteremo perciò a mostrare la costruzione delle spezzate nei seguenti casi.

Sia data la trave fig. 114, la quale si prolunga oltre gli appoggi, e debbasi costruire la spezzata vera relativa alla reazione del punto A d'appoggio. Tale spezzata, come fu dimostrato (n. 38) ha tre lati: essa comincia in E'_1, finisce in E'_n, ha i suoi due vertici sulle verticali condotte per M_2 ed M_{n-1}, ed il suo lato intermedio passa per il punto B_1. Se adunque si determina un altro punto appartenente al lato intermedio, questo lato e quindi tutta la spezzata potrà costruirsi.

Ora l'ordinata della spezzata per il punto A_1 si ha dall'equazione (4), ponendo in essa $u = g$, col che si ottiene $F_1 = P$. Si ha dunque la seguente costruzione della spezzata rappresentante la legge con cui varia la reazione del punto A d'appoggio.

Si prenda $A_1 P'$ eguale al peso P valutato nella scala delle forze, e si tiri la $E'_2 P' B_1 E'_{n-1}$, la quale incontrerà le verticali condotte per M_2 ed M_{n-1} nei punti E'_2, E'_{n-1}. Condotte poscia le $E'_1 E'_2$ ed $E'_{n-1} E'_n$, si avrà la spezzata cercata $E'_1 E'_2 E'_{n-1} E'_n$.

Se si volesse la spezzata relativa alla luce, bisognerebbe prendere $A_1 P'$ eguale ad $A_1 B_1$; e per avere una spezzata omologica, P' si prenderà ad arbitrio.

64. Supponiamo ora che debbasi costruire la spezzata vera d'un'asta avente i due punti di passaggio E_r ed E_{r+1} (fig. 114), collocati in modo, che il punto di sostegno A trovisi fra le verticali condotte per M_2 ed M_r, ed il punto di sostegno B fra quelle condotte per M_{r+1} ed M_{n-1}. Suppongasi inoltre che i due punti di sostegno A e B appartengano rispettivamente alle due parti rigide relative all'asta che si considera. Avremo dunque il caso contemplato al n. 40 *a*). L'asta avrà una spezzata a cinque lati, la quale riferita alla orizzontale $A_1 B_1$ (fig. 115) comincerà in E'_1 e finirà in E'_n; passerà inoltre per i due punti A_1 e B_1 ed avrà i suoi quattro vertici sulle verticali condotte per M_2, M_r, M_{r+1}, M_{n-1} (n. 39 in fine).

Ora la parte di spezzata, che è compresa fra le verticali condotte per A e per B, è la stessa come se la trave non si prolungasse oltre i punti d'appoggio; ciò che è facile riconoscere, ricercando i valori delle ordinate che coincidono colle verticali passanti per M_r ed M_{r+1}. Questa parte si potrà dunque costruire nei modi superiormente spiegati.

Sia dunque $A_1 E'_r E'_{r+1} B_1$ questa parte della spezzata. Per completarla basterà allora prolungare i lati $E'_r A_1$, $E'_{r+1} B_1$ fino ad incontrare rispettivamente le verticali condotte per M_2 ed M_{n-1}. Si avranno così gli altri due vertici $E'_2 E'_{n-1}$ della spezzata, che sarà la $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1} E'_{n-1} E'_n$.

Secondochè il tratto $A_1 E'_r E'_{r+1} B_1$ fra le verticali condotte per i punti d'appoggio sarà relativo ad una spezzata vera, relativa alla luce od omologica, tale riuscirà

pure l'intera spezzata. Se invece di due punti di passaggio E_r, E_{r+1}, si avesse un solo punto comune E_λ, restando inalterate le altre condizioni, la costruzione procederebbe in modo analogo; si avrebbero in tal caso fra le verticali condotte per i punti d'appoggio due soli lati $A_1 E'_\lambda$, $B_1 E'_\lambda$ invece di tre; e tutta la spezzata sarebbe a quattro lati, anzichè a cinque.

65. Come secondo caso supporremo che si debba costruire la spezzata d'un'asta, le cui due parti rigide siano tali, che ambedue i punti d'appoggio A e B appartengano alla parte a destra.

Se E_r ed E_{r+1} (fig. 116) sono i due punti di passaggio di tale asta, è chiaro che quando il peso P avrà oltrepassato il punto M_{r+1}, la parte rigida a sinistra non sarà più sollecitata da alcuna forza; dunque a partire dal punto E'_{r+1} fino ad E'_n la spezzata coinciderà coll'asse $A_1 B_1$ (n. 40 c)). Nell'intervallo invece da E'_1 fino ad E'_{r+1} la spezzata avrà due vertici, collocati rispettivamente sulle verticali condotte per M_2 ed M_r (n. 39 in fine). Per trovare la posizione di questi vertici, si noti che nell'intervallo da M_2 ad M_r vale l'equazione (12), purchè si sopprimano i due ultimi termini, col che essa diventa

$$N\,q + P\,(f_1 + g - u) = 0.$$

Se O sia il centro dell'asta, condotta la verticale OO', richiamando il significato delle lettere (n. 38 e 39), sarà $d = E'_1 M'_2$, $b'_2 = - M'_2 O'$, $f_1 = - A_1 O'$, $g = E'_1 A_1$, $b'_r = - M'_r O'$. Dunque quando il peso P è in M_2, si avrà ponendo $u = d$

$$N_2\,q + P b'_2 = 0.$$

Quando invece il peso P è in M_r si avrà, ponendo $u = f_1 + g - b'_r$,

$$N_r\,q + P b'_r = 0.$$

Allo stesso risultato si arriva, considerando le equazioni (11) e (13) che spettano agli intervalli da M_1 ad M_2 e da M_r ad M_{r+1}.

Le ordinate N_2 ed N_r della spezzata corrispondenti ai punti M'_2 ed M'_r stanno dunque fra loro come b'_2 sta a b'_r, cioè come $M'_2 O'$ ad $M'_r O'$. Di qui si ricava la seguente costruzione della spezzata vera. Preso $M'_2 Q'$ eguale a q, cioè eguale alla normale calata dal centro O sulla direzione dell'asta, si prenda $M'_2 P'$ eguale alla forza P nella scala delle forze, e si tiri la $P' E'_2$ normale alla $O' Q'$. Il punto E'_2 sarà un vertice della spezzata. Tirata poi la $E'_2 O'$, questa incontrerà in E'_r la verticale condotta per M_r, e determinerà così il secondo vertice. La parte di spezzata compresa fra E'_1 ed E'_{r+1} sarà dunque la $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1}$.

La costruzione della spezzata relativa alla luce, e d'una spezzata omologica non presenta dopo ciò alcuna difficoltà.

Se il punto O' fosse a distanza infinita, il ramo $E'_2 E'_r$ della spezzata sarebbe parallelo alla $A_1 B_1$. Dunque:

« Quando un'asta nelle superiori condizioni ha il suo centro a distanza infinita, lo sforzo da essa sopportato rimane costante, mentre il peso P transita per l'intervallo $M_2 M_r$ ».

66. Qualora il punto O' cadesse fuori del foglio, o non potesse essere utilizzato, per costruire la spezzata, nel modo superiormente indicato, si dovrà ricorrere ad una costruzione simile a quella del n. 54. Tale sarebbe per es. la seguente:

Sia $S_1 S_2$ (fig. 117) l'asta proposta, ed il suo centro sia il punto d'incontro

delle $S_3 S_1$, $S_4 S_2$. Tirata $S_1 S_4$, si conduca per S_2 la $S_2 S'_1$ parallela ad $S_1 S_3$, e per S'_1 la $S'_1 Q_1$ parallela alla $S_1 S_2$. Si prenda poscia $M'_2 Q'_1$ eguale alla normale $S_2 Q_1$. Fatto inoltre $M'_2 P'$ eguale alla forza P, valutata nella scala delle forze, si determini il punto P'_1 in modo che sia $M'_2 P'_1 : M'_2 P' = S_4 S'_1 : S_4 S_1$; ciò che potrà facilmente ottenersi tirando $S'_1 K$ parallela ad $S_1 M'_2$, KK' orizzontale e $K' P'_1$ verticale. Si tiri poi $P'_1 N'_1$ normale alla $Q'_1 O'_1$, e tirate le $P' E'_2$, $E'_2 E'_r$ rispettivamente parallele alle $P'_1 N'_1$, $N'_1 O'_1$ si avranno nei punti E'_2, E'_r i due vertici della spezzata $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1}$. Infatti è facile dimostrare che le figure dei punti $S'_1 D S_2 S_4 Q_1$ e $P'_1 N'_1 O'_1$ sono simili a quelle dei punti $S_1 S_2 O S_4 Q$ e $P' E'_2 O'$ rispettivamente, ed hanno eguale rapporto lineare. Dunque la retta $E'_2 E'_r$ passerà per O', che sarà sulla verticale condotta per O.

Se il punto O è a distanza infinita, la costruzione si semplifica come segue: Tirata $S_4 Q_1$ (fig. 118), parallela all'asta data $S_1 S_2$, si cali la normale $S_2 Q_1$, e fatto $M'_2 Q'_1 = S_2 Q_1$ si tiri per P' la $P' E'_2$ normale alla $Q'_1 O'_1$. Tirata quindi la orizzontale $E'_2 E'_r$, si avrà la spezzata $E'_1 E'_2 E'_r E'_{r+1}$.

67. Nel caso che esistesse un punto di passaggio comune, questo sarebbe pure centro dell'asta. Allora i tre punti M'_r, E'_{r+1} ed O' della fig. 116 coinciderebbero in un punto E'_λ, e nel tratto $E'_1 E'_\lambda$ la spezzata avrebbe due lati in vece di tre.

Esempî. Siano tre travi triangolari $E_1 E_2$, $E_2 E_{n-1}$, $E_{n-1} E_n$ (fig. 119), unite a snodatura nei punti E_2, E_{n-1}, delle quali la intermedia è sostenuta nei punti A e B. Domandasi la spezzata delle aste 3.5 e 6.7 durante il transito del peso P da M_1 ad M_n.

Applicando i procedimenti superiori si otterrà per l'asta 3.5 la spezzata $E'_1 E'_2 E'_\lambda$ (fig. 120); e per l'asta 6.7 la spezzata $E'_n E'_{n-1} E'_r E'_{r+1}$ (fig. 121).

D. *Spezzate per più pesi.*

68. Si voglia ora costruire per una data asta la spezzata relativa al transito di due pesi P_1 e P_2, anzichè di un solo peso P, i quali però si muovano in modo sopra la trave, che la loro rispettiva distanza rimanga costante.

In tal caso è chiaro che lo sforzo sopportato dall'asta durante il transito dei due pesi, è uguale ad ogni istante alla somma algebrica dei due sforzi causati nell'asta da ognuno dei pesi per sè. Ora questi sforzi sono rappresentati dalle ordinate delle due spezzate vere dell'asta, le quali siano relative ai due dati pesi.

Sia data per es. l'asta 5.7 della trave fig. 122, la quale non si prolunghi oltre gli appoggi, e siano $A_1 M_0 N_0 B_1$ ed $A_1 M'_0 N'_0 B_1$ le due spezzate vere dell'asta relative ai due pesi, e le quali saranno fra loro omologiche-affini. Per una posizione qualunque dei pesi, per es. quella indicata in figura, lo sforzo dell'asta sarà rappresentato dalla somma $RT + R_1 T_1$ delle due ordinate corrispondenti alla posizione dei pesi. Ora è chiaro che se i pesi si muovono, avanzandosi, in modo però che la ordinata RT non esca dal lato $N_0 B_1$ della propria spezzata, e similmente l'ordinata $R_1 T_1$ non esca dal lato $A_1 M'_0$, allora la somma $RT + R_1 T_1$ sarà rappresentabile essa pure dalle ordinate d'una linea retta. Se dunque sia V il punto, in cui la direzione del primo peso P_1 incontra la $A'_1 B'_1$, e si prenda $VM = RT + R_1 T_1$, il luogo dei punti M sarà una linea retta. Quando l'una o l'altra delle ordinate RT, $R_1 T_1$ passa da un lato della propria spezzata al successivo, il punto M descrive una retta diversa.

Ne viene che anche la linea generata dal punto M sarà una spezzata, la quale però avrà tanti vertici, quante volte l'una o l'altra delle ordinate RT, $R_1 T_1$ passa da un lato all'altro della propria spezzata, oppure ne entra o ne esce; ossia in altre parole quante volte l'uno o l'altro dei pesi P_1 e P_2 si trovano sopra uno dei quattro punti A_2, 5, 7, B_2. La spezzata in questione avrà dunque otto vertici, indicando con questo nome anche i due suoi punti estremi. La costruzione di tali vertici non presenta alcuna difficoltà: basta cercare le otto posizioni in cui l'uno o l'altro dei detti pesi coincidono coi suddetti quattro punti; e per ognuna di quelle posizioni fare la somma algebrica delle ordinate RT, $R_1 T_1$, che vi corrispondono. Si otterrà in tal modo la spezzata richiesta $A'_1 M_2 M_3 \ldots M_8$; la quale sarà la spezzata vera dell'asta relativa ai due pesi.

Similmente si procederebbe se i pesi fossero tre o più. Siccome però non avremo nel seguito alcuna occasione di far uso di spezzate relative a più pesi, così ci limiteremo al cenno superiore.

V. *Sforzi sopportati dai punti di appoggio e dalle aste.*

69. La spezzata relativa alla reazione di uno dei punti di appoggio oppure ad un'asta qualunque, è, per così dire, la linea fondamentale; tanto per la determinazione dello sforzo corrispondente ad uno o più pesi collocati sopra la trave, in posizione invariabile; quanto anche per la ricerca dello sforzo massimo o minimo, quando quei pesi s'intendano variabili di posizione.

Comincieremo dal primo dei due problemi, che ha per iscopo di determinare quale è lo sforzo corrispondente ad un dato sistema di pesi fissi, collocati sulla trave; e passeremo poi all'altro problema di ricercare, cioè, nella supposizione che quei pesi siano mobili, quale è la posizione che devono assumere per rendere massimo lo sforzo.

Ora siccome il procedimento è il medesimo tanto per le questioni che si riferiscono alle reazioni dei punti d'appoggio, come per quelle che si riferiscono agli sforzi delle aste della trave, così in seguito parleremo in generale solamente delle aste, restando inteso che le regole esposte sono similmente applicabili alle reazioni dei punti d'appoggio.

A. *Sforzi dovuti a pesi concentrati.*

70. Se la trave è caricata da un solo peso P_1 (fig. 123) dato di posizione, e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata della trave, basterà evidentemente costruire la spezzata vera relativa a quell'asta, e prendere l'ordinata $R_1 T_1$, che si trova nella direzione del peso dato. Questa ordinata valutata nella scala delle forze darà lo sforzo sopportato dall'asta. I criterî poi esposti ai n. 58 a 62 potranno servire a determinare se si tratti di una tensione o di una pressione. A questo riguardo è però bene osservare, che la spezzata costituisce una linea continua; e quindi basta conoscere per una posizione qualunque del peso P_1 se l'asta sia in istato di tensione o di pressione per poter conoscere un tale stato in qualunque altra posizione. Questa osservazione permette spesso nei singoli casi di decidere facilmente, anche senza ricorrere ai precetti indicati, se si tratta di tensione o di pressione.

Se la trave è caricata da varî pesi $P_1, P_2, P_3, \ldots$ eguali fra loro, e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata, si costruirà la spezzata vera relativa ad uno dei pesi, e si sommeranno poi algebricamente le ordinate corrispondenti alle loro direzioni.

Così nella fig. 123, per l'asta 5.7, basterà fare algebricamente la somma $R_1 T_1 + R_2 T_2 + R_3 T_3$ e valutarla nella scala delle forze per avere lo sforzo cercato.

71. Se la trave è caricata da varî pesi $P_1, P_2, P_3, \ldots$, fra loro differenti, si potrebbero costruire le spezzate vere dell'asta, relative ad ogni peso, e sommare poi algebricamente le ordinate corrispondenti alle direzioni dei pesi, avendo cura di prendere ogni ordinata nella corrispondente spezzata vera. Ma siccome le spezzate vere corrispondenti a pesi diversi, sono fra loro omologiche-affini, e le ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa stanno fra loro come i diversi pesi, così basterà costruire una sola spezzata, per es. quella relativa al peso P_1, e servirsi di questa; purchè però le ordinate corrispondenti alle direzioni dei pesi $P_2, P_3, \ldots$, prima di essere sommate algebricamente colla ordinata corrispondente al peso P_1, siano moltiplicate per i rapporti $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}, \ldots$ Se dunque nella fig. 123 i tre pesi P_1, P_2, P_3 siano fra loro differenti e si supponga, che la spezzata in essa segnata sia la spezzata vera corrispondente al peso P_1, si dovrà prendere la somma

$$R_1T_1 + \frac{P_2}{P_1} \cdot R_2T_2 + \frac{P_3}{P_1} \cdot R_3T_3 .$$

Anzichè però servirsi della spezzata relativa ad uno dei pesi, giova meglio costruire la spezzata relativa alla luce. In tal caso, detta l la luce stessa, e dette $h_1, h_2, h_3, \ldots$ le ordinate corrispondenti alla direzione dei pesi, lo sforzo dell'asta sarà dato dall'espressione

$$\frac{P_1 h_1}{l} + \frac{P_2 h_2}{l} + \frac{P_3 h_3}{l} + \ldots$$

Per ottenere graficamente questa espressione, si può procedere nel modo seguente. Si costruisca la spezzata dell'asta relativa alla luce (fig. 124). Si prendano le $A_1 P'$, $A_1 P''$, $A_1 P'''$ eguali ai pesi dati, valutati nella scala delle forze, si projettino i punti T_1, T_2, T_3, in T'_1, T'_2, T'_3, e si tirino per P', P'', P''', tre rette rispettivamente parallele alle $B_1 T'_1$, $B_1 T'_2$, $B_1 T'_3$. Si otterranno così i segmenti $A_1 S'$, $A_1 S''$, $A_1 S'''$, la cui somma algebrica darà lo sforzo cercato. Quando la posizione della spezzata relativa alla luce riuscisse incommoda per il disegno, si ricorrerà alla regola del n. 48 per diminuirne le ordinate. In tal caso però le $A_1 P'$, $A_1 P''$, $A_1 P'''$ si prenderanno eguali a tante volte i pesi dati, quante sono le unità del coefficiente c, che supponiamo numero intero. Nella figura si è preso $c = 2$.

Qualora alcuni dei pesi dati fossero fra loro eguali, la costruzione superiore si semplifica. Infatti se fra gli n pesi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ve ne sono alcuni, per esempio $P_{m1}, P_{m2}, \ldots, P_{mk}$ tutti eguali a Q, l'espressione del numero precedente, ponendo $h_{m1} + h_{m2} + \ldots + h_{mk} = H$, diventa

$$\frac{QH}{l} + \ldots ,$$

cioè per i pesi eguali si possono sommare le relative ordinate RT, ed operare poi sulla somma H, come sopra si è fatto per ognuna delle h_1, h_2, ...

Ecco un esempio di questo caso. La trave AB (fig. 125) di un ponte metallico, è carica di un treno di locomotive Engerth. Domandasi lo sforzo sopportato dall'asta 5.6, in causa del peso delle macchine.

Come peso delle ruote motrici (segnate in figura con circoli maggiori), si sono assunte 13 tonnellate, e come peso delle altre ruote $8,^{ton.}5$. Si è poi costruita la spezzata relativa alla luce $A_1 M_1 B_1$, per la quale si è preso $c = 10$. Fatta quindi la somma delle ordinate corrispondenti alle ruote motrici, si è preso $A_1 T_1$ eguale ad $\frac{1}{4}$ di tal somma, e ciò per non estendere troppo il disegno. Similmente si è preso $A_1 T_2$ eguale ad $\frac{1}{4}$ della somma delle ordinate relative alle altre ruote. Assunto poi come scala delle forze $1^{mm} = 4$ tonnellate, si sono prese le distanze $A_1 P'_1$ ed $A_1 P'_2$ rispettivamente eguali a $4 \times 10 \times 13$ tonnellate, e $4 \times 10 \times 8,5$ ton., ossia eguali a 130^{mm} ed 85^{mm} rispettivamente. Tirate quindi le $P'_1 S'$, $P'_2 S''$ rispettivamente parallele alle $B_1 T_1$, $B_1 T_2$, si sono ottenuti i due segmenti $A_1 S'$, $A_1 S''$, la cui somma AT rappresenta lo sforzo cercato dell'asta 5. 6, che è di circa 190 tonnellate di tensione (n. 60).

Se si volesse per questo stesso caso trovare la reazione dell'appoggio in B, si potrebbe similmente servirsi della spezzata di questo appoggio relativa alla luce. Ma si potrà anche più semplicemente costruire due spezzate vere $C_1 A_1$, $C'_1 A_1$, nelle quali si è fatto $B_1 C_1 = 4 \times 13$ ton., ossia $= 13^{mm}$, $B_1 C'_1 = 4 \times 8,5$, ossia $= 8,^{mm}5$. La reazione dell'appoggio in B sarà allora data dalla quarta parte della somma delle ordinate, corrispondenti alle ruote, e prese rispettivamente nelle due spezzate vere. Questa quarta parte è rappresentata nel disegno da $B_1 R$, che corrisponde a circa 105 tonnellate.

73. Per rendere più rapida la costruzione, si osservi che onde ottenere speditamente la somma delle ordinate, non occorre portare col compasso ad una ad una queste ordinate l'una in seguito all'altra lungo una medesima retta. Più semplicemente si opera come segue. Presa col compasso la prima ordinata $r_1 t_1$, la si porti in $r_2 n$ di seguito alla seconda, e tenuta ferma una punta del compasso in n, lo si apra, portando l'altra punta in t_2. Con ciò l'apertura del compasso comprenderà la somma delle due prime ordinate. Questa apertura poi si porti in $r_3 n'$ di seguito alla terza ordinata, e si proceda come prima. In tal modo, secondo la capacità del compasso, si arriverà alla somma di una parte maggiore o minore di ordinate, o di tutte; e si renderà più rapida la costruzione della cercata somma totale. Similmente è da notare, che non occorrerà sempre di costruire tutta intera la spezzata; bastando limitarsi a quei lati che intersecano la direzione dei pesi.

74. Le spezzate delle aste possono servire a determinare gli sforzi da esse sopportati anche nel caso, che le forze agenti sopra la trave non siano fra loro parallele, ma abbiano direzioni qualunque. Siccome però questo caso generalmente non si presenta in pratica, così ci limiteremo al seguente esempio.

Sia AMNBROP (fig. 126) una travatura triangolare, fissata nei punti A e B, e

sollecitata dalle tre forze 1, 2, 3, dirette secondo le frecce, ed applicate ai nodi M, N, O. Domandasi qual sia lo sforzo sopportato dall'asta MN.

La sola condizione che i punti A e B siano fissi non basta a determinare la direzione e l'intensità delle reazioni in A e B; per cui il problema è indeterminato. Se si aggiunge la condizione che le reazioni in A e B siano parallele alla risultante delle tre forze 1, 2, 3, il problema diventa determinato; e si potrà ottenere lo sforzo nell'asta MN, operando come segue.

Sia O il centro dell'asta MN, di cui si ricerca lo sforzo. Si costruiscano tre circoli, due coi diametri AO ed OB rispettivamente, ed il terzo col centro in O e tangente alla MN; e si tirino per O altrettante parallele ed altrettante normali alle forze date. Le normali intersecheranno i due primi circoli nei punti I I′, II II′, III III′ rispettivamente: le parallele taglieranno il terzo circolo nei punti I″, II″, III″ rispettivamente. Si prenda poi I′. 1 eguale alla prima forza nella data scala, e tirata la I″. 1 si costruisca la spezzata I. 1′. 1″. q_1, i cui lati sono successivamente paralleli ai tre raggi I″ I′, I″ O, I″ 1. Similmente sulle O II″, OIII″ si determineranno i punti q_2, q_3. Si tirino finalmente le I N_1, II′ N_2, III′ N_3 rispettivamente normali alle I′ q_1, IIq_2, IIIq_3. La somma $M_1 N_1 + M_2 N_2 - ON_3$, valutata nella scala delle forze, rappresenterà lo sforzo sopportato dall'asta MN.

Questo procedimento, come è facile dimostrare, è basato sulla costruzione della spezzata vera relativa ad ognuna delle forze, e può estendersi naturalmente ad un numero maggiore di forze. Esso vale anche per il caso che le forze non siano applicate ai nodi, ma ad altri punti, esclusi quelli delle aste concorrenti in A e B; e resta il medesimo anche quando le reazioni in A e B diventino nulle, quando cioè le forze sollecitanti la trave formano un sistema per sè equilibrato, nel qual caso le due aste che concorrono in A e le due che concorrono in B non soffrono alcuno sforzo. Che se a tutti i nodi della trave, compresi i due A e B, fossero applicate delle forze, sotto l'azione delle quali essa fosse in equilibrio senza essere appoggiata, e si volesse conoscere lo sforzo d'un'asta determinata avente un centro C, basterà supporre aggiunti due triangoli A′AP, B′BR agli estremi della serie costituente la trave, e ciò col prendere due punti A′ e B′ ad arbitrio. Si opererà allora sui tre punti A′, B′, C, come sopra si è operato sui tre A, B, O.

B. *Sforzi dovuti a peso uniforme.*

75. Anche quando si tratti di peso uniformemente distribuito lungo la $M_1 M_n$ (fig. 127) sia per tutta la lunghezza, sia per una parte di essa, e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata, si può far uso della relativa spezzata.

Suppongasi che lungo la $M_1 M_n$ sia distribuito dal punto R′ al punto R″ un peso uniforme, la cui azione venga trasmessa alla trave mediante i sostegni verticali *e*, nel modo stesso indicato al n. 36. Si domanda quale sia lo sforzo causato dal detto peso sopra un'asta determinata della trave.

Sia per la data asta, UKIV una porzione della spezzata relativa alla luce, nella costruzione della quale, per tutta generalità, supporremo che siasi fatto uso del coefficiente *c*. Si prenda un punto M determinato dalla distanza variabile $M_1 M = u$,

e sia u compreso fra $M_1R' = u_1$ ed $M_1R'' = u_2$. Calata l'ordinata $RT = y$ corrispondente al punto M, essa rappresenterà, nella scala delle forze, lo sforzo che l'asta in questione sopporterebbe, qualora sul punto M si collocasse un peso $\frac{l}{c}$, essendo l la luce AB. Ora nel caso nostro il peso collocato in M è la porzione elementare di peso uniforme compresa entro i limiti u ed $u + du$. Se un tale peso uniforme per unità di lunghezza sia espresso da p e si ponga $P = pl$, il peso elementare sarà espresso da $\frac{P}{l} du$. Lo sforzo dZ, causato da questo peso elementare si otterrà dunque dalla proporzione

$$\frac{l}{c} : y = \frac{Pdu}{l} : dZ$$

da cui $dZ = \frac{cPydu}{l^2}$. E lo sforzo totale Z dell'asta dovuto al peso uniforme compreso fra R' ed R'' sarà dato da

$$Z = \frac{cP}{l^2} \int_{u_1}^{u_2} ydu \, .$$

Ma l'integrale $\int_{u_1}^{u_2} ydu$ esprime l'area compresa fra l'orizzontale A_1B_1, la spezzata e le due ordinate R_1T_1, R_2T_2 corrispondenti ai punti R' ed R''. Detta S quest'area, sarà dunque

$$Z = \frac{cPS}{l^2} \, .$$

Se l'area S si trasforma in un rettangolo, che abbia per base la luce l e per altezza h, si avrà

$$Z = \frac{cPh}{l} \, .$$

Attesa la forma della spezzata, l'area S è sempre facilmente trasformabile con procedimenti grafici in un rettangolo di base l; per cui l'altezza h è una quantità facile da costruirsi. Portata allora quest'altezza in A_1H (fig. 128), e preso $A_1P' = cP$, si tirerà la $P'Z$ parallela a B_1H, ed il segmento A_1Z darà lo sforzo cercato dell'asta.

76. Se il peso uniforme è distribuito lungo varî tratti $R'_1 R''_1$, $R'_2 R''_2$, ..., fra loro staccati, si avranno più aree analoghe, la cui somma dovrà ridursi ad un rettangolo di base l. Se tutta la $M_1 M_n$ fosse caricata uniformemente bisognerà prendere in considerazione tutta l'area compresa fra la orizzontale $A_1 B_1$ e la spezzata. Nel fare la riduzione dell'area o delle aree alla base l, bisogna naturalmente distinguere le aree positive dalle negative, quelle cioè che si trovano da una parte da quelle che si trovano dall'altra della orizzontale $A_1 B_1$.

Se una trave fosse caricata da un peso uniforme, distribuito sopra una certa lunghezza ed inoltre da varî pesi isolati di data posizione, e si volesse conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata in causa di questi carichi, bisognerà

sommare algebricamente lo sforzo causato dal peso uniforme con quello causato dai pesi isolati.

Così se nella fig. 125, oltre allo sforzo causato nell'asta 5.6 dal treno di locomotive Engerth, si volesse avere quello relativo al peso proprio della trave, che supporremo uniformemente distribuito sulla sua lunghezza e di una tonnellata per metro corrente, si potrebbe procedere come segue. Essendo la spezzata $A_1 M_1 B_1$ bilatera, così l'altezza h del rettangolo avente per base la luce $A_1 B_1$ ed un'area eguale a quella del triangolo $A_1 M_1 B_1$, si avrà prendendo semplicemente $M'm = \frac{1}{2} M'M_1$. Prendendo dunque, come sopra (n. 72), la scala delle forze di $1^{mm} = 4$ tonnellate, ed essendo la luce di 36^m e $c = 10$, si prenderà $A_1 P' = \frac{10 \times 36}{4} = 90^{mm}$, e fatto $A_1 H = M'm$, si tirerà la $P'Z$ parallela alla $B_1 H$. Il segmento $A_1 Z$ darà lo sforzo di tensione sopportato dall'asta 5.6 per il peso proprio della trave, e che è di circa 36 tonnellate. Questo sforzo aggiunto alle 190 tonnellate di tensione dovute al treno di locomotive dà un totale di circa 226 tonnellate.

77. Lo sforzo causato in un'asta da un peso concentrato può confrontarsi con quello prodotto da un peso uniformemente distribuito. A tale riguardo è notevole la seguente proprietà, che è relativa agli sforzi di quelle aste che hanno una spezzata bilatera.

Supponiamo che sia costruita la spezzata $A_1 M_1 B_1$ (fig. 129) relativa alla luce di una tale asta, e che nel costruirla siasi fatto uso del coefficiente c. L'ordinata $M'M_1$ rappresenterà nella scala delle forze lo sforzo sopportato dall'asta, qualora si caricasse la trave nella verticale passante per M' col peso $\frac{l}{c}$. Che se invece la trave si caricasse nella stessa verticale con un peso P concentrato, allora posto $M'M_1 = 2h$, lo sforzo X dell'asta si avrebbe dalla proporzione $X : 2h = P : \frac{l}{c}$, da cui

$$X = \frac{2cPh}{l}.$$

Che se lo stesso peso P si distribuisca uniformemente lungo la trave entro le verticali condotte per A_1 e B_1, qualunque del resto sia la distribuzione dei sostegni e, che trasmettono il peso alla trave; lo sforzo dell'asta sarà dato dalla

$$Z = \frac{cPS}{l^2} \qquad \text{(n. 75)},$$

dove S indicherà tutta l'area del triangolo $A_1 M_1 B_1$. Ma si ha $S = lh$, dunque $Z = \frac{cPh}{l}$, cioè

$$Z = \frac{1}{2} X.$$

Dunque: « Un peso P sulla verticale passante per il vertice d'una spezzata bilatera, produce nell'asta rispettiva uno sforzo doppio di quello prodotto dallo stesso peso P distribuito uniformemente fra le verticali passanti per i punti estremi della spezzata ».

78. Le aree delle spezzate trilatere e bilatere, comprese fra le verticali passanti per i punti d'appoggio, possono facilmente esprimersi in funzione delle quantità fondamentali, che servono alla loro costruzione.

Sia $A_1 M_1 N_1 B_1$ (fig. 130) la spezzata relativa alla luce d'un'asta, il cui centro O trovisi fra le verticali suddette, per costruire la quale siasi fatto uso del coefficiente c. Avendosi (n. 43) $A_1 M' = m$, $B_1 N' = n$, $A_1 O' = a$, $B_1 O' = b$, $A_1 B_1 = l$; e ponendo inoltre $M' M_1 = y_1$, $N' N_1 = y_2$ si avrà (n. 44)

$$y_1 = \frac{bm}{cq}, \qquad y_2 = \frac{an}{cq}$$

e quindi l'area S del quadrilatero $A_1 M_1 N_1 B_1$, cioè

$$S = \tfrac{1}{2} m y_1 + \tfrac{1}{2} n y_2 + \tfrac{1}{2} (l - m - n)(y_1 + y_2)$$

diverrà con facile riduzione

$$S = \frac{l}{2cq}(an + bm - mn).$$

Nel caso che il punto M' coincida con A_1, oppure N' con B_1, la spezzata diventa bilatera e si ha rispettivamente $m = 0$, oppure $n = 0$; dunque in questi casi sarà $S = \frac{anl}{2cq}$, oppure $S = \frac{bml}{2cq}$. Se il centro O cade sulla verticale per A_1, oppure su quella per B_1, sarà $a = 0$, oppure $b = 0$; e quindi $S = \frac{ml}{2cq}(b - n)$, oppure $S = \frac{nl}{2cq}(a - m)$.

Se vi è un punto comune di passaggio, ossia se M', N', O' coincidono (n. 47 e 49), sarà $l - m - n = 0$, e quindi $S = \frac{1}{2} m y_1 + \frac{1}{2} n y_2$, cioè per essere in questo caso $m = a$, $n = b$,

$$S = \frac{abl}{2cq}.$$

Se il centro è esterno alle verticali (fig. 131), e si ponga analogamente $A_1 M' = m$, $B_1 N' = n$, $A_1 O' = a$, $B_1 O' = b$, $M' M_1 = y_1$, $N' N_1 = y_2$; ed inoltre $M' O'' = z_1$, $N' O'' = z_2$, $M' O' = t_1$, $N' O' = t_2$, si avrà $z_1 + z_2 = l - m - n$, e $z_1 : z_2 = y_1 : y_2$, e sarà pure $y_1 = \frac{bm}{cq}$, $y_2 = \frac{an}{cq}$. Da questi valori si dedurrà facilmente l'area S_1 del triangolo $A_1 M_1 O''$

$$S_1 = \frac{bm^2 t_2 l}{2cq(an + bm)}$$

e l'area S_2 del triangolo $B_1 N_1 O''$

$$S_2 = \frac{an^2 t_1 l}{2cq(an + bm)}.$$

Le due aree S_1, S_2 hanno segno opposto, dunque l'area totale sarà

$$S_1 - S_2 = \frac{(bm^2 t_2 - an^2 t_1) l}{2cq(an + bm)}$$

e si avrà $S_1 = S_2$ quando sia

$$bm^2 t_2 = an^2 t_1.$$

79. Se il centro è a distanza infinita, i rapporti $\frac{a}{t_1}$, $\frac{b}{t_1}$, $\frac{a}{t_2}$, $\frac{b}{t_2}$ diventano eguali all'unità. Quanto ai rapporti $\frac{a}{q}$, $\frac{b}{q}$, essi possono facilmente ottenersi nel

modo seguente. Sia VU (fig. 132) una linea orizzontale, VC la direzione nella quale trovasi il centro a distanza infinita, VT una parallela all'asta, e siano ω ed α gli angoli formati da quelle rette, com' è indicato in figura. Ponendo mente al significato delle lettere a, b, q, si vedrà facilmente che quando il centro va all'infinito i rapporti $\frac{a}{q}, \frac{b}{q}$ diventano ambedue eguali a $\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}$. Si ha dunque per il caso del centro all'infinito

$$S_1 = \frac{m^2 l}{2c(m+n)} \cdot \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad S_2 = \frac{n^2 l}{2c(m+n)} \cdot \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$S_1 - S_2 = \frac{(m-n)l}{2c} \cdot \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Le aree saranno dunque eguali, in questo caso, quando sia $m = n$.

80. Facendo ora uso della formola $Z = \frac{cPS}{l^2}$ (n. 75), si avrà l' espressione algebrica dello sforzo d' un' asta nel caso di un peso uniformemente distribuito.

Se l'asta ha il suo centro fra le verticali condotte per i punti d'appoggio, e la trave sia caricata da un peso $P = pl$ uniformemente distribuito fra le verticali stesse, lo sforzo da essa sopportato sarà espresso da

$$Z = \frac{p}{2q}(an + bm - mn),$$

la quale formola facilmente si modifica per i casi, sopra notati, nei quali sia $m = 0$, od $n = 0$; $a = 0$, oppure $b = 0$. Se l'asta ha un punto di passaggio comune, si ha

$$Z = \frac{abp}{2q}.$$

Se l'asta invece ha il suo centro esternamente alle verticali passanti per i punti di appoggio, ed il peso uniforme si estenda fra le verticali condotte per A_1 e per O'' (fig. 131), lo sforzo dell'asta sarà dato dalla

$$Z_1 = \frac{bm^2 t_2 p}{2q(an + bm)}.$$

Similmente se il peso uniforme si estende da O'' fino a B_1, lo sforzo, prescindendo dal segno, sarà espresso da

$$Z_2 = \frac{an^2 t_1 p}{2q(an + bm)}.$$

E quando il peso uniforme si estende a tutto l'intervallo compreso fra le verticali dei punti d'appoggio, sarà

$$Z = \frac{(bm^2 t_2 - an^2 t_1)p}{2q(an + bm)}.$$

Se il centro è a distanza infinita si ha più semplicemente nei tre casi superiori

$$Z_1 = \frac{m^2}{m+n} \cdot \frac{p\cos\omega}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$Z_2 = \frac{n^2}{m+n} \cdot \frac{p\cos\omega}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$Z = (m-n)\frac{p\cos\omega}{2\operatorname{sen}\alpha}.$$

Queste formole si semplificano ulteriormente, se la direzione VC, in cui trovasi il centro dell'asta, sia orizzontale: si ha allora $\omega = 0$, $\cos\omega = 1$. Questo caso si presenta per tutte le diagonali delle travi a tavole parallele orizzontali.

81. Al n. 36 si è supposto che il peso P, trasportandosi lungo la trave, fosse immediatamente sopportato da una serie di travi semplici $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ..., appoggiate a sostegni verticali $e_1, e_2, e_3, \ldots$, col mezzo dei quali il peso P veniva finalmente a gravitare sui nodi della trave triangolare. Ora può avvenire che oltre alla serie di travi semplici $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ..., vi sia una seconda serie di travi semplici $L_1 L_2$, $L_2 L_3$, ..., sostenute da altri sostegni verticali $g_1, g_2, g_3, \ldots$, analoghi agli $e_1, e_2, e_3, \ldots$, ed i quali trasmettano l'azione di un altro peso Q ai nodi della trave triangolare. Lo sforzo sopportato da un'asta determinata durante il transito del peso Q sarà pure rappresentabile da una spezzata; ma questa in generale sarà differente dalla spezzata dovuta al peso P. Anzi le due spezzate, sebbene relative ad una medesima asta, non saranno neppure generalmente omologiche-affini; poichè, come sopra si è veduto, la posizione dei vertici della spezzata dipende dalla posizione dei punti E, ai quali, mediante i sostegni $e_1, e_2, e_3, \ldots$ viene trasmessa l'azione del peso; e questa posizione differirà in generale da quella dei punti G, relativi ai sostegni $g_1, g_2, g_3, \ldots$. Se dunque lungo la serie delle travi $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ... siano collocati dei pesi concentrati, ed altri pesi cencentrati siano collocati lungo la serie delle travi $L_1 L_2$, $L_2 L_3$, ..., e si voglia conoscere lo sforzo sopportato da un'asta determinata in seguito a tutti questi pesi, bisognerà costruire due spezzate per la medesima asta, relative alle dette due serie di travi; e determinato lo sforzo per ciascuna serie farne poi la somma algebrica. La stessa regola vale pure, qualora invece di pesi concentrati si avessero dei pesi uniformemente distribuiti, collocati lungo le dette due serie di travi semplici. Le regole superiormente sviluppate si applicheranno allora ad ogni serie, e se ne sommeranno poi algebricamente i risultati.

Nell'esempio dato al n. 72 (fig. 125) si è supposto che il palco del ponte fosse sostenuto unicamente dai nodi superiori della trave, ai quali quindi veniva trasmesso il peso del treno di locomotive Engerth colà considerato. Ma si potrebbe anche supporre che il palco del ponte fosse sopportato in parti eguali dai nodi superiori e dagli inferiori; qualora cioè questo palco non fosse collocato superiormente alla trave, come indica la figura, ma fosse disposto lungo la orizzontale AB, e le travi trasversali fossero collegate contemporaneamente ai nodi superiori ed ai nodi inferiori della trave principale. In tal caso per l'asta 5.6 ivi considerata, bisognerebbe costruire due spezzate, una relativa alla serie dei nodi superiori, l'altra relativa alla serie dei nodi inferiori. Di queste spezzate la prima sarebbe quella $A_1 M_1 B_1$ già disegnata, la seconda sarebbe trilatera. Il peso di ciascuna ruota dovrebbe allora per metà essere considerato nell'una, per metà nell'altra spezzata. Similmente il peso proprio della stessa trave (fig. 125) si è al n. 76 considerato come distribuito uniformemente lungo il palco $A_2 B_2$, cioè gravitante sui nodi superiori della trave. Se questo peso s'intendesse gravitare anche sui nodi inferiori, bisognerebbe allora, come per il peso del treno di locomotive, considerare l'altra spezzata dell'asta 5.6, cioè quella relativa ai nodi inferiori.

Spesso avviene però che le due spezzate in gran parte coincidono, quando ambedue siano relative alla luce; e ciò facilita la loro costruzione. Eccone due esempî. Domandasi

qual sia lo sforzo sopportato dall'asta 1.3 della trave AB (fig. 133), in causa del peso proprio della trave, nella supposizione, che tale peso proprio sia per metà distribuito uniformemente lungo la tavola superiore $A_2 B_2$, e per metà lungo la tavola inferiore AB. Sia la luce della trave 16^m, ed il suo peso una tonnellata per metro corrente. Rispetto alla serie dei nodi A_2, 1, 3, 5, 7, B_2, che qui rappresentano i punti E, l'asta 1.3 possiede la spezzata trilatera relativa alla luce $A_1 M_1 N_1 B_1$, per la quale in figura si è preso $c=6$. Per la serie dei nodi A, 2, 4, 6, B, che rappresentano i punti G, l'asta possiede invece la spezzata bilatera $A_1 L B_1$ la quale, qualora si ritenga $c=6$, coincide nei tratti $A_1 M_1$, $B_1 N_1$ colla spezzata trilatera. Ora tirata $M_1 D$ parallela alla $A_1 N_1$, il triangolo avente per base $A_1 B_1$ e per altezza la $D'D$ avrà l'area eguale a quella del quadrilatero $A_1 M_1 N_1 B_1$. Preso dunque $A_1 H$ eguale alla semisomma delle due altezze $L' L$, $D' D$, il rettangolo avente la base $A_1 B_1$ e l'altezza $A_1 H$ avrà l'area eguale a quella del triangolo $A_1 L B_1$, più quella del quadrilatero $A_1 M_1 N_1 B_1$. Se dunque si prende la scala delle forze di $1^{mm} = 2$ ton., e si faccia $A_1 P = \frac{6.16}{2} = 48^{mm}$, tirata PZ parallela a $B_1 H$, il segmento $A_1 Z$ darà nella scala delle forze lo sforzo (pressione) sopportato dall'asta 1.3. Esso è di circa 23 tonnellate.

Come secondo esempio cerchiamo lo sforzo sopportato dalla diagonale 2.3 (fig. 133) in causa del peso proprio della trave, supposto distribuito come sopra. Si troverà facilmente che per la serie dei nodi superiori, l'asta 2.3 ha la spezzata $A_1 M_1 N_1 B_1$ (fig. 134), nella quale $c = 3$. Per i nodi inferiori invece la spezzata è $A_1 LKB_1$. Ora riducendo la somma delle aree dei due triangoli QKB_1, $ON_1 B_1$ ad un rettangolo colla base $A_1 B_1$ si trova l'altezza $A_1 h_1$. Riducendo invece analogamente la somma delle aree dei due triangoli $A_1 M_1 O$, $A_1 L Q$ si trova l'altezza $A_1 h_2$. Fatta la differenza $A_1 H$ di queste due altezze, e preso $A_1 P = 24^{mm}$, poichè $c=3$, si tiri PZ parallela a $B_1 H$. Il segmento $A_1 Z$ darà lo sforzo (pressione) sopportato dalla diagonale 2.3; esso è di circa 8 tonnellate.

Se invece di due serie di sostegni, se ne avessero tre o più si costruirebbero tre o più spezzate, procedendo come ora si è mostrato per due serie. Il caso di tre serie si presenterebbe per es., qualora nella trave AB (fig. 133) si considerasse il peso proprio come diviso in tre parti, di cui la prima fosse uniformemente distribuita lungo la AB, la seconda uniformemente distribuita lungo la $A_2 B_2$ e la terza finalmente come uniformemente distribuita lungo la linea spezzata A1234567B, costituita dalle diagonali. Se in tale supposizione si volesse avere lo sforzo sopportato da un'asta determinata, si dovrebbero per quest'asta costruire tre spezzate: una relativa ai nodi superiori $A_2 1357 B_2$, la seconda relativa agl'inferiori A246B, e la terza infine relativa alla serie A1234567B.

82. Che se si volesse anche tener conto della diversa sezione, e quindi del diverso peso che hanno le singole aste della trave, si avrebbe da sciogliere il seguente problema: Dato il peso d'un'asta determinata, supposta prismatica, domandasi lo sforzo che in causa di tal peso sopporta un'altra asta determinata della trave. Per avere lo sforzo cercato basterà in tal caso costruire una spezzata dell'asta di cui si cerca lo sforzo, e ciò per una serie di nodi arbitraria, purchè però nella serie vi

siano i due nodi appartenenti a quell'asta di cui è dato il peso. Oltre a questi due nodi basterà dunque prendere i punti d'appoggio A e B della trave.

Esempio. Data la trave fig. 133 e dato il peso dell'asta 5.6, supposta prismatica, domandasi quale sforzo questo peso produca nell'asta 2.4. Si costruisca la spezzata relativa alla luce dell'asta 2.4 rispetto ai nodi A, 5, 6, B, e si troverà la $A_1 N_1 B_1$ (fig. 135), per la quale si è preso $c = 2$; mentre i due punti di passaggio dell'asta 2.4 sono, per i nodi assunti, il punto A ed il nodo 5 (n. 53 in fine). Lo sforzo cercato sarà dunque proporzionale all'area del trapezio $N' N_1 RT$, determinato dalle verticali condotte per i nodi 5 e 6. Questo trapezio deve ora ridursi in un rettangolo avente la base $A_1 B_1$. In figura si è preso $B_1 G =$ alla semisomma delle basi, e $B_1 D =$ a quattro volte l'altezza $N_1 R$ del trapezio. Tirata poi GH parallela ad $A_1 D$, si è ottenuto il segmento $B_1 H$, tale che un rettangolo avente $A_1 B_1$ per base e $B_1 H$ per altezza sarebbe quadruplo del trapezio $N' N_1 RT$. Si è poi supposto che l'asta 5.6 pesi 250 chilogrammi; e siccome la sua projezione orizzontale equivale alla ottava parte della luce, così il peso P (n. 75) è, nel caso attuale, di $8 \times 250 = 2000$ chilogrammi. Se dunque come scala delle forze si prende $1^{mm} = 10$ chil., essendo $c = 2$, ed essendosi presa $B_1 H$ quadrupla, si dovrà porre $B_1 P' = \frac{2 \times 2000}{4 \times 10} = 100^{mm}$. Tirata quindi $P' Z$ parallela ad $A_1 H$ si avrà nella $B_1 Z$ lo sforzo cercato dell'asta 2.4, il quale è una tensione di 225 chil. circa. La $B_1 H$ si è presa quadrupla, per evitare le intersezioni sotto angolo troppo acuto.

Se l'asta di cui è dato il peso è verticale, e si voglia conoscere lo sforzo da essa prodotto in un'altra asta qualunque, si potrà supporre concentrato il peso dell'asta verticale nel suo nodo superiore od inferiore (n. 61), e si costruirà la spezzata dell'altra asta qualunque rispetto ai due punti d'appoggio e ad un tal nodo. Anche la ricerca dello sforzo longitudinale sopportato dall'asta verticale per il proprio peso, può, dopo le considerazioni superiori, facilmente eseguirsi.

VI. Sforzi massimi e minimi.

83. Supponiamo ora che il carico non sia fisso, ma che possa prendere diverse posizioni lungo la $M_1 M_n$ (fig. 79). Domandasi quale sia la posizione di questo carico, che rende massimo o minimo lo sforzo sopportato da un'asta determinata.

A. *Sforzi massimi e minimi per pesi concentrati.*

Si consideri prima il caso di uno o più pesi P_1, P_2, ... concentrati; i quali mentre transitano lungo la $M_1 M_n$ mantengono fra di loro invariata la rispettiva distanza. Supponiamo che i pesi transitino sopra la $M_1 M_n$ nella direzione da M_1 verso M_n, ed in un momento qualunque del transito riferiamo la posizione loro alla trave mediante la distanza variabile u di ogni peso P dal punto M_1, ponendo $M_1 P_1 = u_1$, $M_1 P_2 = u_2$, ... Le differenze $u_1 - u_2 = d_1$, $u_1 - u_3 = d_2$, ... saranno, per ciò che si è supposto, costanti.

Ora lo sforzo N, prodotto da un peso qualunque P sopra un'asta determinata, è sempre una funzione lineare di u (n. 39), cosicchè si potrà porre $N = \alpha + bu$. In

questa funzione i coefficienti α e b restano inalterati, finchè la direzione del peso P passa fra due vertici successivi della spezzata dell' asta che si considera; comprendendo nella parola *vertice* anche il primo e l' ultimo punto della spezzata. Ora si ha $u_1 - u = d$; dunque ponendo $a = \alpha + bd$, sarà $N = a + bu_1$. E quindi lo sforzo totale sopportato dall'asta sotto l'azione dei pesi $P_1, P_2, \ldots$ sarà espresso da

$$N = \Sigma a + u_1 \Sigma b,$$

nella quale espressione sotto i segni di sommazione s' intendono contenuti quei termini che appartengono ai pesi che si trovano sopra la trave. Per i pesi infatti che non vi fossero ancora montati, o che vi fossero già usciti, i coefficienti a e b sono nulli.

Le quantità Σa e Σb restano inalterate al variare di u_1, finchè nessuno dei pesi P passi oltre a qualche vertice della spezzata dell'asta. Infatti quando uno dei pesi, per es. P_k, passa oltre un vertice, i coefficienti α_k, b_k che gli sono relativi, cambiano bruscamente di valore, e quindi cambieranno pure bruscamente di valore le due somme Σ. Supponiamo ora che i pesi P si trovino in posizione tale, che essi possano muoversi alcun poco tanto avanzandosi quanto anche retrocedendo, senza che alcuno di essi passi oltre un vertice della spezzata. In tal caso il valore di N, col crescere di u_1 aumenterà o diminuirà, secondochè la derivata $\frac{dN}{du_1}$ sarà positiva o negativa. Ma si ha $\frac{dN}{du_1} = \Sigma b$; dunque lo sforzo N sopportato dall'asta cresce o diminuisce coll' avanzare dei pesi, secondochè la somma Σb è positiva o negativa. Se i pesi invece retrocedono, lo sforzo N diminuisce o cresce, secondochè la detta somma è positiva o negativa. Da questa considerazione risulta, che nella posizione sopra supposta, quando cioè i pesi possono alcun poco avanzarsi ed anche retrocedere senza che alcun peso passi oltre un vertice della spezzata dell'asta, non può aver luogo nè un massimo nè un minimo valore di N. Un tale valore massimo o minimo non può dunque aver luogo, se non che quando la direzione di qualcuno dei pesi P passi per un vertice della spezzata dell'asta. Se per brevità si chiami *coincidenza* un tale passaggio, si potrà dire:

« Quando lo sforzo sopportato da un'asta è massimo o minimo, ha luogo coincidenza di uno dei pesi con uno dei vertici della spezzata ».

Questa proposizione è per sè evidente, quando si tratta di un solo peso; poichè è chiaro che il massimo o minimo sforzo, ch' esso può produrre in un' asta determinata, non può aver luogo, senza che la direzione del peso passi per un vertice della spezzata dell'asta. Ma anche quando si tratta di più pesi, se ne può riconoscere direttamente la verità, osservando che gli sforzi sopportati da un'asta durante il transito di più pesi, sono pure rappresentabili da una spezzata; e che questa ha tanti vertici, quante sono le coincidenze dei pesi coi vertici della spezzata dell' asta (n. 68). Ora le massime e le minime ordinate d' una spezzata qualunque devono necessariamente essere quelle di qualche suo vertice; dunque il massimo o minimo sforzo d' un' asta non può aver luogo, se non quando la direzione di uno dei pesi passi per un vertice della spezzata dell'asta.

Se la somma Σb fosse nulla, allora lo sforzo N resterebbe inalterato, sia che i pesi si avanzino, sia che retrocedano; semprechè nessuno di essi oltrepassi un

vertice della spezzata dell'asta. In tal caso nella spezzata relativa al sistema di pesi vi è un lato orizzontale, per il quale quindi tutte le ordinate sono fra loro eguali.

84. Ma sebbene non possa aver luogo nè massimo nè minimo nello sforzo d'un'asta, senza la coincidenza di un peso con un vertice, una tale coincidenza non produce però necessariamente un caso di massimo o di minimo. Sia infatti per una data posizione dei pesi P, per la quale non hanno luogo coincidenze, la somma Σb positiva e si facciano avanzare i pesi, finchè avvenga un solo passaggio, per es. del peso P_k oltre il vertice V della spezzata dell'asta che si considera. La somma Σb cambierà allora bruscamente di valore. Se un tale nuovo valore è anch' esso positivo, è evidente che la coincidenza di P_k con V non darà luogo nè a massimo nè a minimo; poichè, essendo in tal caso il coefficiente differenziale $\frac{dN}{du_1}$ quantità positiva tanto prima che dopo il passaggio, il valore di N seguiterebbe a crescere tanto prima che dopo. Ad una simile conclusione si arriverebbe qualora la somma Σb fosse negativa tanto prima che dopo la coincidenza di P_k con V.

Se invece la detta somma cambia di segno dopo la coincidenza, allora, come è facile dedurre, avrà luogo massimo o minimo: e precisamente:

« La coincidenza di uno dei pesi con un vertice della spezzata dell'asta corrisponde ad un massimo o ad un minimo, secondochè la somma Σb passi da positiva a negativa o viceversa ».

Come casi particolari sono da rilevarsi i seguenti. Se vi sono due coincidenze successive tali, che per la prima di esse la somma Σb passi da un valore finito Σ' a zero, e per la seconda da zero ad un altro valore finito Σ'', si troverà facilmente, che qualora Σ' e Σ'' hanno il medesimo segno non ha luogo nè massimo nè minimo. Sa invece Σ' sia positiva e Σ'' negativa, la N è un massimo per tutte le infinite posizioni dei pesi P, comprese fra le due coincidenze: sarebbe invece un minimo se Σ' fosse negativa e Σ'' positiva.

La prima di tutte le coincidenze ha luogo quando il primo dei pesi P trovasi sul primo vertice (sul punto d'origine) della spezzata, e l'ultima quando l'ultimo peso trovasi sopra l'ultimo vertice (sul punto ultimo). Per la prima di queste coincidenze estreme, la somma Σb passa da zero ad una quantità finita, e per la seconda da una quantità finita a zero. Ma, come è facile vedere, nè per l'una nè per l'altra ha luogo massimo o minimo.

Si noti anche che nella presente ricerca si possono considerare come non esistenti i lati estremi della spezzata, qualora essi coincidano coll'asse al quale essa è riferita.

Ritornando ora al caso generale, si vede che la ricerca delle posizioni dei pesi P, per le quali lo sforzo d'un' asta determinata diventa massimo o minimo si riduce al seguente procedimento:

a) S'immagini che la serie dei pesi P transiti lungo la $M_1 M_n$, e si stabiliscano le coincidenze dei pesi coi vertici della spezzata dell'asta nell' ordine nel quale tali coincidenze successivamente si producono;

b) Per ogni coincidenza si esamini se la somma Σb cambia o no di segno. Tutte le coincidenze, per le quali quella somma da positiva diventa negativa corrisponderanno

ad altrettanti massimi; quelle invece per le quali quella somma da negativa diventa positiva corrisponderanno ad altrettanti minimi;

c) Per conoscere poi quale sia il massimo dei massimi ed il minimo dei minimi, si procederà alla valutazione di tutti i singoli massimi e di tutti i singoli minimi e dal loro confronto si potrà poi decidere quale sia fra di essi il maggiore o minore.

85. La parte *a*) del procedimento ora indicato si può facilmente eseguire come segue. Se i pesi che transitano sono r di numero, e la spezzata abbia s lati, e quindi $s+1$ vertici (comprendendovi il primo e l'ultimo punto), il numero delle coincidenze sarà $r\,(s+1)$. Così se $A_1 M_1 N_1 B_1$ (fig. 136) sia la spezzata d'un'asta, e sopra la trave debbano transitare i due pesi P_1 e P_2, mantenendo invariabile la loro distanza rispettiva, si avrà $r=2$, $s=3$, e quindi le coincidenze saranno 8. Queste coincidenze, nel caso della figura, disposte secondo l'ordine con cui succedono, sono le seguenti:

1.ª	La direzione del peso	P_1	passa per	il punto	A_1
2.ª	»	P_1	»	»	M
3.ª	»	P_2	»	»	A_1
4.ª	»	P_2	»	»	M
5.ª	»	P_1	»	»	N
6.ª	»	P_2	»	»	N
7.ª	»	P_1	»	»	B_1
8.ª	»	P_2	»	»	B_1

Queste coincidenze si vedono segnate nella parte inferiore della figura dove la posizione dei pesi è indicata dai loro indici. Esse si ottengono facilmente tirando due rette obblique qualunque, la cui distanza orizzontale eguagli quella dei pesi dati, come si vede nella figura stessa. Il modo più semplice in pratica di trovare le successive coincidenze sta nel segnare sopra una striscia di carta le distanze dei pesi P_1 e P_2 fra loro, e fare poscia scorrere la striscia lungo una retta AB (fig. 137), sopra la quale siansi segnati i punti A M N B, collocati nelle verticali passanti per i vertici della spezzata. Nella parte inferiore della figura 136 si sono segnate, come si disse, tutte le coincidenze: però, come si vedrà più avanti, basterà, per lo scopo al quale qui si vuol giungere, segnare solamente quelle che corrispondono ai valori massimi ed ai minimi.

86. Per poter eseguire la parte *b*) del procedimento superiore, cioè per poter esaminare se la somma Σb cambia o no di segno per una data coincidenza, bisogna trovare una norma per determinare il segno di essa somma corrispondente ad una posizione dei pesi P, per la quale non abbia luogo coincidenza alcuna, ma la quale del resto sia scelta comunque. Trovata questa norma sarà possibile di decidere se il segno di quella somma cambia o no per una coincidenza qualunque; bastando allora confrontare il segno di Σb relativo alla posizione dei pesi che immediatamente precede la coincidenza, col segno relativo alla posizione che immediatamente la segue.

Sia dunque, per una posizione qualunque dei pesi P, $R_k T_k$ (fig. 138) la direzione di uno dei pesi, per es. del peso P_k, ed EF quel lato della spezzata vera ad esso relativa, il quale viene intersecato dalla $R_k T_k$. Lo sforzo N_k sopportato dall'asta,

in causa del peso P_k, sarà dato dall'ordinata $R_k T_k$; ma tale sforzo, per ciò che sopra si è supposto (n. 83), è anche espresso da $\alpha_k + b_k u_k$; dunque l'equazione $N_k = \alpha_k + b_k u_k$, dove N_k si riguardi come ordinata, non è altro che l'equazione del lato EF della spezzata, e quindi la quantità b_k non è altro che la tangente trigonometrica dell'angolo ω_k, che il lato EF fa coll'asse $A_1 B_1$. La somma Σb, per una posizione qualunque dei pesi P, non è dunque altro che la somma delle tangenti trigonometriche degli angoli, che i lati delle spezzate vere, intersecati dalla direzione dei pesi, formano coll'asse $A_1 B_1$.

Ora, se la spezzata vera del peso P_k ha s lati, questi saranno successivamente intersecati dalla direzione di esso peso, durante il suo transito sopra la trave. L'angolo ω_k e la sua tangente trigonometrica b_k assumono dunque, durante il detto transito, s valori diversi, che si potranno individuare scrivendo $\omega_{k,1}, \omega_{k,2}, \ldots, \omega_{k,s}$ ed analogamente $b_{k,1}, b_{k,2}, \ldots, b_{k,s}$. Simile considerazione può farsi per gli altri pesi, ad ognuno dei quali spetta una spezzata vera pure di s lati; poichè tutte le spezzate vere d'un'asta, relative a diversi pesi, sono fra loro figure omologico-affini. Per indicare meglio tutti questi diversi valori, che possono essere assunti dalle quantità b, sottoposte al segno sommatorio Σ, potrà scriversi $\Sigma b_{k,m}$ in luogo di Σb.

Se dunque il lato EF (fig. 138) sia l'$m.^{mo}$ della spezzata vera relativa al peso P_k, ed a quel lato corrisponda il lato E'F' d'una spezzata omologica-affine, avente il coefficiente c (n. 48), le EF, E'F' passeranno per uno stesso punto O della $A_1 B_1$. Posto dunque l'angolo $E'OA_1 = \varepsilon_m$ sarà $b_{k,m} = \text{tg.}\, \omega_{k,m}$ e

$$\text{tg}\, \omega_{k,m} : \text{tg}\, \varepsilon_m = R_k T_k : R_k T'_k$$

Ma $R_k T_k : R_k T'_k = c P_k : l$ (n. 48), dunque $b_{k,m} = \frac{c P_k}{l} \text{tg}\, \varepsilon_m$.

Se ora da un punto O d'un'orizzontale OH (fig. 139) si tira una retta OL_m, la quale faccia colla OH l'angolo ε_m; e si prende OK eguale al peso P_k nella scala delle forze, allora, posta la verticale $KM = h_{k,m}$ si avrà $h_{k,m} = OK\, \text{tg}\, \varepsilon_m = P_k\, \text{tg}\, \varepsilon_m$; dunque

$$b_{k,m} = \frac{c}{l} h_{k,m}.$$

Se dunque per tutti i pesi P, sebbene abbiano spezzate vere distinte, si mantenga la medesima spezzata omologica-affine col coefficiente c, allora il fattore $\frac{c}{l}$, che moltiplica nella superiore equazione la $h_{k,m}$, è indipendente dagli indici k ed m; dei quali il primo rappresenta il numero d'ordine della forza P, il secondo invece rappresenta il numero d'ordine di quel lato della spezzata, che è tagliato dalla direzione della forza.

Se dunque nella somma $\Sigma b_{k,m}$ si pone per ogni $b_{k,m}$ che vi è contenuto, il suo valore dato dalla equazione superiore, la quantità $\frac{c}{l}$ diventerà fattore comune e si avrà

$$\Sigma b_{k,m} = \frac{c}{l} \Sigma h_{k,m}.$$

Per conoscere dunque il segno della somma $\Sigma b_{k,m}$ basterà trovare il segno

della somma $\Sigma h_{k,m}$. Il coefficiente c è evidentemente arbitrario, ossia è arbitraria la spezzata omologica-affine, a cui appartiene il lato E'F' (fig. 138), purchè resti la medesima per tutti i pesi.

87. Vediamo ora mediante alcuni esempî come si possa facilmente conoscere il segno della $\Sigma h_{k,m}$ e quindi quello della Σb. Si abbia la trave AB (fig. 140), e sopra di essa si trovino i due pesi P_1 e P_2. Domandasi qual sia per questa posizione dei pesi il segno di Σb.

Si costruisca una spezzata omologica qualunque $A_1 M_2 N_2 B_1$ dell'asta che si considera, e si attribuisca ad ogni lato $A_1 M_2$, $M_2 N_2$, $N_2 B_1$ il rispettivo numero d'ordine 1, 2, 3, come si vede notato nella figura. Per un punto O d'un'orizzontale OH (fig. 141) si tirino poi le OL_1, OL_2, OL_3 parallele ai tre lati successivi 1, 2, 3 della spezzata. Si prendano quindi da O verso H le distanze O(1), O(2), eguali alle forze P_1 e P_2, sia nella data scala delle forze, sia in una scala diversa dalla data. Finalmente per i punti (1) e (2) si tirino delle verticali, che intersechino le OL.

Ciò fatto si osservi, che nella data posizione delle forze P_1 e P_2 (fig. 140), la forza P_1 taglia colla sua direzione il lato 2, e la forza P_2 taglia il lato 1: i coefficienti k ed m saranno dunque per la prima forza $k=1$, $m=2$, e per la seconda $k=2$, $m=1$. Perciò si avrà nel caso presente

$$\Sigma b_{k,m} = b_{1,2} + b_{2,1}$$

e quindi anche

$$\Sigma h_{k,m} = h_{1,2} + h_{2,1}.$$

Ora le $h_{1,2}, h_{2,1}$ si trovano già segnate nella fig. 141. Infatti, ricordando il significato che nel numero precedente si è attribuito ad $h_{k,m}$, si ha $h_{1,2}$ = alla verticale (1) 2, ed $h_{2,1}$ = alla verticale (2) 1. Dunque nel caso attuale

$$\Sigma h_{k,m} = (1)\,2 + (2)\,1.$$

Perciò se si considerano come positive le ordinate, che si trovano inferiormente alla OH, e come negative quelle che si trovano superiormente, si ha in questo caso $\Sigma h_{k,m} > 0$. Se dunque si suppone (ciò che intenderemo fatto in tutta questa ricerca), che il coefficiente c della spezzata $A_1 M_2 N_2 B_1$ sia positivo, si avrà pure $\Sigma b > 0$.

Ora si osservi che per ottenere il secondo membro dell'equazione superiore, cioè l'espressione (1) 2 + (2) 1 basta la sola ispezione della fig. 140. Infatti ogni termine di tale espressione contiene il numero d'ordine d'un peso e ad esso unito il numero d'ordine di quel lato della spezzata, che è tagliato dalla direzione di esso peso. Ora dalla fig. 140 si vede senz'altro, che il peso avente il numero d'ordine (1) taglia il lato 2, e che il peso avente il numero d'ordine (2) taglia il lato 1. Dunque si ha direttamente $\Sigma h_{k,m} = (1)\,2 + (2)\,1$.

Ma la stessa espressione (1) 2 + (2) 1, atteso il sistema d'indici usato nel costruire la fig. 141, indica immediatamente quali siano le verticali (od ordinate) di essa figura, che devono prendersi in considerazione per determinare il segno della $\Sigma h_{k,m}$. Basta dunque la sola ispezione della fig. 140 per sapere quali ordinate della fig. 141 devono considerarsi: per ogni peso P_k della prima figura, la cui direzione taglia il lato m della spezzata, si dovrà nella seconda figura prendere l'ordinata (k) m.

Si osservi inoltre che la fig. 141 è affatto indipendente dalla posizione che i pesi hanno sopra la trave. Se dunque i pesi P_1 e P_2 della fig. 140 cambiassero

posizione, avanzandosi per es. fino a prendere la posizione P'_1, P'_2, la fig. 141 resterebbe la stessa. Costruita dunque una volta questa fig. 141, essa può servire per determinare il segno di Σb per tutte le possibili posizioni dei pesi. Così, quando i pesi prendono le posizioni P'_1, P'_2 si vede tosto che essi tagliano colle loro direzioni i lati 3 e 2 rispettivamente: si prenderanno dunque le ordinate (1) 3 e (2) 2 della fig. 141, la prima delle quali è negativa e numericamente maggiore della seconda. La somma $\Sigma b = (1)\,3 + (2)\,2$ è dunque in questo caso negativa.

Se nella fig. 141 si sopprimono i punti (1) e (2) e le verticali passanti per essi, il resto della figura è indipendente dal numero e dalla intensità dei pesi. Segnata la figura senza quei punti e senza quelle verticali, essa può servire per qualunque sistema di pesi, che debba transitare sulla trave. Per ogni sistema basta introdurre le relative distanze nella orizzontale OH, e tirare le corrispondenti verticali.

88. Quando occorra di determinare il segno di Σb per molte successive posizioni dei pesi P, è preferibile di segnare le distanze rispettive dei pesi sopra una striscia di carta, e farla poi scorrere lungo la AB, come sopra si disse (n. 85). In tal caso il numero d'ordine che si attribuisce ai lati della spezzata può notarsi presso le loro projezioni sulla AB, come nella fig. 142, nella quale si è riprodotta la trave AB della fig. 140, attribuendo al tratto AM il numero 1, al tratto MN il numero 2, ed al tratto NB il numero 3. Se per es. la trave fosse caricata da cinque pesi $P_1, \ldots, P_5$, e questi rispetto alla trave, rappresentata da AB prendessero la posizione indicata colla striscia di carta CC, si vede tosto confrontando le due figure 142 e 143, che si tratterà di sapere se, in quest'ultima figura, la somma delle ordinate

$$\Sigma h_{k,m} = (1)\,3 + (2)\,2 + (3)\,2 + (4)\,1 + (5)\,1$$

sia positiva o negativa. Nel caso attuale, come è facile vedere, essa è positiva, non essendovi altra ordinata negativa che la (1) 3, e le altre prevalendo numericamente. Facendo poi scorrere la striscia di carta, si può con eguale facilità giudicare di altre posizioni, senza modificare le figure.

Notiamo intanto che le segnature (1) 3 + (2) 2, e simili, caratterizzano la posizione dei pesi rispetto ai lati della spezzata, cosicchè quelle segnature possono essere riguardate come l'espressione della posizione dei pesi rispetto a tale spezzata.

In moltissimi casi basterà la semplice ispezione delle figure 141 e 143 per giudicare se una determinata somma $\Sigma h_{k,m}$ sia positiva o negativa. Così nei tre casi superiori il segno di $\Sigma h_{k,m}$ si riconosce senza bisogno di fare effettivamente la somma algebrica delle ordinate. Qualora però la sola ispezione della figura non bastasse, si potrà eseguire la somma algebrica col compasso in un modo analogo a quello indicato al n. 73, senza tirare linee di sorta. E ciò potrà farsi tanto più, che qui non si tratta di ottenere con approssimazione maggiore o minore il valore di quella somma; ma unicamente di decidere se sia positiva o negativa; ed a ciò basta in generale un'operazione fatta col compasso rapidamente e senza troppa cura di esattezza.

89. Trovata così una norma per determinare il segno della somma Σb, corrispondente ad una data posizione dei pesi P, sarà facile decidere se per una data coincidenza (n. 85) abbia luogo o no un cambiamento di segno in detta somma. Basta evidentemente confrontare fra loro due posizioni dei pesi P, l'una precedente.

l'altra seguente alla data coincidenza, prendendo queste posizioni in modo che fra esse non vi siano altre coincidenze, oltre la data.

Così per es. se si domandasse per la coincidenza del peso P_1 col punto N nella fig. 140, se ha luogo o no cambiamento di segno, basta osservare che prima della coincidenza la posizione dei pesi è espressa da (1) 2 + (2) 2, e dopo la coincidenza da (1) 3 + (2) 2. Ora osservando la fig. 141, si vede facilmente che la somma (1) 2 + (2) 2 è positiva, mentre la (1) 3 + (2) 2 è negativa. Dunque per la proposta coincidenza ha luogo un cambiamento di segno dal positivo al negativo.

Cerchisi, per secondo esempio, se per la coincidenza del peso P_4 colla verticale per M (fig. 142) abbia luogo o no cambiamento di segno nella Σb.

Accostando il segno (4) della striscia di carta CC al punto M, si riconosce facilmente che la *posizione precedente* alla coincidenza è la

(1) 3 + (2) 2 + (3) 2 + (4) 1 + (5) 1,

e la *posizione seguente* invece è la

(1) 3 + (2) 2 + (3) 2 + (4) 2 + (5) 1.

Ora dalla semplice ispezione della fig. 143 si desume, che tanto per la prima che per la seconda posizione la Σb è positiva; poichè la sola ordinata negativa (1) 3 è evidentemente inferiore alla somma delle ordinate positive, che seguono.

Nel medesimo modo si potranno esaminare tutte le successive coincidenze, che hanno luogo durante il transito dei pesi dati sopra la trave: nel qual caso l'esame delle singole coincidenze si semplifica, poichè ogni posizione dei pesi P, la quale si considera come *posizione seguente* rispetto ad una data coincidenza, vale anche come *posizione precedente* per la coincidenza successiva. Siccome dunque le coincidenze sono $r(s+1)$ (n. 85), ed il valore di Σb avanti della prima coincidenza e dopo dell'ultima è nullo, così il segno di Σb dovrà determinarsi solamente per un numero $r(s+1)-1$ di posizioni per decidere sul cambiamento, o no, di segno delle $r(s+1)$ coincidenze.

Fra queste coincidenze basterà prender nota solamente di quelle che portano il carattere di massimo o di minimo. Per il caso dei due pesi della fig. 140 si troverà che la coincidenza del peso P_1 col punto N (fig. 144), è la sola che presenti il carattere di massimo: la posizione precedente, cioè la (1) 2 + (2) 2, è positiva; mentre la posizione seguente, cioè la (1) 3 + (2) 2, è negativa, come facilmente si desume dalla fig. 141. Per il caso dei cinque pesi della fig. 142 vi è pure un solo massimo, quello relativo alla coincidenza del peso P_3 col punto N (fig. 145). La posizione precedente (1) 3 + (2) 3 + (3) 2 + (4) 2 + (5) 1 è positiva; la seguente (1) 3 + (2) 3 + (3) 3 + (4) 2 + (5) 1 è invece negativa; come facilmente si ha dalla fig. 143.

90. In ciascuno dei due esempî ora addotti si è trovato un solo massimo. Ma avviene spesso che vi siano più coincidenze, che presentano il carattere di massimo, od il carattere di minimo. Si tratterà allora di eseguire la parte *c*) del procedimento accennato alla fine del n. 84. Ciò può farsi opportunamente segnando le une sotto le altre le diverse posizioni corrispondenti ai massimi, come nelle figure 144 e 145 si è segnata l'unica posizione di massimo. Costruita poi una spezzata $A_1 M_1 N_1 B_1$ relativa alla luce, si caleranno le verticali indicanti le direzioni dei pesi fino ad incontrare la spezzata. Mediante le ordinate della spezzata che così si ottengono, si potrà determinare nel modo sopra indicato (n. 71, 72, 73) lo sforzo sopportato dall' asta

per ogni posizione di massimo, e decidere quindi quale sia il maggiore fra quegli sforzi. In tal modo resterà determinato il massimo dei massimi. Similmente si opererà qualora si trattasse di decidere fra varie posizioni di pesi, le quali tutte soddisfacessero alla condizione di minimo.

Invece della spezzata relativa alla luce si può più semplicemente far uso in questo confronto dei massimi e dei minimi di una spezzata omologica qualunque; usandone come se fosse la spezzata relativa alla luce. In tal modo si ottengono non gli sforzi veri sopportati dall'asta nei singoli casi di massimo o minimo; ma degli sforzi ad essi proporzionali. Ora questi ultimi bastano egualmente per decidere quale sia la posizione dei pesi corrispondente al massimo dei massimi od al minimo dei minimi.

91. Ritornando al valore di $\Sigma h_{k,m}$ superiormente considerato, è da osservare che quando siasi trovata l'espressione di un tale valore corrispondente ad una data posizione dei pesi, si possono variare le distanze rispettive dei pesi stessi, senza che ne resti perciò alterato il valore di $\Sigma h_{k,m}$; semprechè nel variare quelle distanze, la direzione di nessun peso passi oltre uno dei vertici della spezzata. Infatti i termini $(k)m$, di cui si compone il valore di $\Sigma h_{k,m}$, contengono unicamente l'indice del peso, e l'indice di quel lato della spezzata relativa all'asta, che è tagliato dalla direzione del peso stesso. Se dunque il peso P_k interseca colla sua direzione il lato m, esso potrà cambiare la sua posizione rispetto agli altri pesi, avanzandosi o retrocedendo, purchè non esca dai limiti della projezione orizzontale del lato m; mentre allora il termine $(k)\,m$ nel valore di $\Sigma h_{k,m}$ resterà inalterato. Ne viene che:

« Le coincidenze alle quali corrispondono sforzi massimi e minimi restano le medesime, sebbene le distanze rispettive dei pesi vengano alterate; purchè l'ordine con cui durante il transito si verificano le coincidenze resti inalterato ».

È inoltre da notare che in tutta questa ricerca di massimo e di minimo, basta conoscere una spezzata omologica qualunque dell'asta che si considera, non essendo richiesta nè la spezzata vera, nè quella relativa alla luce. Ora una tale spezzata è indipendente dal braccio di leva q dell'asta rispetto al suo centro, ossia dalla direzione dell'asta. Dunque:

« Le posizioni di massimo e di minimo, come pure quelle corrispondenti al massimo dei massimi ed al minimo dei minimi, sono indipendenti dalla direzione dell'asta ».

92. Un caso che merita specialmente attenzione, in vista delle pratiche applicazioni, si è quello in cui fra i pesi P ve ne siano di eguali fra loro; in modo che il numero totale r dei pesi si ripartisca in r_1 pesi tutti eguali a P_a, r_2 pesi tutti eguali a P_b, r_3 pesi tutti eguali a P_c, ecc.; dove naturalmente $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots = r$.

In questo caso la ricerca delle posizioni corrispondenti ai massimi ed ai minimi, la quale sarebbe piuttosto lunga, qualora il numero totale r dei pesi fosse grande, può essere sensibilmente abbreviata, ponendo mente a quanto segue.

Dagli esempî che precedono si scorge, che un dato lato della spezzata è talvolta tagliato dalla direzione di due o più pesi. Così nella ricerca del n. 89, nella posizione colà indicata come *precedente* tanto il peso P_2 che il peso P_3 tagliano colla loro direzione il lato 2 della spezzata; e nella posizione *seguente* lo stesso lato 2 è tagliato dalla direzione dei tre pesi P_2, P_3, P_4. Ora per ciò che si è osservato nel

numero precedente, un peso qualunque P_k può cambiare di posizione, senza che il valore di $\Sigma h_{k,m}$, e quindi di Σb, resti modificato; sempre chè la direzione del peso che cambia di posizione intersechi sempre lo stesso lato della spezzata. Quando dunque due o più pesi tagliano colla loro direzione un medesimo lato della spezzata si potrà far coincidere la direzione di questi pesi, portandoli tutti sopra una medesima verticale, purchè questa tagli quel medesimo lato, che tagliavano prima i pesi. Allora, senza turbare le condizioni di carico, si potrà sostituire ai pesi coincidenti un peso unico eguale alla loro somma. Così nell'esempio sopra citato invece dei due pesi P_2 e P_3, che tagliano nella posizione precedente il lato 2, si potrà sostituire un peso unico $P_{2,3}$ eguale alla somma $P_2 + P_3$, il quale tagli il medesimo lato; ed ai tre pesi P_2, P_3, P_4, che nella posizione seguente tagliano lo stesso lato 2, si potrà sostituire un unico peso $P_{2,3,4}$ eguale alla loro somma, e che intersechi lo stesso lato. Similmente dicasi dei pesi P_4 e P_5 che nella posizione precedente tagliano il lato 1. In tal modo le due posizioni del n. 89 possono scriversi più semplicemente

$$(1)\,3 + (2,3)\,2 + (4,5)\,1$$

ed

$$(1)\,3 + (2,3,4)\,2 + (5)\,1,$$

cosicchè ognuna è ridotta a tre termini, invece di cinque; il che vuol dire, rapportandosi alla fig. 143, che non si dovranno più considerare cinque ordinate, ma solamente tre. Affine però di ottenere queste tre ordinate, bisognerà ora prendere sulla OH anche le distanze $O(2,3)$, $O(4,5)$, $O(2,3,4)$, relative ai pesi $P_{2,3}$, $P_{4,5}$, $P_{2,3,4}$ nuovamente introdotti, e tirare per i punti $(2,3)$, $(4,5)$, $(2,3,4)$ le rispettive verticali. Allora, per ciò che precede, la somma algebrica delle cinque ordinate $(1)3$, $(2)2$, $(3)2$, $(4)1$, $(5)1$ dovrà eguagliare quella delle tre $(1)3$, $(2,3)2$, $(4,5)1$; e quella delle cinque $(1)3$, $(2)2$, $(3)2$, $(4)2$, $(5)1$ dovrà eguagliare quella delle tre $(1)3$, $(2,3,4)2$, $(5)1$. Questa eguaglianza può anche direttamente dimostrarsi dalla stessa fig. 143, osservando che si ha necessariamente $O(2,3) = O(2) + O(3)$, $O(4,5) = O(4) + O(5)$, $O(2,3,4) = O(2) + O(3) + O(4)$, e quindi $(2,3)2 = (2)2 + (3)2$, $(4,5)1 = (4)1 + (5)1$, $(2,3,4)2 = (2)2 + (3)2 + (4)2$.

Quando dunque il numero r totale dei pesi è superiore al numero s dei lati della spezzata, si può, per la determinazione del segno di Σb, corrispondente ad una data posizione dei pesi, ricorrere alla seguente regola:

In luogo di quei pesi che tagliano colle loro direzioni un medesimo lato, si sostituisca un unico peso eguale alla loro somma, e si avrà così un numero minore di pesi, e quindi di ordinate da considerare.

È facile infatti vedere che il numero dei pesi, dopo fatta la detta sostituzione, non può mai essere superiore ad s.

93. La regola superiore sarebbe però di poca utilità pratica nella ricerca che ci occupa, se la determinazione del peso unico da sostituire, e la determinazione della rispettiva ordinata nella figura 143 esigessero una nuova costruzione per ogni nuova posizione assunta dai pesi durante il loro transito sopra la trave. Una tale nuova costruzione si può evitare, quando vi sono varî gruppi r_1, r_2, ... di pesi fra loro eguali nel modo supposto nel precedente numero. Basterà costruire opportunamente la figura relativa una volta tanto; e questa può allora servire per tutte le

possibili posizioni assunte dai pesi durante il loro transito sopra la trave. Come ciò possa farsi risulterà chiaramente dagli esempî seguenti.

Sopra una trave AB (fig. 146), di 16^m di luce, passa una locomotiva $a\ a\ a$, col rispettivo tender $b\ b\ b$. Ogni asse a ha il peso di $12^{ton.}$; ogni asse b il peso di $7^t,5$. Domandasi qual sia il segno di Σb per l'asta 4.5, quando la locomotiva ha la posizione indicata in figura.

Costruita una spezzata qualunque dell'asta $A_1 M_1 N_1 B_1$ (in figura si è disegnata una spezzata relativa alla luce col coefficiente $c=6$), si tirino la orizzontale OH (fig. 147), e le OL_1, OL_2, OL_3, parallele ai lati successivi della spezzata, il tutto come al n. 87. Condotta poi una verticale OC, si prendano sulla orizzontale CD le distanze $C.a$ $C.2a$, $C.3a$ eguali, nella scala delle forze, a $12^{ton.}$, $24^{ton.}$, $36^{ton.}$ rispettivamente, cioè al peso di uno, due, tre assi a. Nella figura si è adottata come scala delle forze $1^{mm} = 1^{ton.}$. Similmente sulla verticale CO si prendano le distanze $C.b$, $C.2b$, $C.3b$, eguali al peso di uno, due, tre assi b. Si conducano quindi per i punti b, $2b$, $3b$ delle linee orizzontali, e per i punti C, a, $2a$, $3a$ delle rette inclinate a 45^0, come si vede in figura. Finalmente per i punti d'intersezione delle orizzontali colle inclinate si abbassino delle verticali fino ad intersecare le OL.

Preparata così la figura 147, essa serve senza altre costruzioni a determinare il segno di Σb per una posizione qualunque della data locomotiva. Per la posizione indicata in figura, si hanno due assi b corrispondenti al lato 1 della spezzata. Per questi due assi basterà dunque, come si dimostrò nel numero precedente, prendere una sola ordinata, quella corrispondente alla somma $7^t,5 + 7^t,5$, e relativa al primo lato della spezzata. Questa somma trovasi già fatta nella fig. 147. Essa è la $2b.k$, poichè $2b.k = 2b.C = 2 \times 7^t,5$. Ma $2b.k = Ok'$, dunque l'ordinata da prendersi sarà la $k'1$. Al lato 2 della spezzata corrisponde un solo asse b: l'ordinata da prendersi sarà dunque quella che corrisponde all'ascissa Oq', e che è relativa al secondo lato, cioè la $q'2$; infatti si ha $Oq' = b.q = b.C = 7^t,5$. Al lato terzo della spezzata corrispondono i tre assi a: si prenderà dunque l'ordinata corrispondente alla somma $12 + 12 + 12$, cioè quella che corrisponde all'ascissa Ou', e che è relativa al terzo lato della spezzata, cioè la $u'3$; poichè $Ou' = C.3a = 3 \times 12 = 36^{ton.}$ Si avrà dunque per la posizione data della locomotiva, e rendendo espliciti i segni

$$\Sigma h = k'1 - q'2 + u'3,$$

quantità che si trova essere positiva: dunque per quella posizione sarà pure $\Sigma b > 0$.

Si vede facilmente che con un po'd'abitudine, basta l'ispezione della fig. 146 per sapere quali ordinate della fig. 147 si devono prendere.

Se si cerca quali siano le posizioni della locomotiva, che producono nell'asta 4.5 gli sforzi massimi o minimi, bisogna segnare le distanze delle ruote sopra una striscia di carta, e farla scorrere sia lungo la AB, sia lungo una sua parallela (n. 85, 88). Così operando si potranno con sufficiente prontezza esaminare le posizioni precedenti e le seguenti delle successive coincidenze, e quindi trovar quelle per le quali la Σb cambia di segno, ossia quelle le quali presentano il carattere di massimo o di minimo. Eseguendo questa ricerca per l'asta 4.5 della trave AB, si trovano due massimi e due minimi, che sono segnati nella figura sotto la trave: la posizione degli assi vi è indicata dalle rispettive lettere. Per decidere poi quale dei due massimi sia

maggiore, si è costruita una seconda spezzata dell'asta, cioè la $A_1M'_1N'_1B_1$, le cui ordinate stanno a quelle corrispondenti della $A_1M_1N_1B_1$, come il peso di un asse b sta al peso di un asse a. Fatta la somma algebrica delle ordinate dei due massimi, si trova, che il secondo massimo è maggiore del primo (n. 90), e corrisponde ad una pressione nell'asta 4.5 di circa $13^{ton.}$. Similmente si ha che il primo minimo è minore del secondo e corrisponde ad una tensione nell'asta 4.5 di circa $18^{ton.}$.

Si noti intanto che in questa ricerca non si tratta mai di conoscere quantitativamente il valore di Σh, ma solamente di decidere, se il suo segno sia positivo o negativo. A tale scopo basta generalmente conoscere le ordinate in modo approssimativo (n. 88 in fine). Invece dunque delle verticali kk', qq', ecc. (fig. 147) potrà essere sufficiente che siano tracciate nella figura varie linee verticali, abbastanza vicine fra loro, le quali servano di guida all'occhio: mentre allora l'ordinata si può prendere col compasso abbastanza esattamente, anche se nella sua precisa posizione non vi sia alcuna linea verticale.

94. Nella fig. 146 si è supposto che vi fossero solamente due diverse specie di pesi, cioè quelli degli assi a di $12^{ton.}$, e quelli degli assi b di $7^t,5$. Vediamo ora un caso in cui vi sono tre specie di pesi. Sopra una trave AB (fig. 148), di 36^m di luce, transita un convoglio composto di una locomotiva Sigl, fornita del suo tender, e di tre vagoni. Ogni asse a della locomotiva ha il peso di $12^{ton.}$, ogni asse b del tender il peso di $10^{ton.}$, ed ogni asse c dei vagoni il peso di 8^{ton}. La posizione rispettiva degli assi è quella indicata dalla figura. Domandasi qual sia la posizione del convoglio, che rende massimo lo sforzo nell'asta 4. 6.

In questo caso si potrà dare alla fig. 149, che è analoga alla 147, la disposizione seguente. Tracciate leggermente varie linee verticali abbastanza vicine, si noteranno i pesi a lungo la CD ed i pesi b lungo la CO, e si tireranno poi le orizzontali e le inclinate a 45^0 come nella figura precedente. Quanto ai pesi c, se ne potrà tener conto col tirare una serie di rette vicine inclinate in senso opposto, come si vede in figura, determinando la loro inclinazione in modo, che il cateto verticale stia al cateto orizzontale come il peso b sta al peso c. Costruita poi la spezzata $A_1M_1B_1$ (fig. 148) dell'asta 4.6 (nella figura si è preso $c=12$), e tirata nella fig. 149 l'orizzontale OH, si condurranno le OL_1, OL_2, parallele ai due lati della spezzata.

Disposta la figura a questo modo si prenderanno i pesi a nel senso orizzontale, i pesi b discendendo per le inclinate a 45^0, ed i pesi c ascendendo per le altre inclinate. Così per la posizione del treno indicata nella fig. 148 il primo lato della spezzata è incontrato da cinque pesi c. Per trovare nella figura 149 la corrispondente ordinata, si percorrerà coll'occhio, o meglio colla punta del compasso, la spezzata $3b.2a.\lambda.k.k'$, tirata nella figura in linea più grossa, e si troverà così l'ordinata cercata $k'1$. Il secondo lato della spezzata $A_1M_1B_1$ è incontrato invece da quattro pesi a, tre pesi b ed un peso c. Nella figura 149 si percorrerà dunque la spezzata $C.4a.\mu.q.q'$, e si troverà l'ordinata $q'2$. La somma algebrica delle due ordinate $k'1$ e $q'2$ essendo negativa, per la data posizione del treno si avrà dunque $\Sigma b < 0$.

Colla disposizione data alla fig. 149 si ha dunque da percorrere per qualunque

somma $n'a + n''b + n'''c$ dei pesi una linea spezzata simile alle $3b.2a.\lambda.k.k'$, $C.4a.\mu.q.q'$, e la quale conduce all'ordinata che si cerca.

Esaminando in tal maniera, coll'ajuto della striscia di carta, le successive coincidenze che si producono al passaggio del treno, si trova facilmente che ha luogo un solo massimo; e questo corrisponde alla posizione del treno, indicata sotto la fig. 148. L'asta 4.6 sopporta per questa posizione la pressione massima di circa 170 tonnellate.

Se oltre i tre gruppi di pesi a, b, c si avessero degli altri pesi disuguali isolati, questi si potrebbero portare lungo la OH, ed aggiungere la loro ordinata a quelle dovute ai gruppi di pesi.

Che se oltre i tre gruppi a, b, c vi fossero degli altri gruppi simili, questi potrebbero prendersi in considerazione con un sistema di rette orizzontali ed inclinate, costruito inferiormente alla OH, a somiglianza del sistema superiore, che serve per i primi tre gruppi. Siccome però in pratica difficilmente possono presentarsi casi così complessi, così basterà averne fatto un breve cenno per indicare il modo da seguirsi, quando essi si presentassero.

95. Negli esempî superiori la spezzata dell'asta era bilatera o trilatera. Se essa avesse più di tre lati, si procederebbe analogamente.

Se due o più lati della spezzata sono paralleli fra loro, allora si avranno due o più linee OL (fig. 141, 143,...) coincidenti. In tal caso esse possono ancora considerarsi come linee separate; ma, più semplicemente, potranno riguardarsi come una sola linea: avvertendo in tal caso di prendere sempre la somma di tutti i pesi, le cui direzioni intersecano i rispettivi lati paralleli della spezzata.

Se la spezzata è simmetrica rispetto alla verticale passante per il punto di mezzo della trave, e la serie dei pesi P sia pure simmetrica intorno ad una verticale, allora nella ricerca del massimo e del minimo, non occorrerà esaminare l'intero transito dei pesi; bastando farli avvanzare, finchè il loro asse di simmetria coincida con l'asse di simmetria della spezzata; poichè per il resto del transito si ripetono le stesse condizioni in ordine inverso.

Quando le coincidenze (n. 85) non hanno tutte luogo una dopo l'altra; ma due o più di esse abbiano luogo contemporaneamente, allora il cambiamento o meno di segno della Σb si determina, confrontando la posizione che precede, con quella che segue le dette coincidenze contemporanee; ciò che abbrevia l'operazione. Spesso, attese le piccole inesattezze inerenti al graficismo, vi è dubbio, se due o più coincidenze siano o no contemporanee. In tal caso esse potranno ritenersi senz'altro come contemporanee, senza sensibile errore.

Quando la somma Σh si compone di alcune ordinate positive e di alcune negative, può avvenire ch'essa sia nulla. In tal caso sarà pure nulla la Σb, ed allora valgono le considerazioni dei n. 83 ed 84 relative a questo caso. Talvolta avviene che, attese le inesattezze del graficismo, vi sia dubbio se la somma Σh sia nulla o meno. In tal caso essa potrà senza sensibile errore considerarsi come nulla, specialmente se l'intervallo, entro il quale essa sembra nulla, sia breve.

Se le posizioni dei pesi che hanno carattere di massimo oppure di minimo sono più d'una, e si procede alla ricerca del massimo dei massimi, o del minimo dei minimi (n. 90), si potranno nel fare il confronto fra due o più delle posizioni trovate,

sopprimere, o considerare come non esistenti quelle ordinate che fossero comuni, e fare il confronto solamente fra quelle che sono diverse.

B. *Sforzi massimi e minimi per peso uniforme.*

96. Più semplice assai è la ricerca della posizione che deve avere un peso uniformemente distribuito per rendere massimo o minimo lo sforzo in un'asta determinata.

Basta infatti costruire una spezzata omologica qualunque dell'asta data, e se l'area chiusa fra la spezzata e l'asse a cui essa è riferita, è in parte positiva, in parte negativa, si avrà il massimo ed il minimo sforzo (ossia lo sforzo massimo positivo o negativo), secondo che il peso uniforme si estenderà a tutti i tratti corrispondenti alle aree di un segno, od alle aree dell'altro. Nel caso che non vi siano che aree di un segno, l'asta sarà suscettibile solamente di uno sforzo massimo positivo oppure negativo.

Così per la trave della fig. 146 si avrà la massima tensione nell'asta 4. 5, quando il peso uniforme si estende da A fino ad O_1, essendo O_1 collocato sulla verticale condotta per O''. Si avrà invece la massima pressione, quando il peso uniforme si estende da O_1 fino a B. Per la trave della fig. 148 si avrà la massima pressione nell'asta 4. 6, quando il peso uniforme si estenda da A fino a B.

Per il caso che la spezzata sia di quelle considerate ai n. 78, 79, 80 si avranno dunque nelle formole riportate al n. 80, le espressioni degli sforzi massimi positivi o negativi.

Quando l'asta ha il centro esterno alle verticali passanti per i punti d'appoggio (fig. 131), si arriva anche direttamente all'espressione dello sforzo massimo nel modo seguente. Sia $S_1 S_2$ (fig. 150) l'asta considerata, e supponiamo che un dato peso uniformemente distribuito si estenda da A_2 fino ad una distanza orizzontale x oltre il sostegno e. Domandasi qual sia il valore di x, che rende massimo lo sforzo sopportato dall'asta $S_1 S_2$.

Ritenendo le denominazioni del n. 78 (fig. 131), e ponendo inoltre $= d$ la distanza orizzontale dei sostegni e ed e', ed $= p$ il dato peso uniforme per unità di lunghezza, sarà il peso totale espresso da $p(m+x)$, e la reazione in B sarà data da

$$\frac{p}{2l}(m+x)^2.$$

Inoltre il peso px, che trovasi fra i sostegni e ed e' produce in S_2 la pressione $\frac{p}{2d}x^2$. Considerando dunque la parte rigida S_2KB della trave, chiamando N lo sforzo nell'asta $S_1 S_2$ e q la normale OQ, calata sulla direzione della $S_1 S_2$ dal punto O d'incontro delle CS_2, S_1K, si avrà, prendendo i momenti rispetto al punto O,

$$Nq - \frac{pb}{2l}(m+x)^2 + \frac{p(n+b)}{2d}x^2 = 0,$$

e volendo che N sia massimo, si avrà per determinare x l'equazione

$$\frac{b}{l}(m+x) - \frac{n+b}{d}x = 0$$

da cui

$$bmd + \left\{ bd - l(n+b) \right\} x = 0$$

ossia, essendo $l = a - b$, $d = l - m - n = a - b - m - n$,

$$x = \frac{bmd}{an + bm}$$

che è il valore, che si otterrebbe per $Z_1 = M'O''$ (fig. 131) dalle equazioni del n. 78.

Dal valore trovato di x, osservando che $d = a - b - m - n$, si ottiene

$$m + x = \frac{m(a-b)(b+n)}{an+bm} = \frac{ml(b+n)}{an+bm},$$

e quindi con facili riduzioni lo sforzo massimo N dell'asta $S_1 S_2$

$$N = \frac{bm^2(b+n)p}{2q(an+bm)} = \frac{bm^2 t_2 p}{2q(an+bm)}$$

che coincide col valore di Z_1 del n. 80.

Supponendo invece che il peso uniforme si estenda da B_2 verso A_2 fino ad una certa distanza x' oltre l'appoggio e', si troverebbe similmente, come espressione dello sforzo massimo dell'asta $S_1 S_2$, il valore di Z_2 del n. 80.

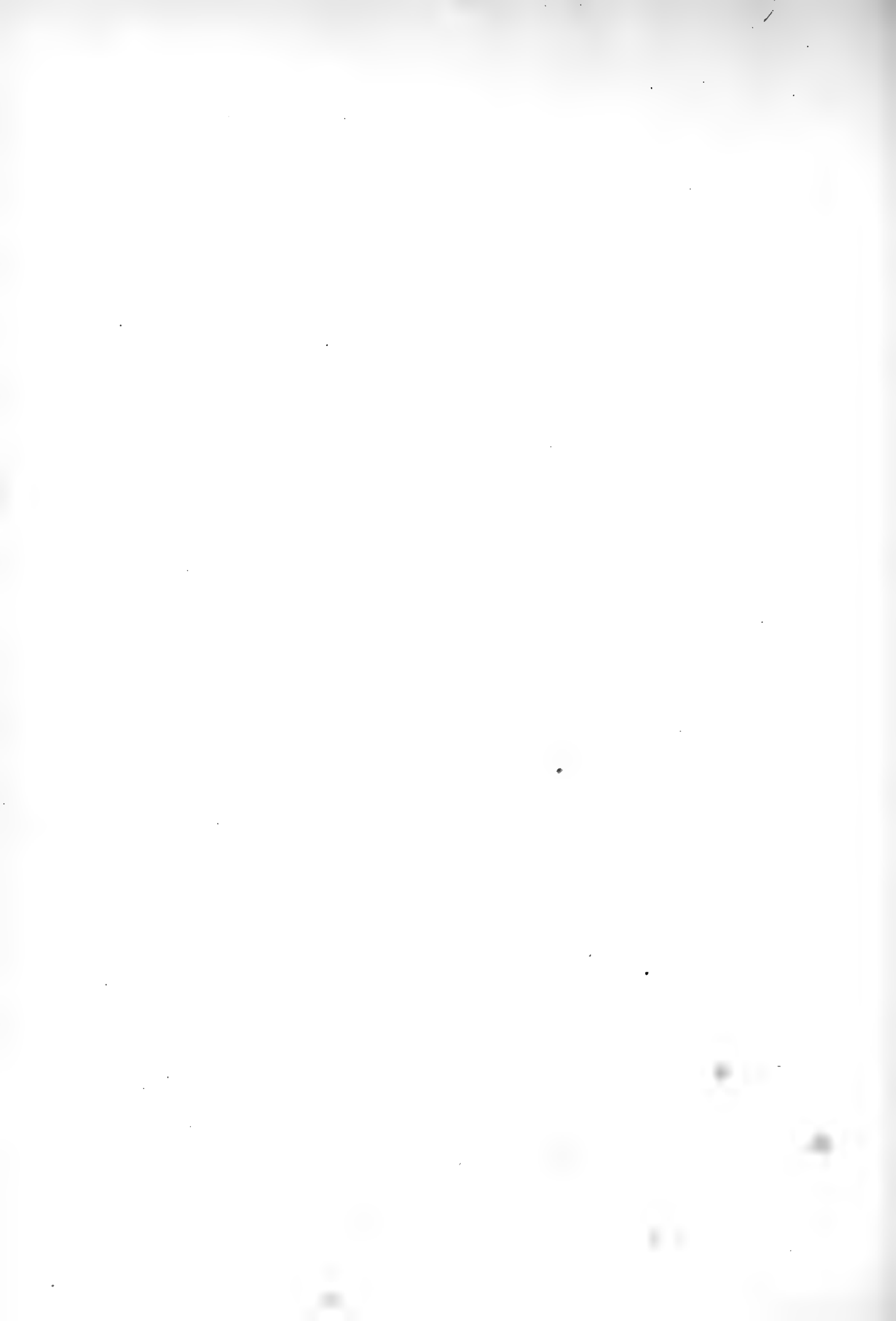
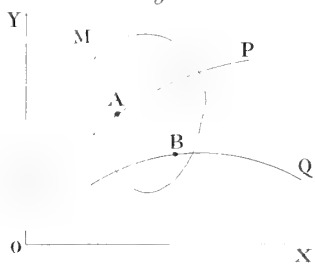
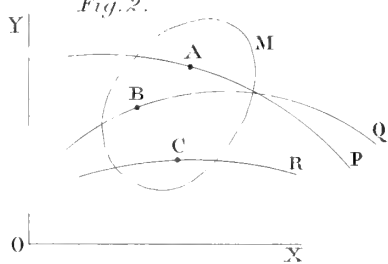
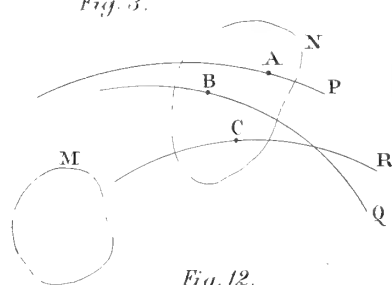
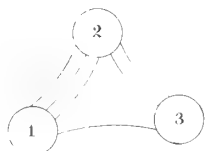



Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 44.

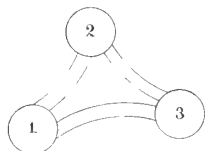
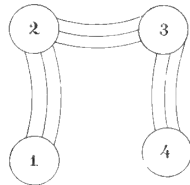
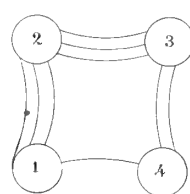
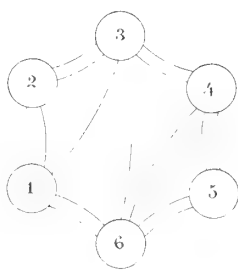
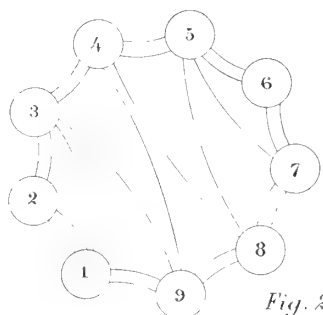
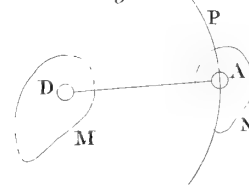
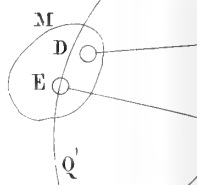
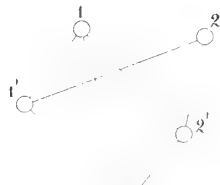
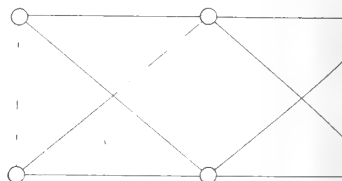
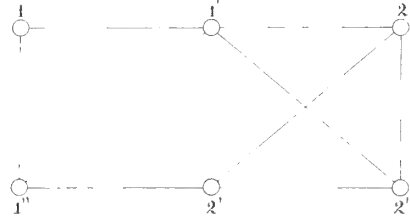
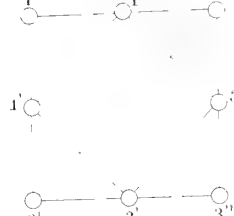
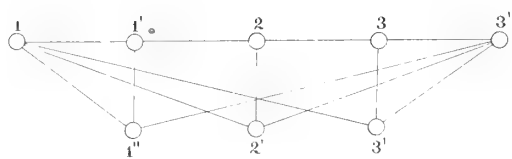
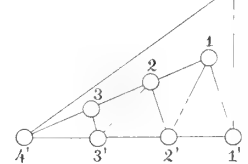
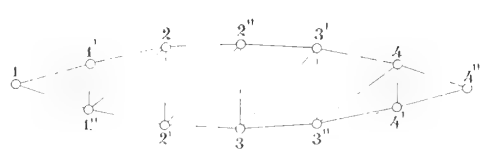
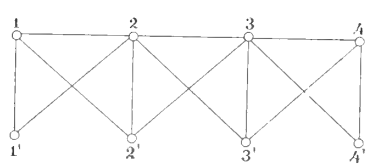
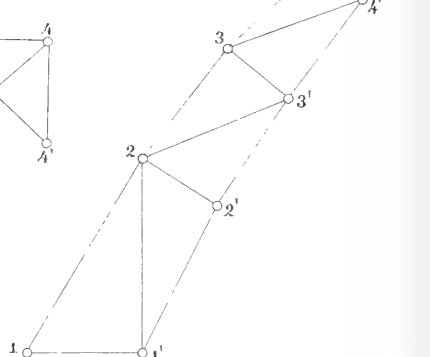
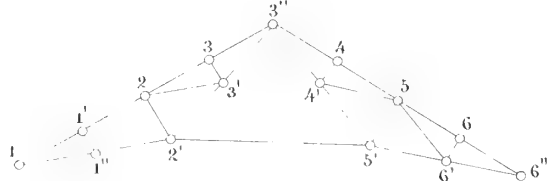
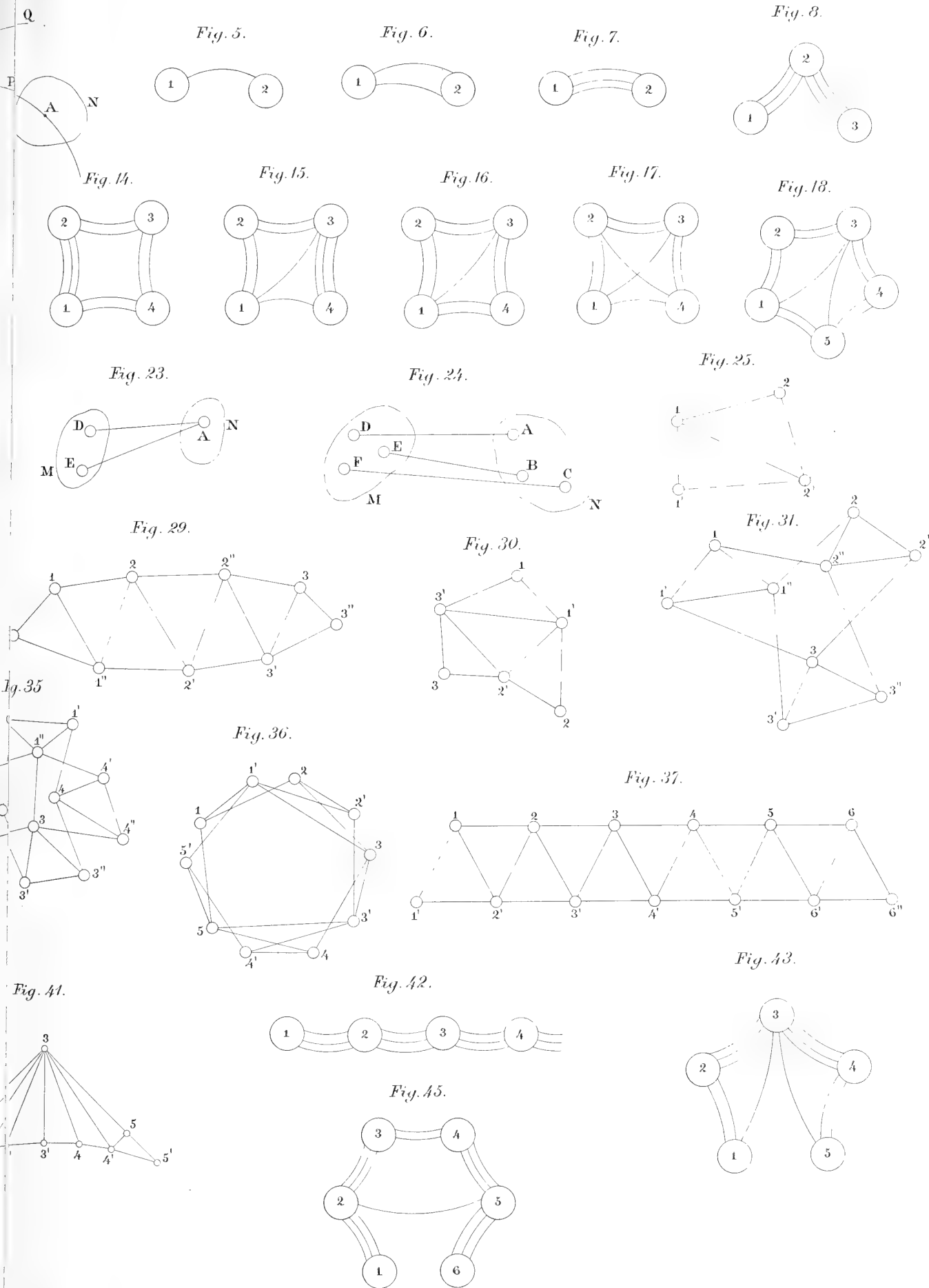
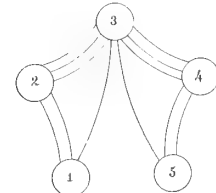
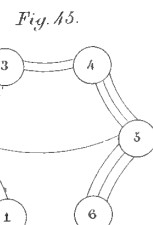
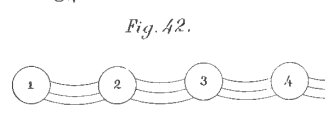
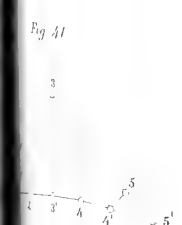
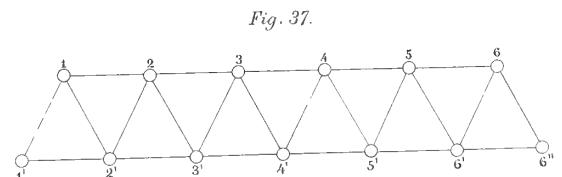
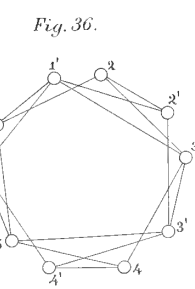
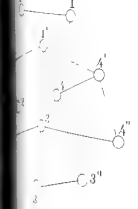
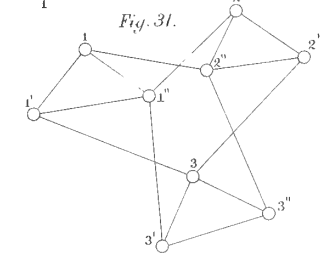
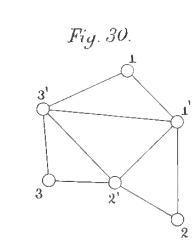
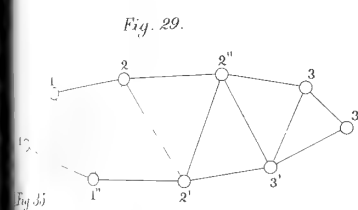
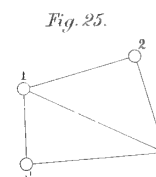
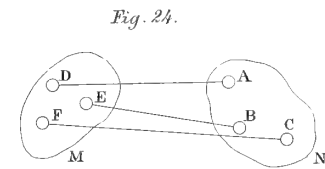
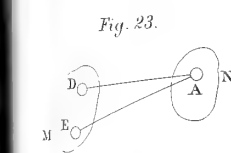
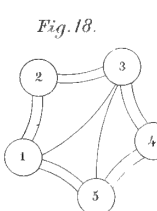
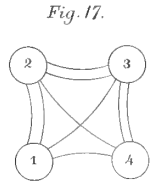
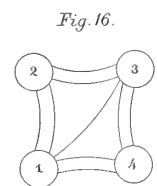
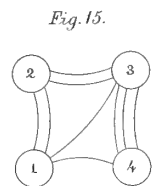
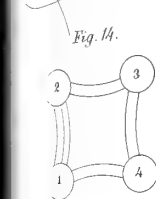
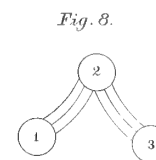
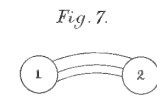
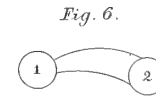
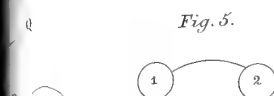
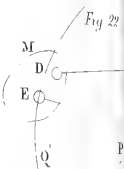
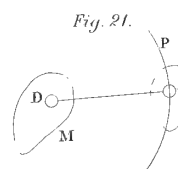
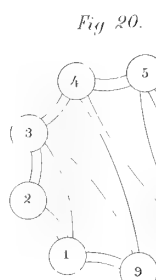
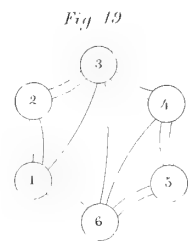
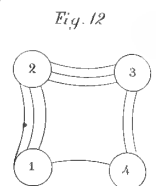
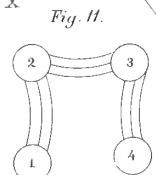
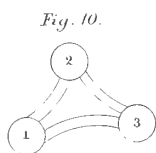
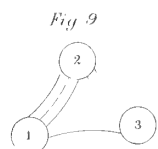
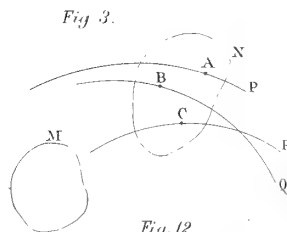
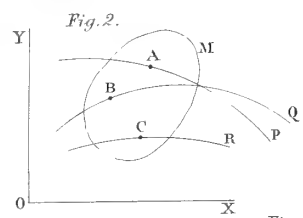
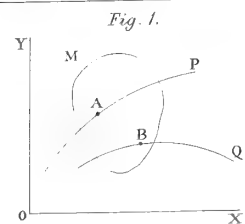



Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 35
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 45.

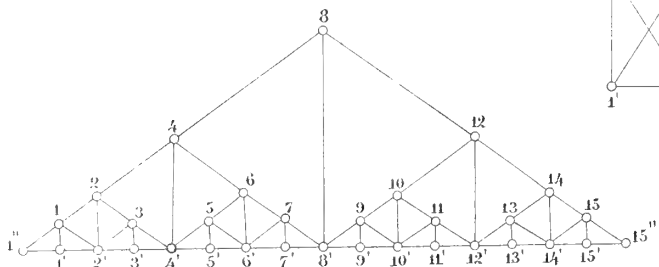
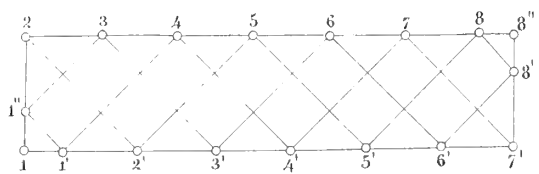
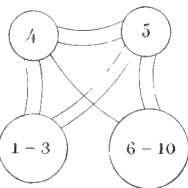
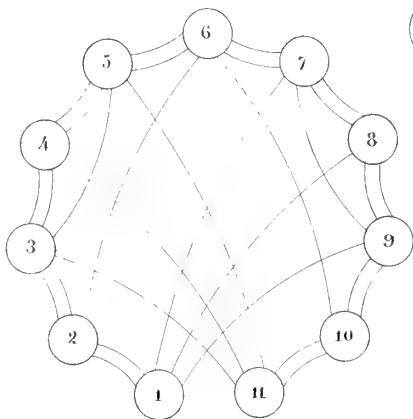
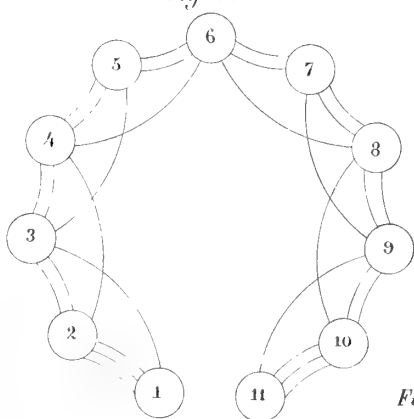
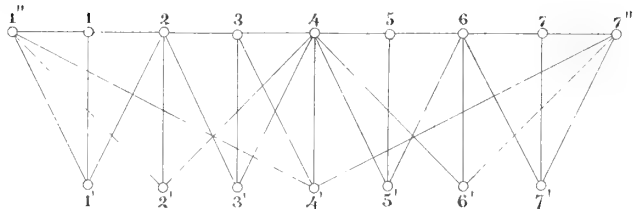
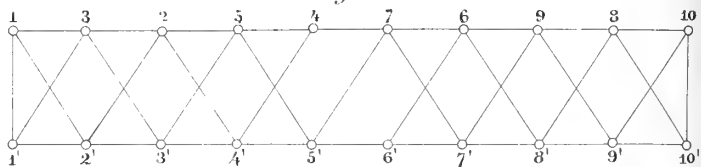
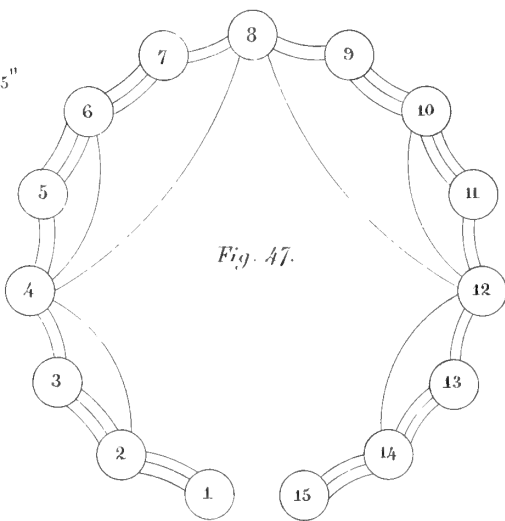
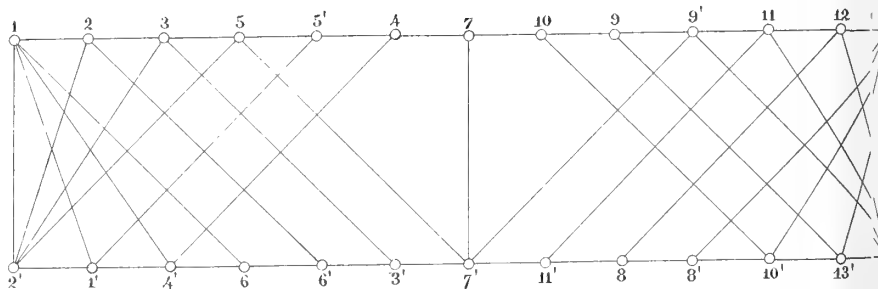
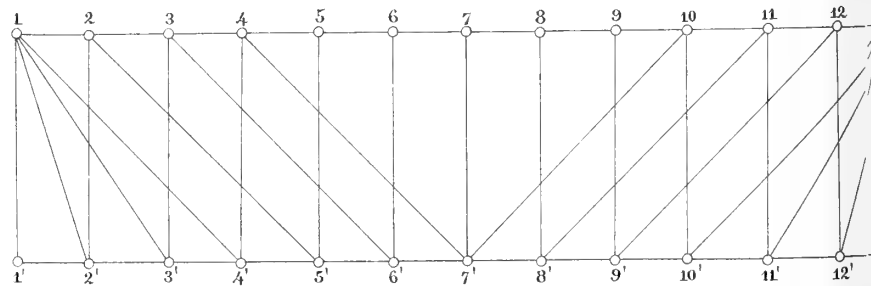
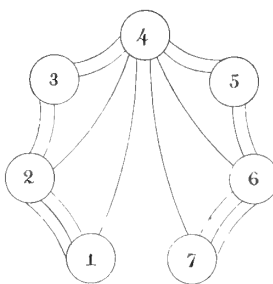
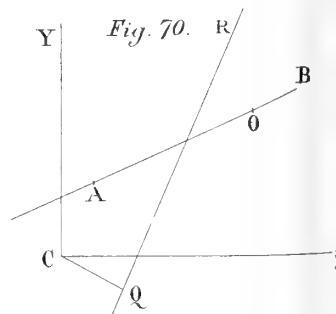



Fig. 46.
Fig. 48.
Fig. 47.
Fig. 54.
Fig. 53.
1 - 3
6 - 10
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Y
R
B
O
A
C
Q

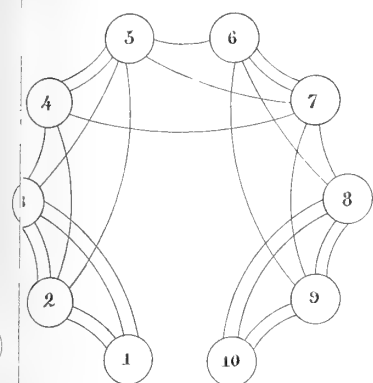
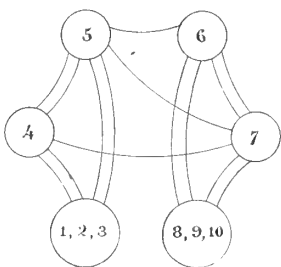
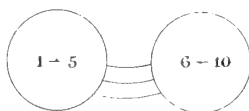
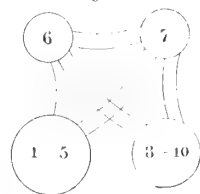
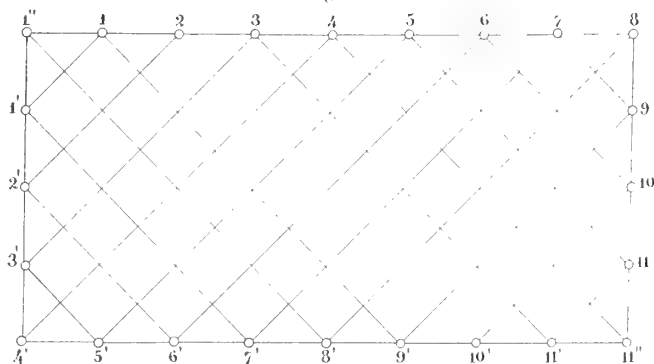
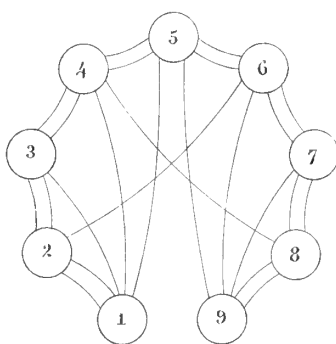
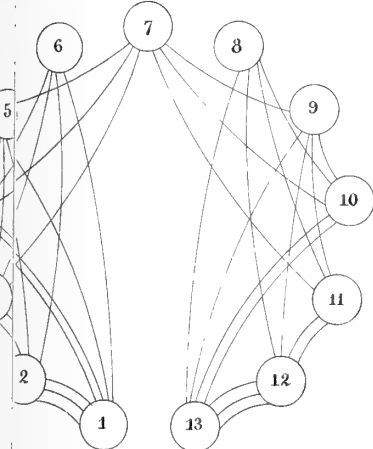
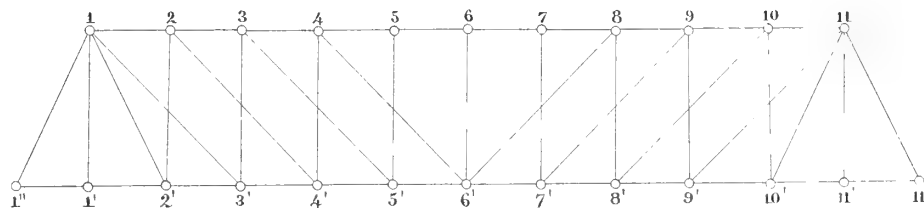
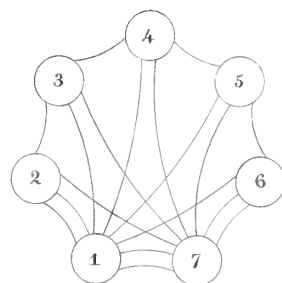
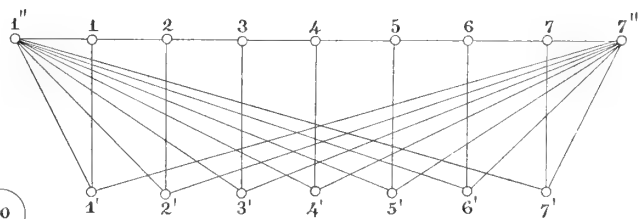
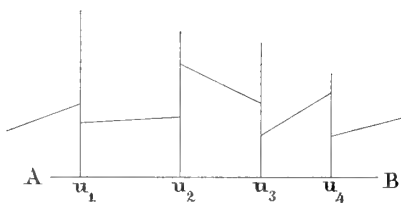
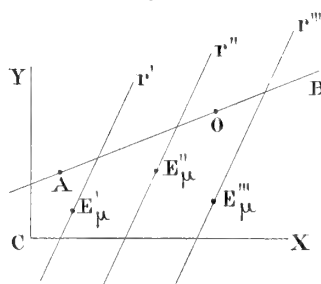
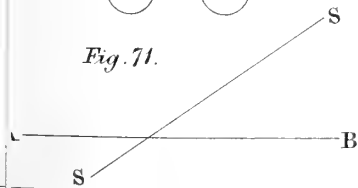
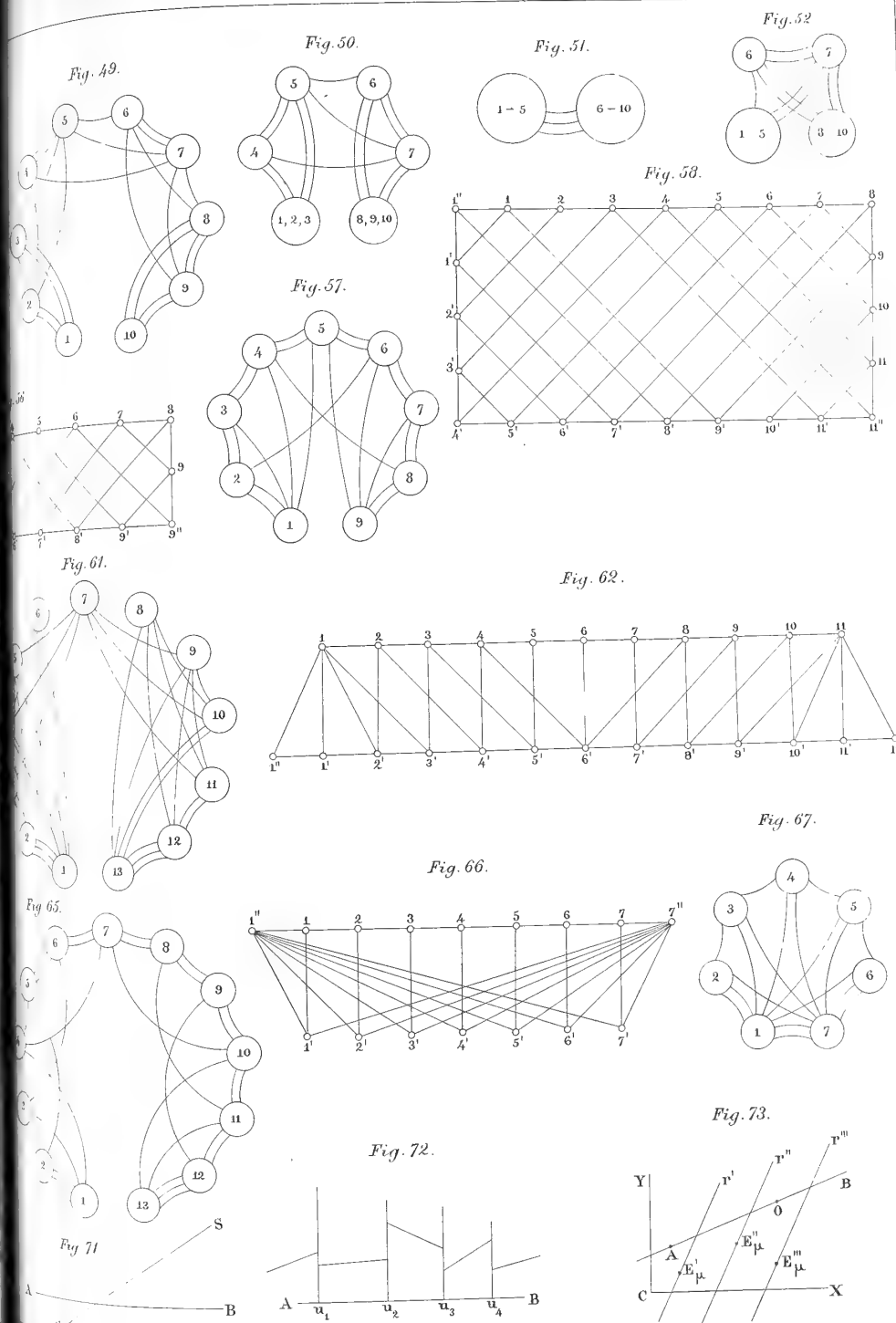
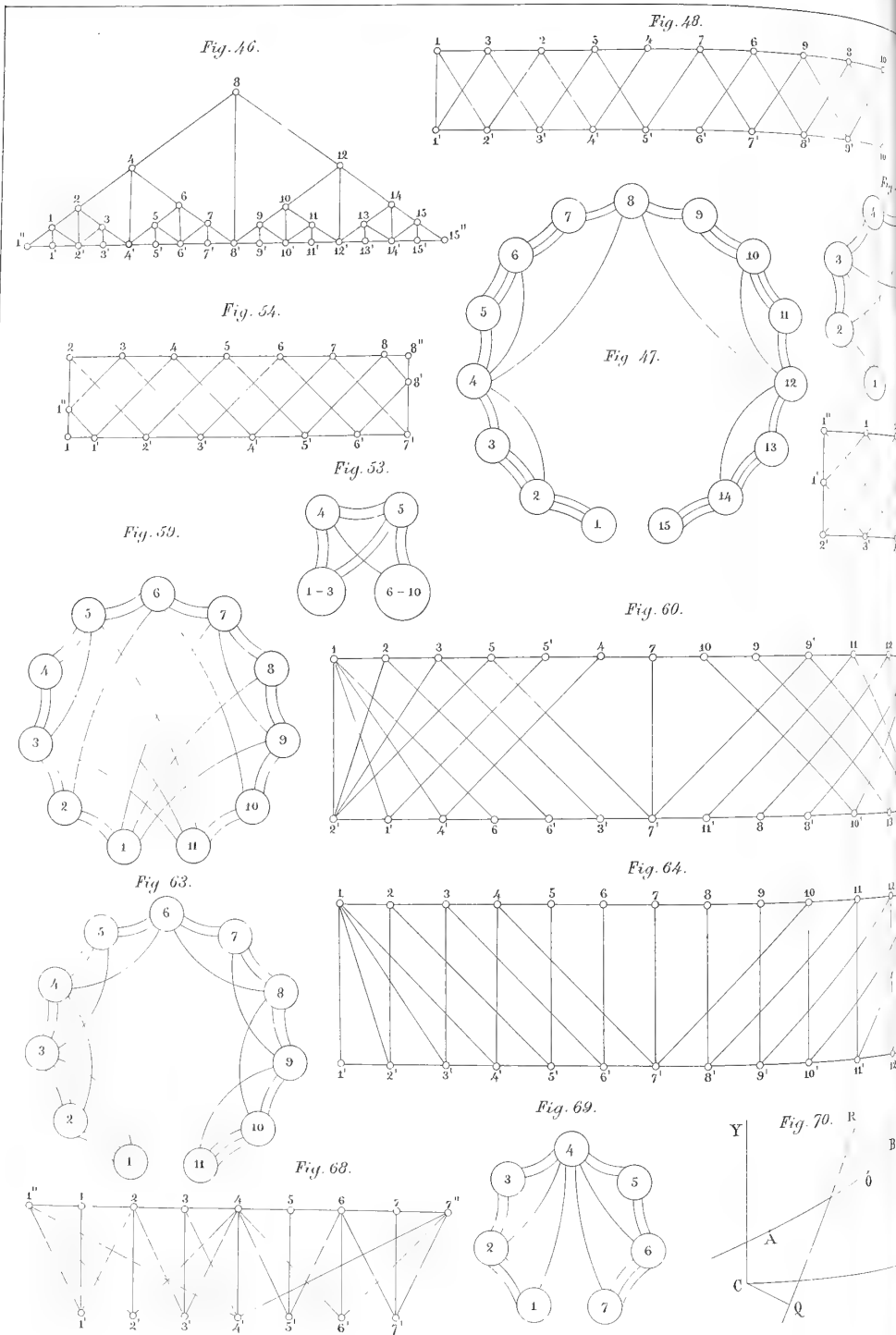
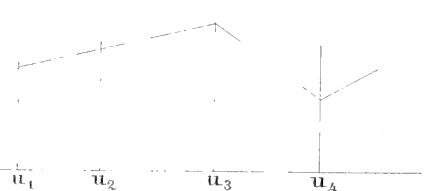
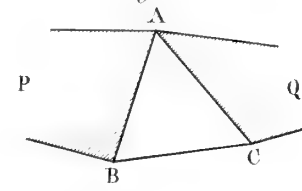
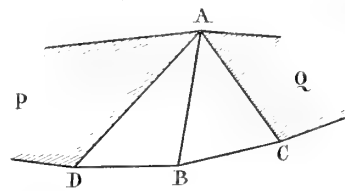
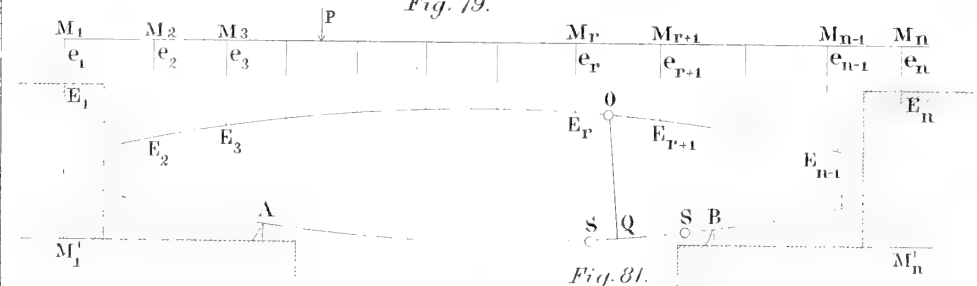



Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.

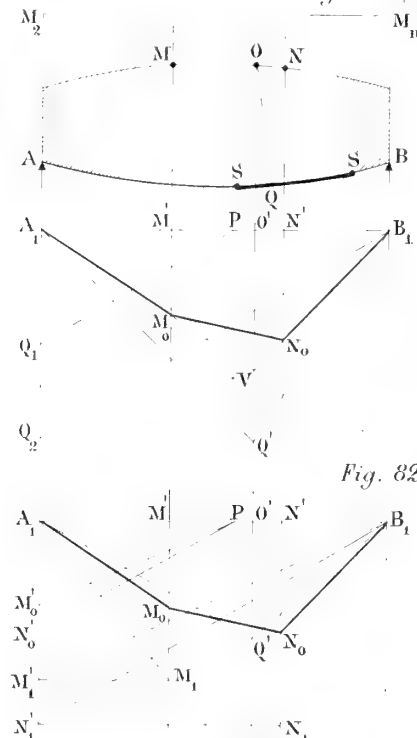
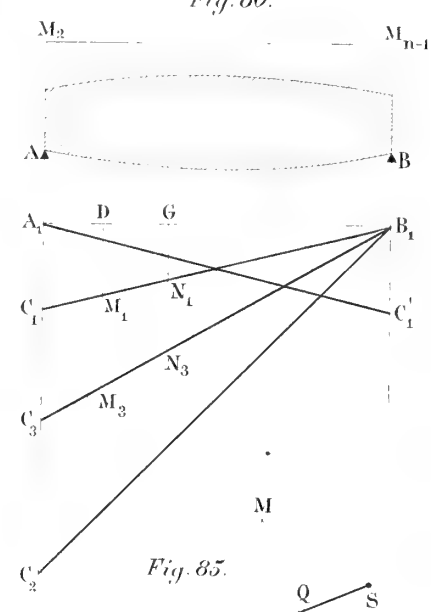
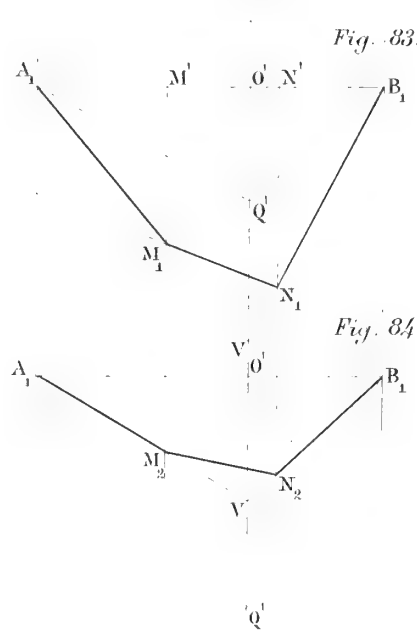
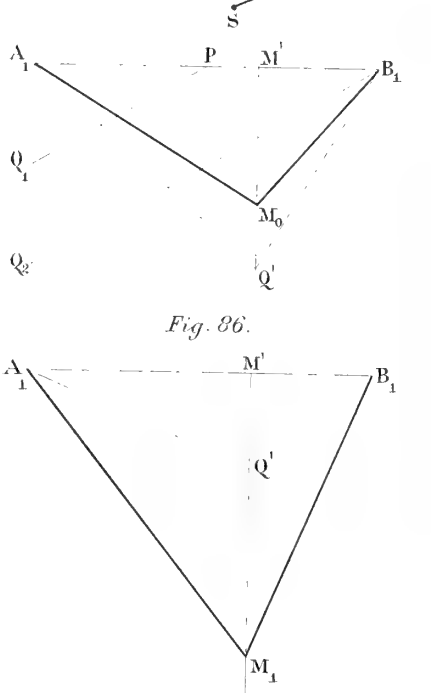
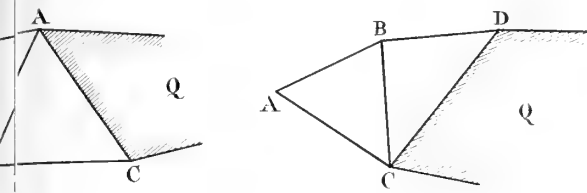
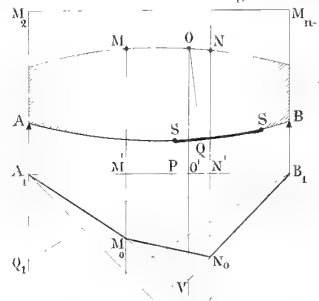
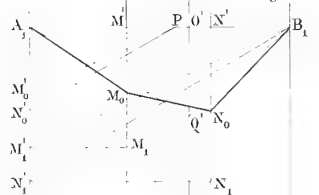
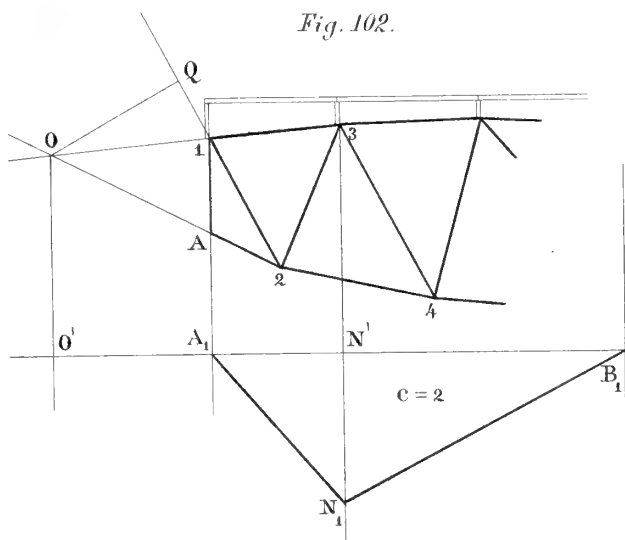
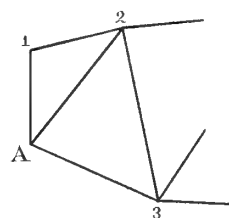
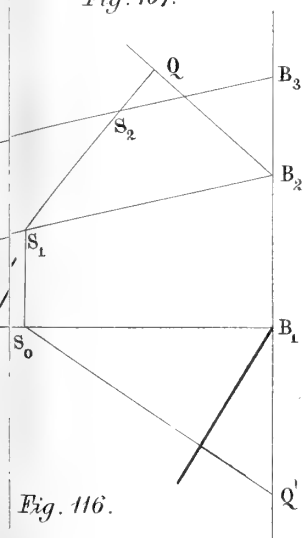
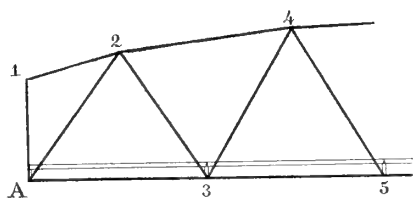
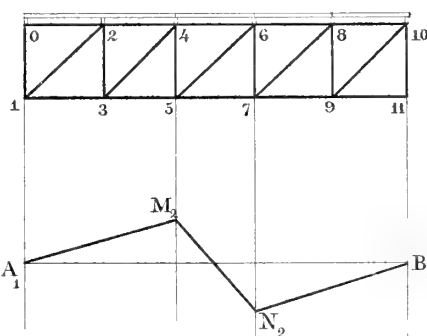



Fig. 78.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
c = 3
c = 3
c = 3
c = 1

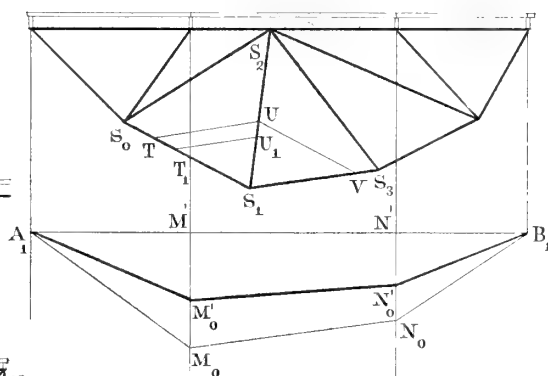
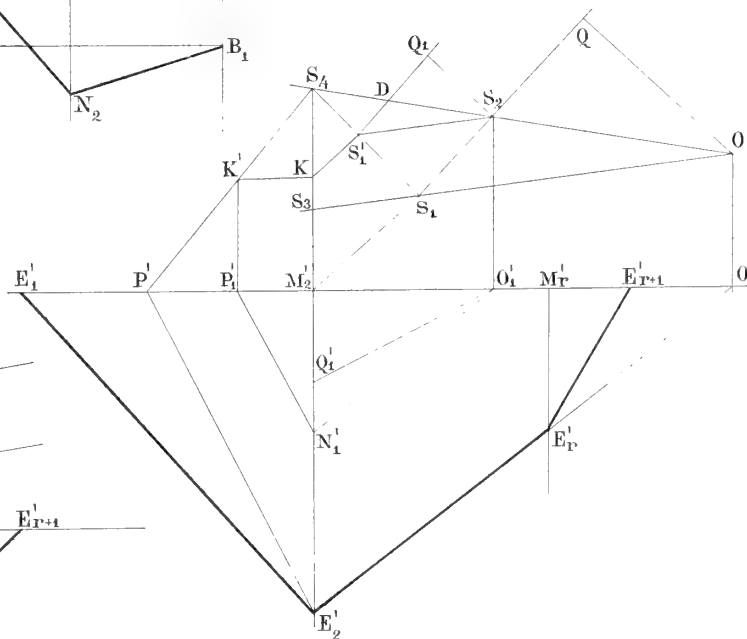
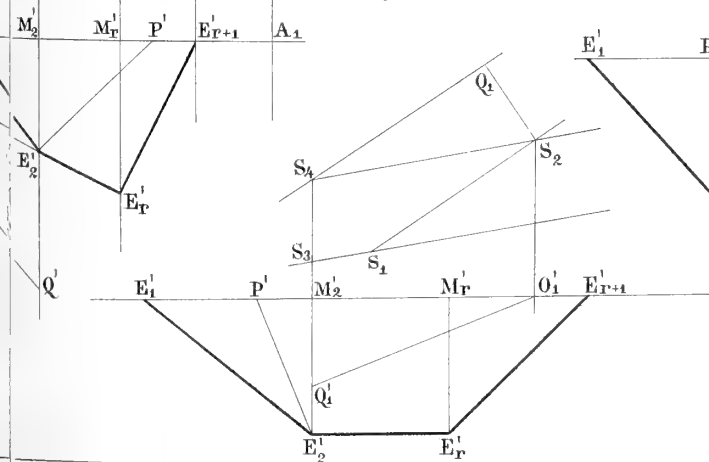
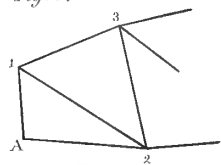
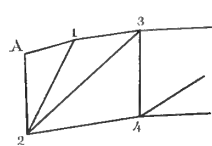
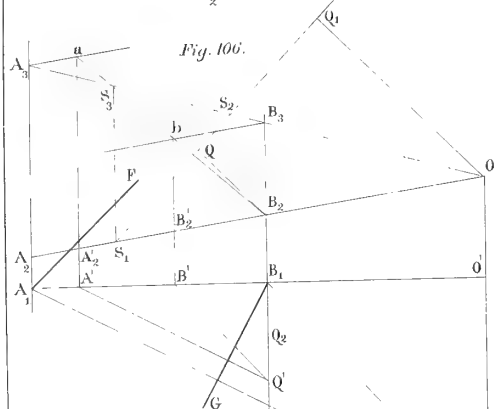
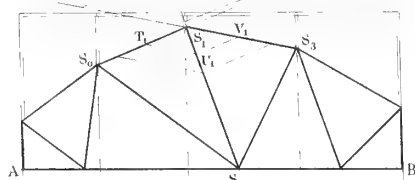
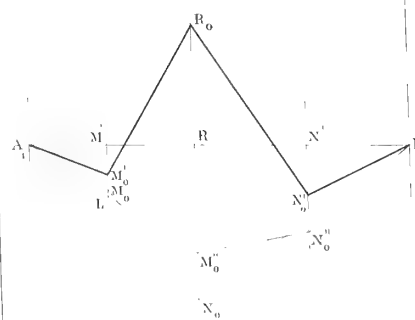
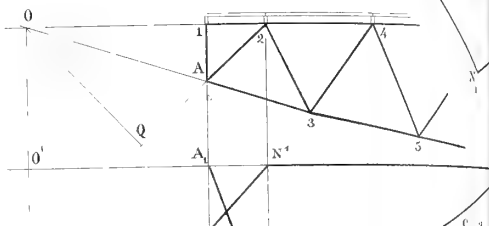
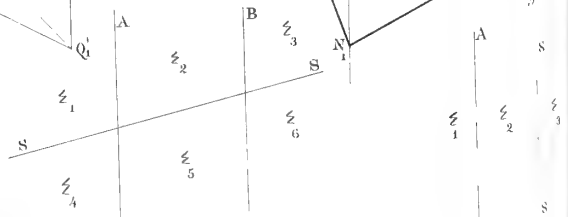



Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 106.
Fig. 105.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 110.
Fig. 114.
Fig. 115.

Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
c = 2

Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116
Fig. 117.
Fig. 118.
c = 2

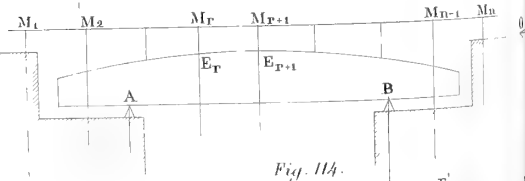
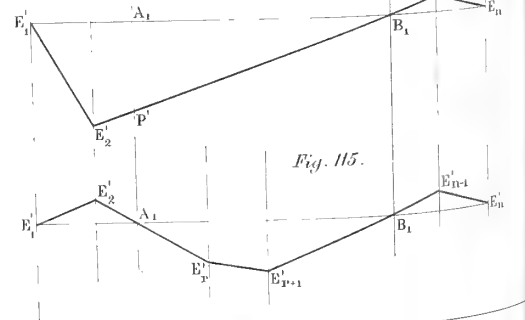
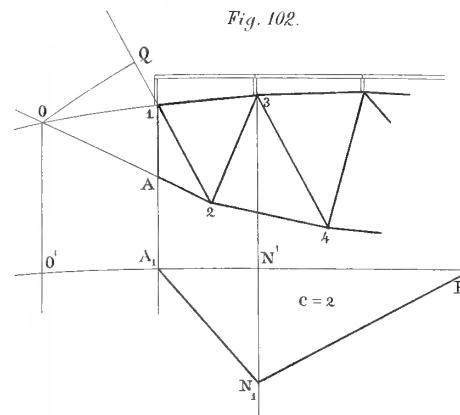
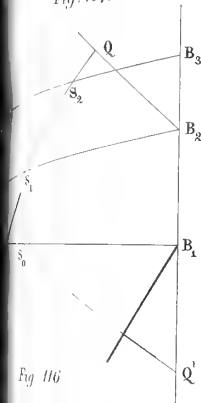
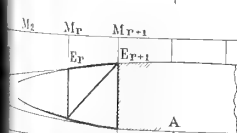
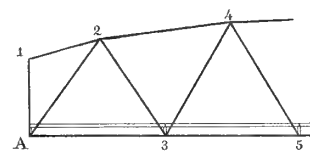
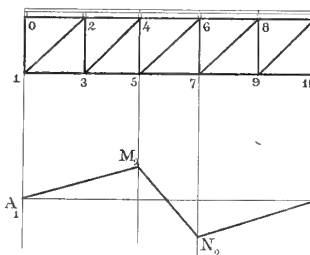
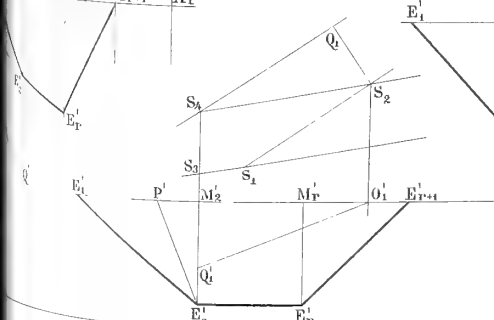
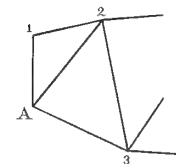
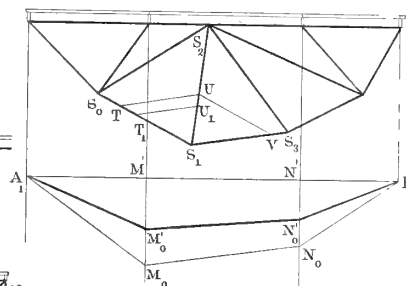
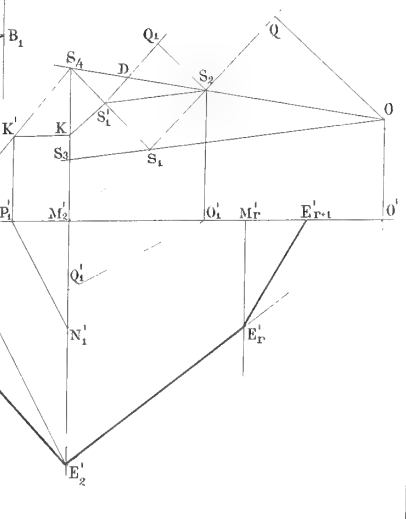



Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125
Fig. 126.
c = 2
l = 36m
c = 10

Fig. 122.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
l = 16ᵐ
c = 6
Fig. 134.
c = 3
Fig. 135.
c = 2

Lit. Danesi

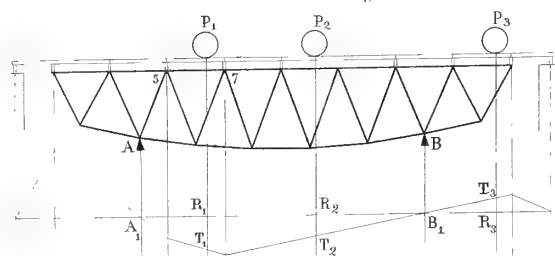
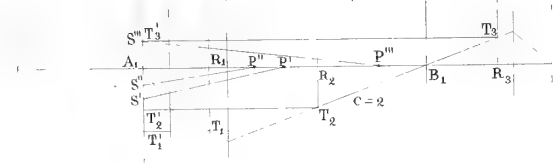
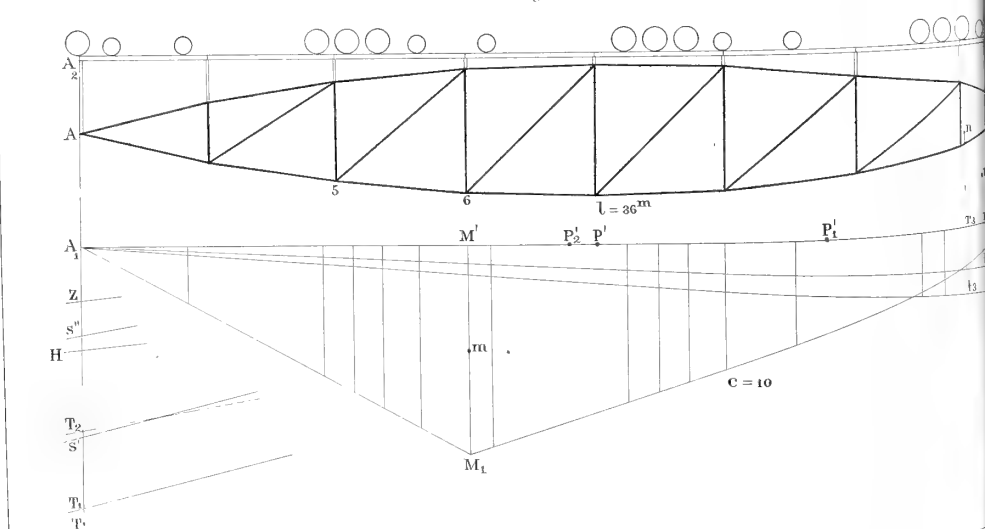
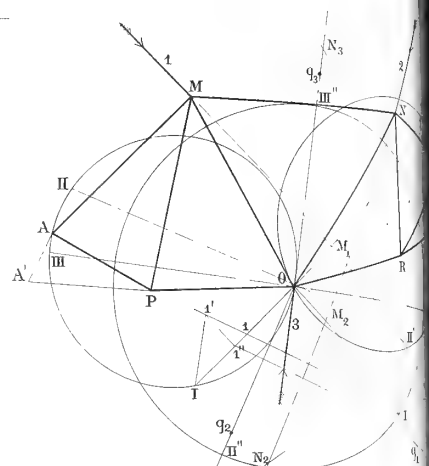
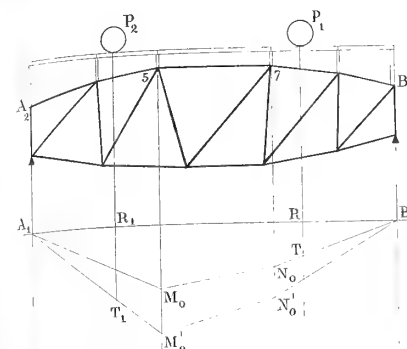
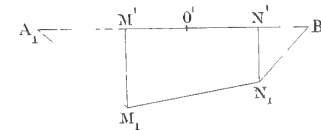
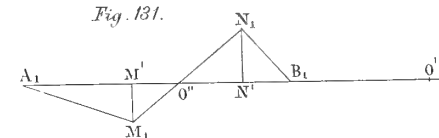



Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig 125
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
c = 2
c = 10
c = 6
c = 3
Lit. Danesi

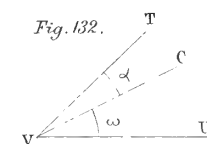
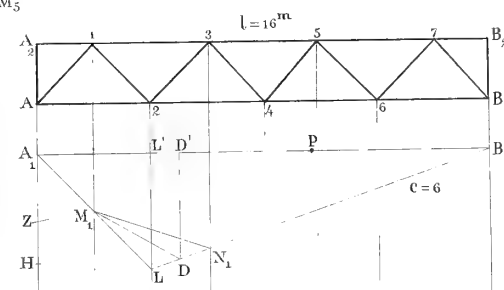
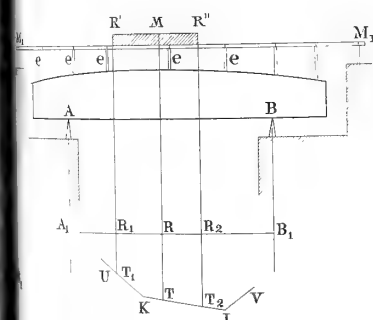
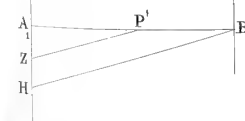
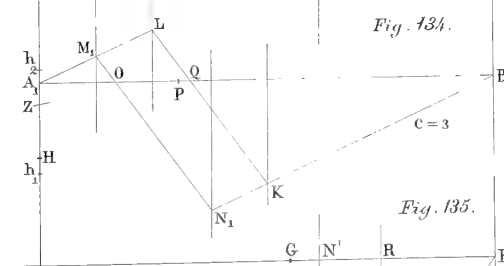
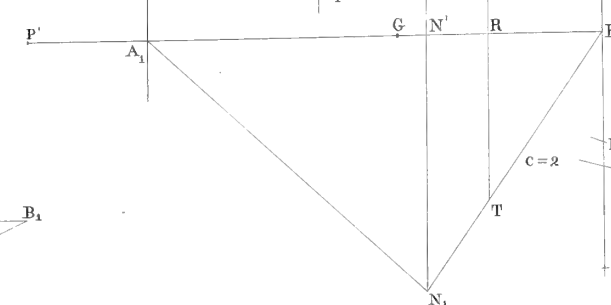
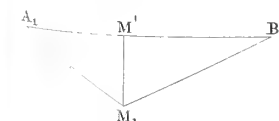
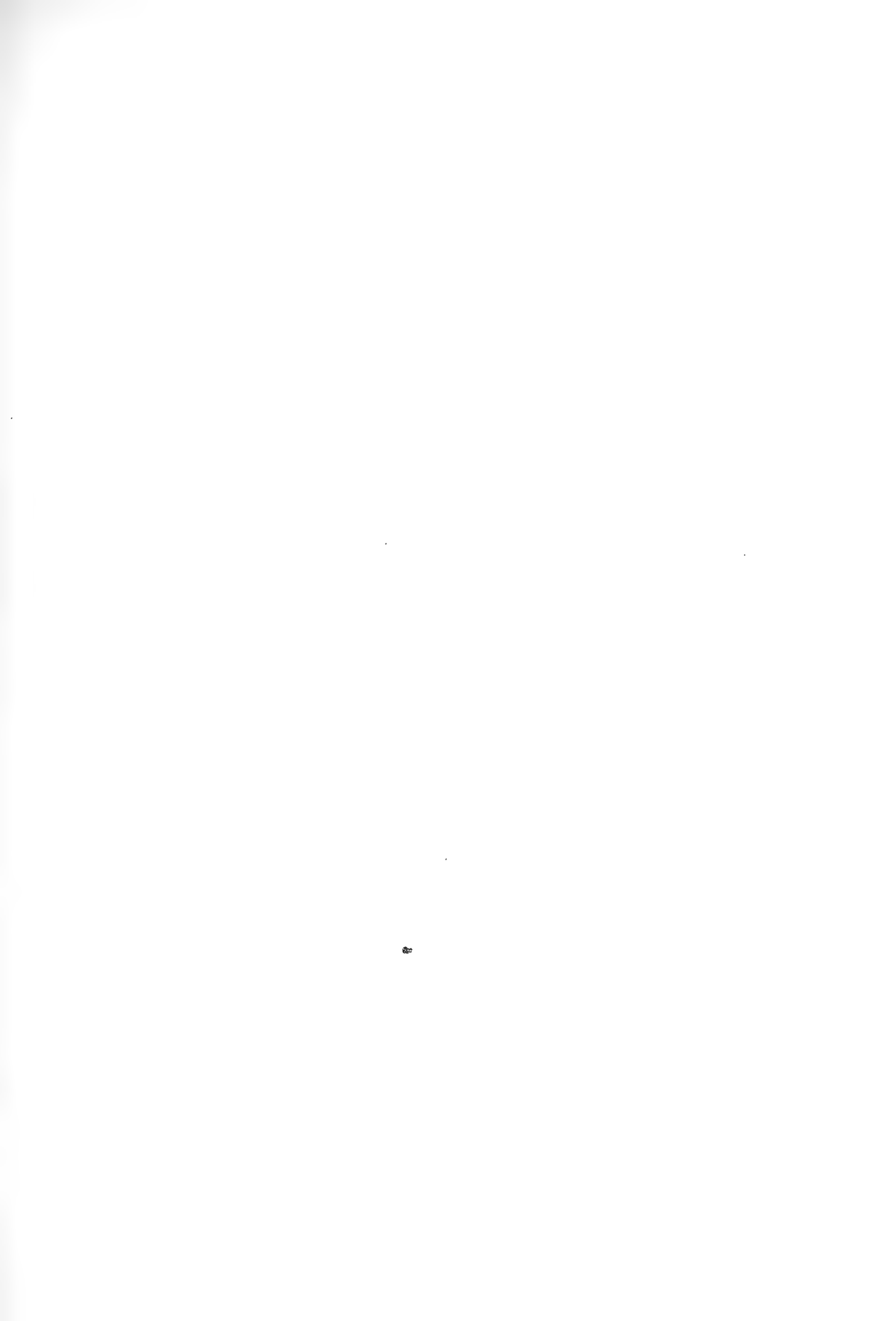
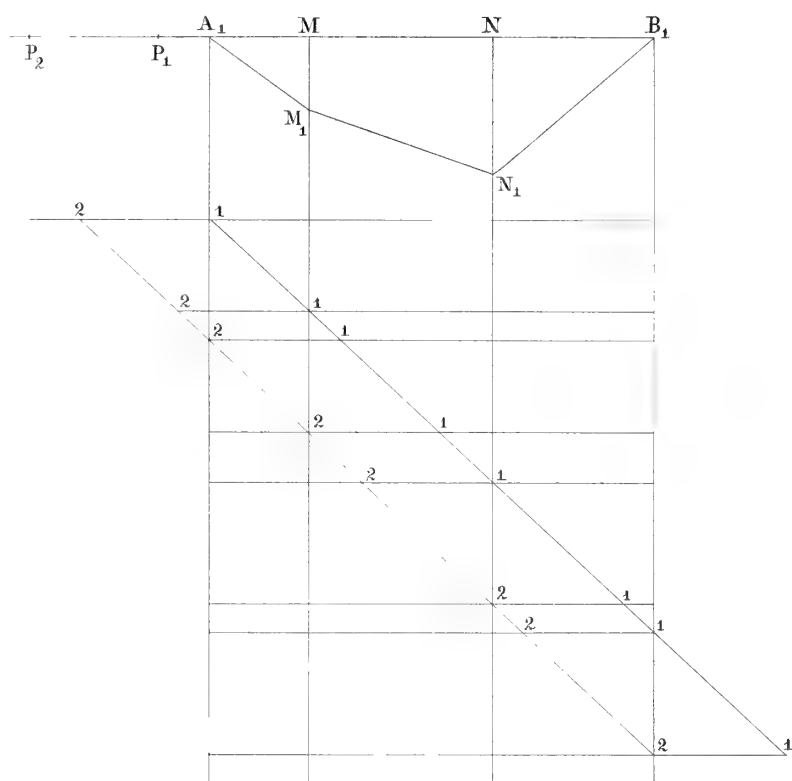
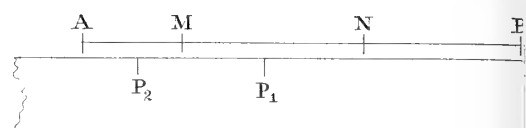



Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 147.
Fig. 146.
l = 16^m
1º min.
1º mas.
2º min.
2º mas.
c = 6

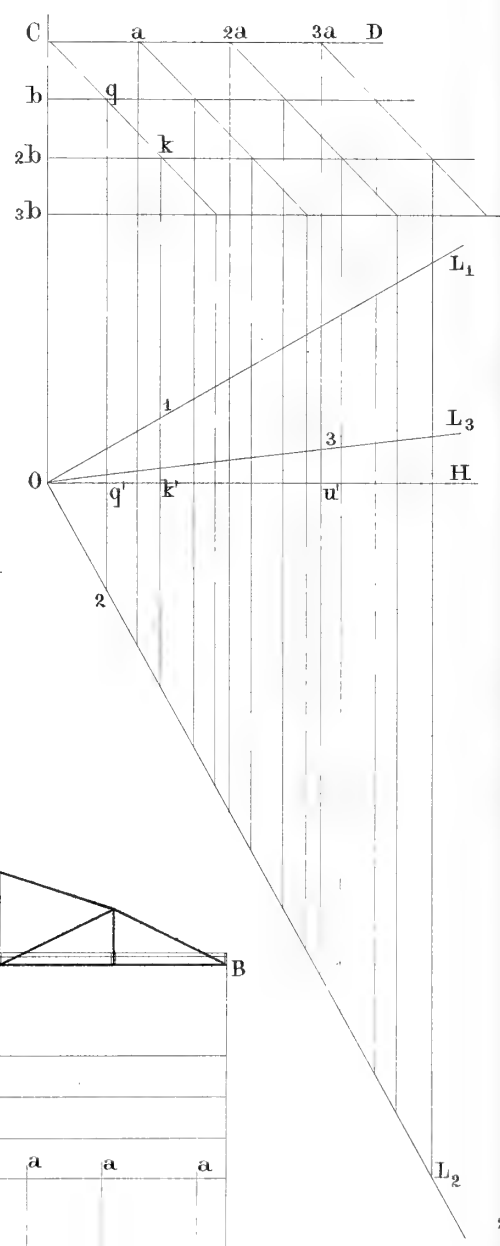
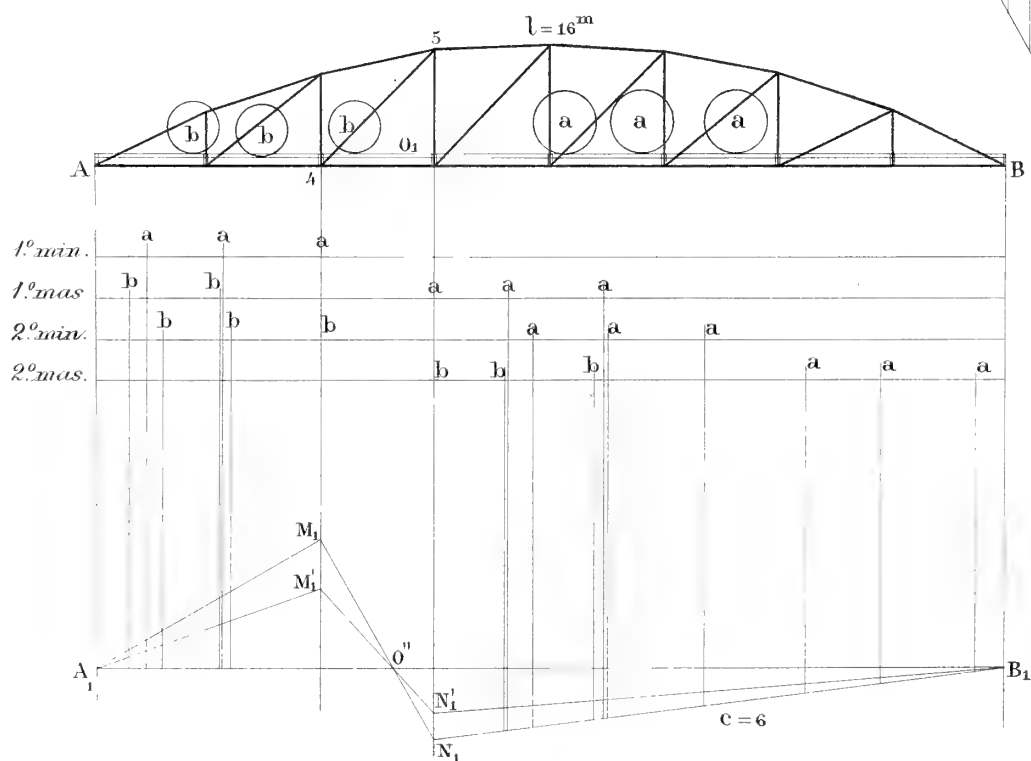
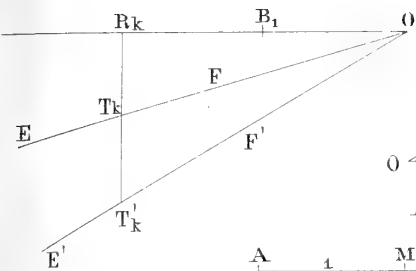
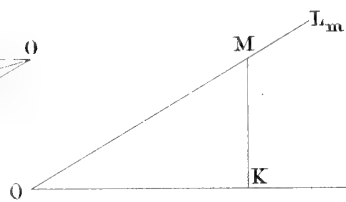
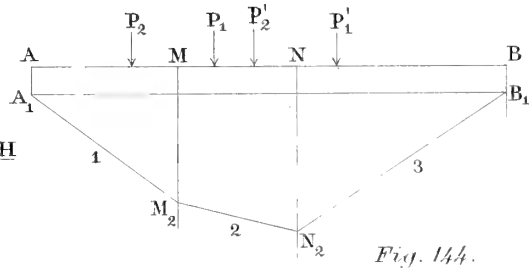
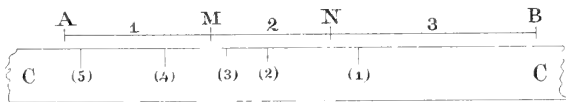
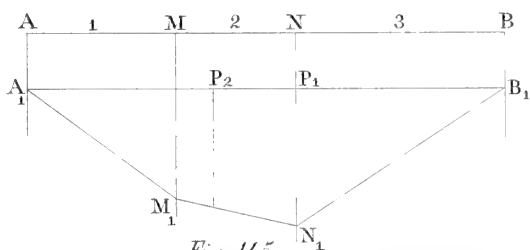
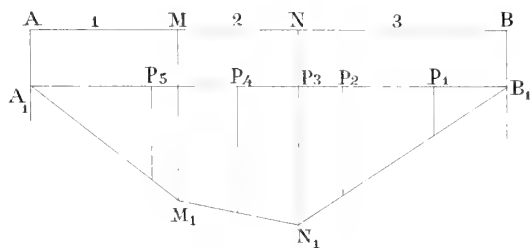
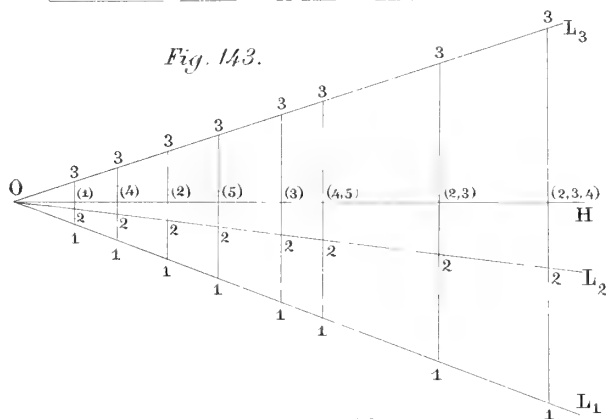
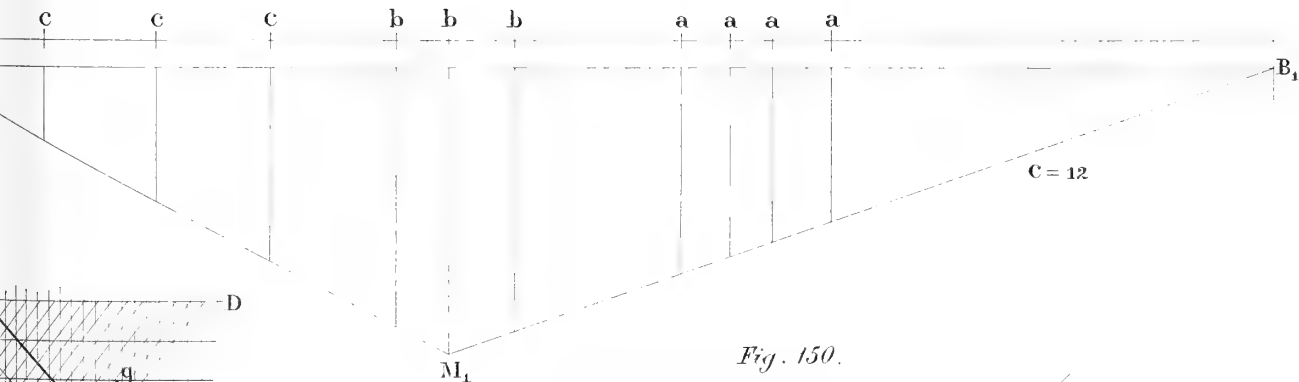
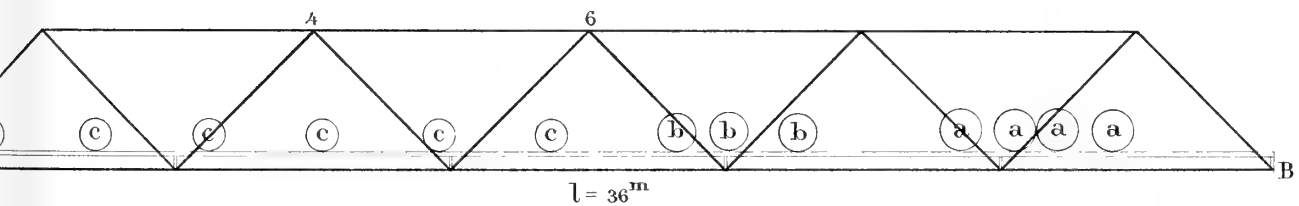
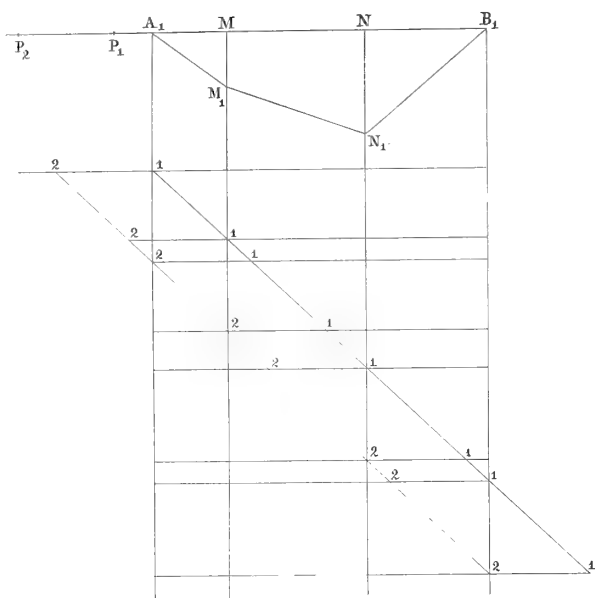
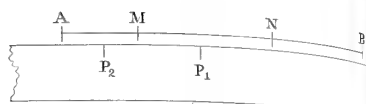
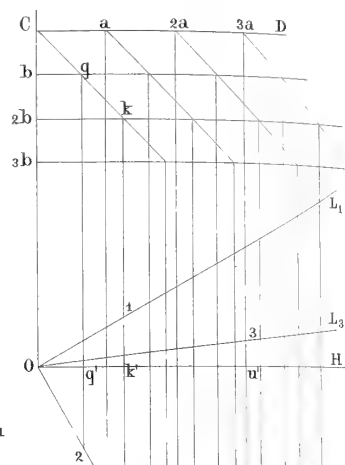
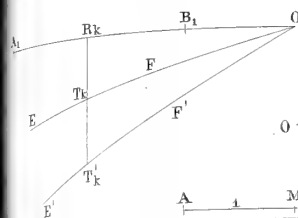
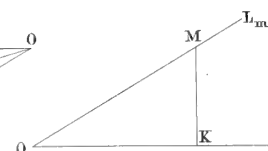
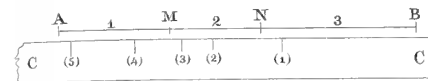
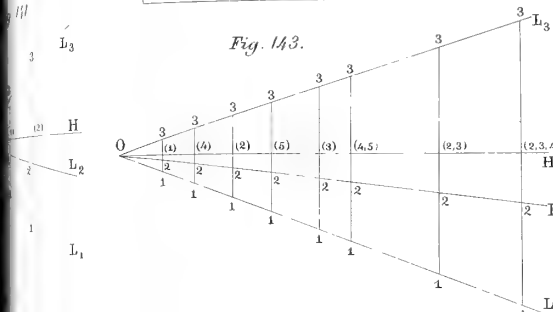
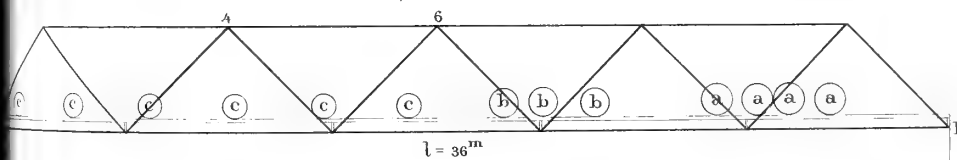
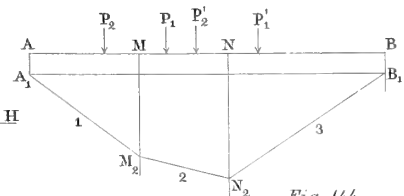
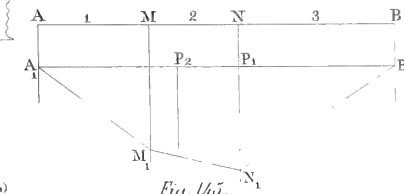
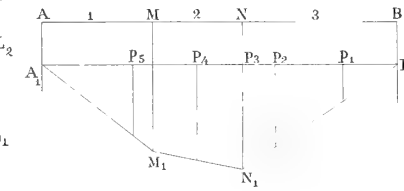
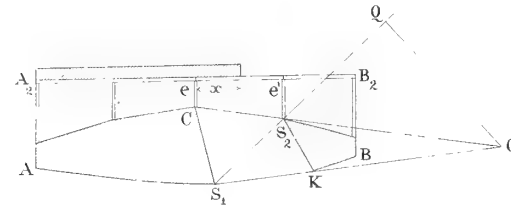



Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 142
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 148.
l = 36m
C = 12
Fig. 150.

Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 142
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 150.
l = 16ᵐ
l = 36ᵐ
c = 6
c = 12
1.º min
1.º mas
2.º min.
2.º mas

Il calcare di Leitha, il Sarmatiano e gli Strati a Congerie nei monti di Livorno, di Castellina marittima, di Miemo e di Monte Catini.

Considerazioni geologiche e paleontologiche del prof. G. CAPELLINI

lette nella seduta del 3 marzo 1878.

Verso la fine del 1874 e nella prima metà del 1875, rendendo conto di nuove ricerche stratigrafiche e paleontologiche nei monti livornesi e specialmente nei dintorni di Rosignano, di Castelnuovo della Misericordia e del Gabbro, assicurai che ivi esistevano il *Sarmatiano* e il *Calcare di Leitha* e feci cenno della continuazione dei veri *Strati a Congerie* nella Valle del Salvolano e nelle vicinanze di Livorno in rapporto coi gessi della Puzzolente e di Limone.

Dopo la prima scoperta degli strati a Congerie nella Valle del Marmolaio nel 1860 [1] e anche dopo la pubblicazione degli studî *sulla formazione gessosa con alabastro* di Castellina marittima, i molti e interessanti lavori pubblicati in Italia e all'estero intorno ai terreni terziarî recenti e sopratutto intorno al Sarmatiano e agli strati a Congerie, e in parte lo studio diretto che di queste formazioni ho potuto fare in Valacchia, Grecia, Ungheria, mi hanno posto in grado di istituire opportuni confronti e di rendermi conto dei loro rapporti geologici e paleontologici.

Essendo necessario assai tempo per la completa illustrazione dei copiosi materiali che ho già raccolto e non volendo rischiare di perdere, anche in parte, il frutto di lunghe fatiche e dispendiose ricerche, ho pensato di prender data innanzi a questa R. Accademia dei Lincei, presentando un abbozzo di carta geologica di una parte della provincia di Pisa e dintorni di Livorno nella scala di 1 a 75000; annunziando in pari tempo le principali scoperte che ivi ho fatte in questi ultimi anni e le più importanti conclusioni che da esse parmi si possano dedurre. In questa circostanza piacemi altresì di ricordare che i miei amici signori Bartolini, Nardi e Lobin mi coadiuvarono anche in queste più recenti esplorazioni.

CALCARE DI LEITHA.

Il nucleo principale dei monti di Livorno, di Castellina marittima e di Monte Vaso, di Riparbella, di Miemo, di Montecatini è costituito da gabbri, serpentine diallagiche, diabasi, che si presentano attraverso roccie calcaree, schistose e

[1] Capellini, *Notizie geologiche e paleontologiche sui gessi di Castellina marittima.* Nuovo Cimento. Vol. XII. Pisa, 1860.

arenacee giudicate non più antiche del cretaceo superiore, forse in parte riferibili al terziario inferiore, e che nell'insieme corrispondono al *Flysch*.

In questo complesso di roccie, alle quali si associano oficalci, diaspri manganesiferi, ftaniti ed altri prodotti di metamorfismo, si incontrano minerali svariati, taluni dei quali costituiscono giacimenti di notevole importanza; fra essi primeggiano i minerali di rame i quali, come a tutti è noto, anche attualmente sono scavati a Monte Catini e al Terriccio e un tempo furono oggetto di ricerche più o meno infruttuose al Romito, a Monte Vaso, Castellina, Riparbella, Miemo. Oltre il rame sono da ricordare i minerali di ferro, di piombo, di manganese, di cromo, e per quei che si interessano di studî mineralogici citerò particolarmente la steatite, l'asbesto e la baritina dei monti di Livorno, la prehnite bellissima che ivi accompagna le ematiti, le piriti e il ferro calcedonioso; le numerose zeoliti che si incontrano nelle roccie diabasiche di Monte Catini, e la baritina che ha contribuito alla fossilizzazione delle ossa di cetacei nelle Valli della Sterza e della Fine.

Le masse montuose che resultano dalle roccie sopra menzionate, un tempo costituirono un gruppo di isole, come ho altra volta dimostrato; attualmente sono collegate fra loro da depositi terziarî in grandissima parte riferibili al pliocene e solo per piccole zone spettanti al miocene superiore e medio.

Le mie ricerche in quelle montagne, fino dal 1856, avendo avuto di mira specialmente quanto riguarda le formazioni mioceniche e mio-plioceniche, oggi mi limiterò a ricordare più specialmente le cose osservate e studiate nella grande vallata della Fine e del Salvolano fra i monti di Livorno e quelli della Castellina e di Monte Vaso, e nella Valle della Sterza di Laiatico fra i monti della Castellina e quelli di Miemo. Prendendo le mosse dai dintorni di Castellina marittima, ove con precedenti lavori già sopra accennati ho dimostrato la esistenza del calcare di Leitha rappresentato dai calcari di aspetto cavernoso e quasi dolomitico di Santo al Poggio e dalle panchine del Conventaccio delle Badie, ho cercato di rintracciare la continuazione di questa formazione prima nel versante orientale dei monti livornesi e poscia altrove.

Da lungo tempo avevo assimilati, cronologicamente, i calcari di Rosignano e delle Parrane con il calcare di San Giovanni e Santo al Poggio presso Castellina; si trattava però di meglio analizzarli e di precisarne i rapporti scambievoli. Questo studio incominciato nel 1860 nelle antiche cave di calcare di Rosignano sotto il palazzo Mastiani, l'ho continuato in seguito, visitando ripetutamente i tagli della nuova strada dall'Acquabuona a Rosignano e le cave dette del Bellini a poca distanza dalla stazione. In queste esplorazioni ho potuto rendermi conto delle svariate forme litologiche del calcare di Rosignano, dal tipo di calcare grossolano che costituisce gli strati superiori, fino alla varietà a elementi così minuti da poterlo quasi considerare come un calcare marnoso o tufaceo. Con queste roccie decisamente calcaree si intercalano strati sabbiosi e ciottolosi i cui elementi provengono in grandissima parte da diabase ordinaria e più ancora da diabase porfirica, quale s'incontra nei vicini monti di Riparbella e Miemo. Lo strato più profondo delle cave del Bellini è costituito da calcare della varietà la più compatta e la più fina, è di colore biancastro con grandi amigdale turchiniccie, ha più di tre metri di potenza e corrisponde agli strati utilizzati nelle cave Mastiani; contiene numerosi fossili, in parte allo stato di modelli, in parte col guscio ben conservato.

Dallo strato più profondo di calcare compatto fino al calcare superiore frammentario disgregato e con molti avanzi di *Porites*, si può calcolare una potenza di circa 15 metri e tutta la serie inclina di circa 17° a sud-est.

I principali fossili che vi ho raccolto sono i seguenti [1]:

Conus sp.
Cerithium sp.
Rissoa, parecchie sp.
Marginella sp.
Trochus sp.
Bulla sp.
Tellina serrata, Ren.
Lutraria oblonga, Chem.
» *sanna*, Bast.
Venus Haidingeri, Hörn.
Tapes vetula, Bast.
Donax lucida, Eichw.
Arca diluvii, Lam.
» *Breislaki*, Bast.
Pecten aduncus, Bast.
P. sp.
Ostrea digitalina, Eichw.
Psammechinus monilis, Desm.
Porites sp.

Fra Rosignano e Castelnuovo della Misericordia il calcare di Leitha si incontra al podere detto i Colli, poco prima di arrivare a Poggiarino alto.

Le forme litologiche che il calcare di Leitha assume nelle cave presso Castelnuovo sono meritevoli di particolare attenzione.

Alla base vi ha un conglomerato costituito da ciottoli prevalentemente di calcare, di diabase, di serpentina, e in mezzo ad esso si trovano tronchi di legni silicizzati; fanno seguito, in serie ascendente, strati di calcare marnoso giallastro con molti avanzi vegetali, specialmente frammenti di tronchi, e molte conchiglie bivalvi. Questa roccia passa superiormente ad un calcare lumachella giallastro, il quale ricorda le panchine di s. Dalmazio e del Conventaccio delle Badie. Questo calcare abbonda di coralli e parzialmente assume tinta rossastra, diventa durissimo e costituisce noccioli i quali potrebbero essere suscettibili di pulimento come un vero marmo lumachella; taluni di questi noccioli ricordano perfino certe varietà di oficalce rossastra. Gli strati superiori, finalmente, sono più teneri e direi ancora sabbiosi; contengono gran quantità di molluschi ed altri fossili, i quali in complesso corrispondono a quelli di Paltratico e Scaforno che or ora esamineremo, però a Paltratico il *Pecten aduncus* è raro, mentre nelle cave di Castelnuovo è abbondante.

La strada che da Rosignano va a Castelnuovo taglia gli strati del calcare di Leitha inclinati verso levante; in questa direzione, cioè a destra della strada andando verso Castelnuovo, precisamente nel podere di s. Pierino, vi hanno sabbie marnose le quali riposano sul calcare di Leitha e sono ricchissime di fossili, fra i quali la *Turritella turris*, la *Corbula gibba*, la *Rotella subsuturalis*, rappresentano la metà quantitativa degli esemplari che vi si raccolgono. Di queste sabbie marnose dirò nuovamente dopo che avrò accennato altri luoghi ove il calcare di Leitha è ben sviluppato e caratterizzato.

Poco prima di arrivare a Castelnuovo, la strada che va a Livorno e a Paltratico lascia il calcare miocenico e attraversa calcare alberese, schisti galestrini e gabbro.

[1] Il r. Museo geologico di Bologna possiede anche la piccola raccolta di fossili del calcare di Rosignano fatta dal dott. Manzoni (V. Manzoni, *Aggiunta di notizie e di considerazioni alla Relazione di un viaggio geologico in Italia del dott. T. Fuchs*. Bollettino del r. Comitato geologico. Anno 1874, p. 233.

A Scaforno presso Paltratico vi hanno molasse marnose che passano a conglomerati calcareo-serpentinosi e contengono una ricca fauna avente molti rapporti con quella delle marne sabbiose di s. Pierino. Alla base vi hanno bellissimi coralli (*Porites, Astraea, Heliastraea, Cladangia*) e fra i molluschi si trovano *Pecten aduncus, Ostrea digitalina;* superiormente sono molto sviluppate ostriche di grandi dimensioni, fra le quali si nota l'*Ostrea gingensis,* e intercalati con questi strati vi hanno marne con *Cerithium pictum, C. doliolum* e altri fossili che accennano a deposito veramente salmastro e caratterizzano il piano Sarmatiano. A Paltratico non vi ha il vero calcare di Leitha, ma continuano i conglomerati e le molasse caratterizzate da fossili che accennano ad un passaggio del calcare di Leitha al Sarmatiano. Avanzando in direzione del Gabbro, a metà strada fra il Gabbro e Paltratico in un luogo detto La Pineta i fossili diventano abbondanti e alla base si notano le marne sabbiose di Scaforno, presso a poco con i medesimi fossili, mentre superiormente la roccia e la fauna si modificano alquanto; la roccia infatti si fa più marnosa e i molluschi fossili che vi si incontrano conservano il loro guscio, ma sono riempiti da marna cementata da ossido di ferro e talvolta anche da sostanza calcedoniosa ([1]).

Nella seguente lista sono registrati i principali fossili che ho raccolto in diverse escursioni a Scaforno e Paltratico, e riferirò quelli della Pineta di Paltratico dopo avere accennato altri giacimenti che hanno con essa la più stretta analogia.

SCAFORNO E PALTRATICO.

Fusus Valenciennesi, Grat.
Nassa miocenica, Mich.
N. semistriata, Br.
N. Rosthorni, Partsch.
Natica helicina, Br.
Chenopus pes-pelecani, Ph.
Turritella turris, Bast.
Corbula gibba, Olivi.
C. Basteroti, Hörn.
Venus plicata, Gm.
V. multilamella, Lam.
V. Islandicoides, Lam.
V. Dujardini, Hörn.
Tapes gregaria, Partsch.
Dosinia exoleta, L.
Lucina borealis, L.
L. incrassata, Dub.
L. transversa, Bronn.
Cardium turonicum, Mayer.
C. paucicostatum, Sow.
Arca turonica, Duj.
A. Breislaki, Bast.
A. Diluvii, Lam.
Nucula nucleus, L.
Leda pella, L.
Modiola Brocchii, Mayer.
Ostrea digitalina, Eichw.
O. lamellosa, Br.
O. cochlear, Poli.
O. sp.
Pecten aduncus, Eichw.
P. substriatus, d'Orb.
Psammechinus monilis, Desm.
Schizaster Scillae, De-Moul.
Serpula sp.
Cellepora sp.
Membranipora angulosa, Reuss.
Lepralia ansata, Svan.

([1]) Nelle molasse del podere nuovo di faccia a casa Nardi vi sono bellissimi filoni di calcedonio bianco; anche a Cordecimo si trovano concrezioni calcedoniose e sabbia con conchiglie a nucleo agatizzato.

Coralli raccolti a Castelnuovo e a Scaforno

Heliastraea Defrancei, M. E.
H. sp.
Solenastraea manipulata, Reuss.
S. distans, Reuss.
Astraea crenulata, Gold.
A. Fröhlichiana, Reuss.
Cladangia conferta, Reuss.
Porites ramosa, Cat.
P. incrustans, Defr.

Non volendo, per ora, intrattenermi ad esaminare quanto si può riferire al Sarmatiano e desiderando invece di notare ciò che più decisamente spetta al calcare di Leitha, dirò che verso settentrione questa roccia si incontra di nuovo a Colognole ove si presenta con caratteri litologici un poco diversi da quelli che ho già fatto notare per le precedenti località.

La massa profonda della roccia è costituita da un calcare granulare, abbastanza compatto, durissimo, di colore bigio tendente al giallognolo; superiormente diventa sabbiosa e passa ad una specie di molassa molto ferruginosa, nella quale si trovano importanti nidi di fossili col guscio spatizzato, facili ad aversi ove la roccia fu attaccata dagli agenti atmosferici. In taluni punti la roccia si può dire un impasto di sabbia e gusci di *Venus Haidingeri,* e nel luogo detto il Castello ho raccolto i seguenti fossili.

Pleurotoma sp.
Ancillaria glandiformis, Lam.
Rotella subsuturalis, d'Orb.
Lutraria oblonga, Chem.
Venus multilamella, Lam.
Venus Haidingeri, Hörn.
Cytherea Pedemontana, Agass.
Cardita crassicosta, Lam.
Lucina columbella, Lam.
Arca diluvii, Lam.

Il calcare di Leitha di Colognole si trova a circa 180 metri sul livello del mare; costituisce una massa slegata da quelle precedentemente esaminate e nel tempo stesso senza rapporti con il calcare delle vicine Parrane, che da lungo tempo ho pure riferito al calcare di Leitha, dichiarandolo cronologicamente identico al calcare di Santo al Poggio e di Rosignano ([1]).

Il calcare delle Parrane costituisce una importante massa bene stratificata, limitata dal botro dell'Inferno e dal botro del Molinaccio, inclinata circa 35° a nord-est.

Nelle cave Pupi, la potenza dello strato coltivabile, che tanto assomiglia al calcare di Rosignano, è di circa tre metri e cinquanta centimetri; questo strato riposa sopra roccia più grossolana che vien detta renaccio ed è ricoperto dal così detto *spugnone;* lo spugnone non è altro che una potente massa di resti di *Porites ramosa* ammonticchiati confusamente gli uni sopra gli altri e che costituiscono un banco della grossezza di circa 10 metri.

Al luogo detto Lecceta, presso il condotto dell'acqua che va al Cisternone di Livorno, questo banco di *Porites* è ricoperto dalle marne inferiori ai gessi, le quali appaiono sotto Colle Alto, come avrò occasione di ricordare fra poco.

([1]) Capellini, *La formazione gessosa di Castellina marittima e i suoi fossili.* Memorie dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie III, Tomo IV. Bologna, 1874.

Nelle vicinanze di Parrane nuove, lo stesso calcare costituisce anche altra massa non molto grande e con strati molto raddrizzati.

Nel versante occidentale dei Monti livornesi, nella valle del Chioma e precisamente al podere Gorgo, ho riscontrato un lembo riferibile a questa formazione. Ho sospettato che il masso di calcare che costituiva il Monte Tignoso presso l'Ardenza e che fu interamente distrutto per i lavori del porto, potesse appartenere al calcare di Leitha; questo dubbio sarà risolto appena avrò potuto ritrovare esemplari della roccia della quale esisteva ancora una parte allorchè feci le prime escursioni nei dintorni di Livorno con il dott. Castelli e con Sir C. Lyell nel 1857-58.

Ho già accennato dove e come si trovi il calcare di Leitha nei Monti della Castellina e soltanto aggiungerò che, mentre sulla riva destra della Fine nel fianco settentrionale dei Monti livornesi il calcare di Leitha è tanto sviluppato ed offre tante varietà, sulla sponda opposta è limitato alla Valle del Marmolaio; nel fianco meridionale e occidentale dei Monti di Monte Vaso e di Santa Luce non ve ne ha traccia.

Fino ad oggi non ho trovato traccie di calcare di Leitha, nè formazioni corrispondenti, nella Valle della Sterza di Laiatico; soltanto in Val di Era, sotto Monte Catini, ho incontrato alcune masse di calcare e qualche lembo di molassa e di conglomerato che reputo potersi riferire, essi pure, al calcare di Leitha. In questa opinione mi hanno confermato taluni fossili, *Pecten aduncus, Ostrea donacina,* raccolti a Tori il 29 settembre 1876 in compagnia del cav. Lawley, alla distanza di circa 200 metri dalla villetta del sig. avv. Mori. Sotto i conglomerati e il calcare di Leitha ho trovato un calcare fetido fossilifero analogo a quello di Monte Bamboli e che probabilmente non è altro che una formazione cronologicamente corrispondente ad una parte del calcare di Leitha, ossia riferibile al 2° piano mediterraneo dei geologi austriaci. La stessa formazione si presenta con interessante sviluppo verso Orciatico, nel luogo detto le Querce.

SARMATIANO.

Passando ora a dire del Sarmatiano, avvertirò anzi tutto che i limiti fra questo piano e il precedente, detto del calcare di Leitha, non sono sempre ben distinti nè sarebbe possibile di tracciarli completamente in una carta in piccola scala. D'altra parte bisogna ricordarsi che le due formazioni si succedono senza interruzione, che il carattere salmastro indicato anche dal nome dato a questo piano sovente fa difetto, che i fossili del calcare di Leitha superiore sono in massima parte i medesimi del Sarmatiano inferiore, che per conseguenza tutto tende ad accrescere le difficoltà per le divisioni sistematiche. Anche in questa circostanza mi occorre ripetere ciò che ho affermato tante altre volte e cioè: che le divisioni sistematiche andranno sempre più perdendo della loro importanza, quanto meglio e più completamente saranno studiate e analizzate le diverse formazioni in quelle regioni ove la serie stratigrafica è meno incompleta.

Per conseguenza, tornando a percorrere rapidamente le località già esaminate per indicare la formazione del calcare di Leitha, converrà ricercare quanto si potrebbe riferire al piano sarmatiano che nell'abbozzo di carta geologica è stato indicato colla stessa tinta della formazione precedente.

Secondo il mio modo di vedere, nella regione presa in considerazione il Sarmatiano si presenta con diverso aspetto e diversa importanza, secondo le varie località, e costituisce il nesso fra il piano del vero calcare di Leitha e gli strati a Congerie, dei quali ci occuperemo da ultimo.

Specialmente dopo gli interessanti studî del dott. T. Fuchs *Sulle formazioni terziarie recenti della Grecia*, si potrebbe sospettare che una parte degli strati di Santo al Poggio e del Buchicchio presso Castellina, e forse la porzione superiore degli strati di Rosignano possano riferirsi al Sarmatiano; considerandoli come un *facies* marino littorale di questa formazione, analogamente a quanto il dott. Fuchs ha indicato nei dintorni di Trakones (1).

Gli strati a *Ostrea cochlear* di Santo al Poggio e che presso il Buchicchio si trovano subito alla base dei gessi, il calcare tufaceo superiore talvolta cavernoso, che nello stesso luogo è legato intimamente con essi strati, come anche la porzione superiore del calcare del Poggio del Pipistrello e cave di Rosignano convengo che si possano far passare nel Sarmatiano, quando si ritenga che allo stesso piano si debbano riferire gli strati analoghi di Trakones, pure con *Ostrea cochlear*, e perfino il sottostante calcare con *Porites* e *Astraea*.

Queste vedute, mentre converrebbero in parte con quelle del Fuchs, il quale nella più recente sua pubblicazione sul Bacino di Vienna, ha riferito al Sarmatiano il calcare a *Porites* di Rosignano, riportandolo allo stesso livello delle argille di Hernals, non implicherebbero che ora si dovesse riferire al Sarmatiano tutto quanto prima si sincronizzava col calcare di Leitha, anche in considerazione delle forme litologiche, dei fossili e della stratigrafia.

Aperta così la via alla ricognizione del Sarmatiano nei Monti livornesi, io sono disposto a comprendere in esso la porzione superiore degli strati miocenici dei dintorni di Castelnuovo, per es. le marne a *Turritella, Corbula, Rotella* ecc. di s. Pierino, le molasse superiori più o meno marnose di Scaforno e Paltratico con *Tapes gregaria:* necessariamente poi le *marne a Cerizii, Cerithium pictum* e altri fossili salmastri di Scaforno, una parte delle marne con fauna marina della Pineta di Paltratico, e le marne con impronte di bivalvi, *Lucina, Ervilia, Pecten* ecc. alla base della grande formazione dei tripoli del Gabbro, di Paltratico, Castelnuovo ecc.

Questi due ultimi gruppi li considero come quelli che, insieme agli *strati a rissoe* di Rosignano e del Buchicchio, meglio degli altri rappresentano il Sarmatiano inferiore, ed entrambi si trovano bene rappresentati anche nel versante occidentale, sempre dei Monti livornesi, sotto Popogna vecchia, a circa 125 metri sul mare, a Cafaggio e al Gorgo in una posizione che corrisponde fra il Gabbro e la Pineta (2).

A suo tempo non mancherò di mettere anche maggiormente in rilievo i rapporti della serie stratigrafica di Popogna e Cafaggio con quella del Gabbro, della Pineta e di Paltratico (3); e frattanto darò la nota dei fossili più frequenti in questi giacimenti.

(1) Fuchs, *Studien ueber die jüngeren Tertiärbildungen Griechenlands.* Denk. der k. k. Akad. d. Wissensch. B. XXXVII. Wien, 1877.

(2) Nella più recente classificazione di Mayer, forse si potrebbero in gran parte riferire al Tortoniano.

(3) I conglomerati ofiolitici a minuti elementi di Cordecimo, nei quali si incontrano conchiglie agatizzate, stanno subito alla base dei gessi e forse sono da ritenersi essi pure come sarmatiani.

PINETA DI PALTRATICO.

Nassa semistriata, Br.	*Venus* sp.
» sp.	*Tapes gregaria,* Partsch.
Natica sp.	*Lucina dentata,* Bast.
Cerithium pictum, var.	» sp.
Chenopus pes-pelecani, L.	*Arca diluvii,* Lk.
Turritella turris, Bast.	» *Turonica?* Duj.
Dentalium inaequale, Bron.	*Arca cardiformis?* Bast.
Corbula gibba, Olivi.	*Pecten* sp.
Venus Multilamella, Lk.	*Ostrea* sp.

Si incontrano scarsissimi avanzi di vertebrati (pesci specialmente), ma ciò dipende dall'essere stati raccolti con ogni diligenza per conto del sig. Lawley, e forse saranno stati in parte confusi con quelli di piani più recenti e dai raccoglitori indicati come provenienti da Orciano.

POPOGNA, CAFAGGIO E GORGO.

Nassa semistriata, Lk.	*Venus plicata,* Gm.
N. prismatica, Br.	*Tapes gregaria,* Partsch.
Natica millepunctata, L.	*Lucina miocenica.*
Turritella turris, Desm.	*L. dentata,* Bast.
Dentalium inaequale, Br.	*Arca diluvii,* Lam.
Tellina sp.	*A. turonica,* Duj.
Corbula carinata, Duj.	*A. Breislakii,* Bast.
C. gibba, Olivi.	*Modiola* sp.
Solecurtus coarctatus? Gml.	*Ostrea* sp.
Lutraria oblonga, Chem.	

Verso S. Luce nulla vi ha da poter riferire con certezza al Sarmatiano; ma presso Pastina, i conglomerati ofiolitici alla base dei gessi e parte di quelli del botro della Lespa sarebbero da ritenersi sarmatiani, in seguito alle nuove vedute sopra esposte.

Nella Valle della Sterza di Laiatico, sono disposto a ritenere in questo piano le ligniti di Strido e di Monte Vaso, con le marne a *Melanopsis Bartolinii* Cap., *Melanopsis buccinoidea* var., *Congeria Deshayesi* Cap., *Littorinella obtusa* Sand., *Pisidium priscum* Eichw., *Neritina Grateloupiana* Fer., ed altri fossili [1], e credo vi si debbano comprendere anche le molasse con filliti e i conglomerati con legni silicizzati, che altra volta dimostrai corrispondenti ai conglomerati superiori di Santo al Poggio e che ricoprono le marne a *Melanopsis Bartolinii,* termine inferiore della formazione d'acqua dolce in quella vallata.

Nella Valle di Cecina e in Val d'Era non ho ancora raccolto dati sufficienti per poter esprimere un giudizio sulla esistenza o meno del Sarmatiano; converrà

[1] Presso la fornace di Monte Vaso queste marne si trovano a più di 300 metri sul livello del mare.

studiare attentamente gli strati alla base della formazione gessosa presso la villetta dell'avv. Mori prima di dare un giudizio definitivo.

Or ora parlando degli strati a Congerie farò conoscere in base a quali considerazioni credo di dover insistere a ritenere nel Sarmatiano il deposito lacustre della Valle della Sterza di Laiatico, e frattanto aggiungerò brevi cenni intorno a un gruppo di strati posti fra il Sarmatiano, indiscutibilmente miocenico, e gli strati a Congerie che si vorrebbero considerare come base del pliocene.

Il gruppo del quale intendo parlare, fu da me altra volta indicato e illustrato come parte della serie sarmatiana del Gabbro, ove raggiunge una potenza complessiva di circa 15 metri quando vi si comprendano anche gli strati inferiori con impronte di bivalvi già sopra ricordate. I tripoli o schisti a diatomee ne costituiscono la parte superiore e fino dal 1874 feci conoscere la esatta loro corrispondenza cronologica con i tripoli di Licata, Grotte e altre località in Sicilia, Mondaino nelle Romagne e Oran in Algeria ([1]).

Questi schisti a diatomee, o tripoli schistosi, hanno già fornito argomento di studî e considerazioni importantissime al distintissimo naturalista conte C. Castracane, il quale vi ha riconosciuto ben 29 specie di diatomee, e rendendo conto delle condizioni nelle quali si devono essere costituiti, è arrivato alle stesse conclusioni alle quali mi avevano condotto le osservazioni stratigrafiche e i numerosi fossili animali e vegetali che vi ho riscontrati.

Infatti, dallo studio delle diatomee si ricava che i tripoli schistosi del Gabbro, e per conseguenza quelli di Paltratico, Scaforno e Castelnuovo che ne sono la continuazione, si depositarono non molto lontani dalla riva, in condizione da risentire l'influenza delle acque dolci che vi arrivavano dal continente; ad analoga conclusione conduce il miscuglio di pesci d'acqua dolce e di pesci marini, che spesso si verifica anche in uno stesso esemplare di roccia. Anche la straordinaria quantità di piante terrestri fossili in schisti sui quali si vedono impronte di cardii, di piccole ervilie (?) dà a conoscere che vi erano corsi d'acqua, i quali recavano al mare le numerose foglie che troviamo benissimo conservate fra quegli schisti.

Nel lavoro che sto preparando figureranno la maggior parte dei fossili degli schisti a diatomee del Gabbro, dei quali sono riescito a procurarmi molte centinaia di esemplari e frattanto darò qui la nota delle specie principali che già vi ho riscontrato, preceduta dalla lista delle diatomee che il signor conte Castracane riconobbe nei saggi che gli aveva trasmesso perchè li esaminasse e confrontasse con quelli di Mondaino nelle Romagne e Licata in Sicilia ([2]). In questi schisti ho pure osservato impronte di piume e alcuni insetti; ma, per questi specialmente, vi è ancora molto da scoprire ed io professo la maggior gratitudine al signor Tito Nardi il quale si è dato già ogni premura per procurarmi numerosi e ben conservati esemplari dei fossili dell'importante giacimento di cui è proprietario.

([1]) Capellini, *L'uomo pliocenico in Toscana.* Atti della R. Accad. dei Lincei, Serie II, T. III. Roma, 1876. — Capellini, *Strati a Congeria, formazione oeninghiana e piano del calcare di Leitha nei Monti livornesi.* Rendiconto dell'Accademia delle scienze di Bologna. Sed. 19 nov. 1874.

([2]) In mezzo ai tripoli schistosi si incontrano delle specie di concrezioni, o piccole septarie, le quali si possono identificare con quelle illustrate da *Carruthers*, e da taluni giudicate avanzi vegetali, e perfino uova di testuggini. Di esse dirò specificatamente altrove.

Diatomee dei tripoli schistosi dei Monti livornesi [1].

Epithemia marina, Donkin.
Amfora lyrata, Creg.
Cocconeis Scutellum, Ehrb.
C. Adriatica, Kz.
Coscinodiscus fimbriatus, Ehrbg.
C. lineatus, Ehrbg.
C. punctatus, Ehrbg.
Actinocyclus crassus, Sm.
A. moniliformis, Ralphs.
Campylodiscus, (species).
Surirella salina, Sm.
Nitzschia Entomon, Ralphs.
N. spectabilis, Ehrbg.
Navicula didyma, Ehrbg.
Stauroneis aspera, Kz.
Pleurosigma formosum, Sm.
Synedra robusta, Ralphs.
S. salina, Sm.
Climacosphenia moniligera.
Bacillaria cursoria, Donkin.
Achnarcthes longipes, Kz.
Rhabdonema Adriaticum, Kz.
Grammatophora macilenta, Sm.
G. marina, Kz.
Biddulphia tridentata, Ehrbg.
B. Inomeys, Breb.
Mastogloja apiculata, Sm.
Rhizosolenia setigera, Brigt.
Chetoceros Winghamii, Brigt.

Filliti degli schisti a diatomee del Gabbro.

Pteris oeningensis, Ung.
Libocedrus salicornoides, Ung. sp.
Taxodium dubium, Sternb.
Glyptostrobus europaeus, Brongn. sp.
Sequoia Langsdorfii, Brongn. sp.
Pinus taedaeformis, Ung. sp.
P. Saturni? P. rigios. Ung.
Ephedrites sotzkianus, Ung.
Smilax obtusangula, H.
Populus latior, A. Br. var. rot.
Alnus nostratum, Ung.
Carpinus grandis, Ung.
Quercus etymodrys, var. Mass.
Fagus castanaeefolia, Sism.
Planera Ungeri, Ett.
Ficus lanceolata, H.
Platanus aceroides, Gp.
Laurus sp.
Oreodaphne Heeri, Sism.
Cinnanomum spectabile, H.
C. polymorphum, A. Br. sp.
C. Rossmässleri, H.
C. lanceolatum, Ung.
Dryandra acutiloba, Stbg.
Dryandroides laevigata, H.
Myrsine?
Liriodendron Procaccinii, Ung.
Acer trilobatum, Stbg. sp.
Rhamnus Decheni, Web.
Iuglaus acuminata, A. Br.
Pterocarya denticulata, Web.
Engelhardtia Brongniarti [2].

[1] Castracane conte ab. F., *Analisi microscopica di un deposito di diatomee dei Monti livornesi*. Atti dell'Accademia pontificia dei nuovi Lincei. Anno XXX. Roma, 1877.

[2] Questa lista sarà quasi triplicata quando avrò compiuto lo studio del copioso materiale che già posseggo; più o meno le stesse specie si trovano anche a Paltratico, Scaforno e sotto Castelnuovo. Non bisogna confondere la flora dei tripoli con quella delle marne gessose superiori le quali, anche nei Monti livornesi, sono ricche di filliti, insetti e *Lebias*.

Ittioliti degli schisti a diatomee del Gabbro.

Siphonostoma Castellii, Capellini.
Gobius Lobini, Cap.
Rhombus Nardii, Cap.
R. Sauvagei, Cap.
R. sp. ind.
Trigla sp.
Acanthonemus etruscus, Cap.
Lepidopus anguis, Sauvage.
L. sp. ind.
Hemithyrsites armatus, Sauvg.
Leuciscus Oeningensis, Agassiz.
L. Licatae, Sauvg.
Aspius Columnae, Sauvg.
Anapterus elongatus, Sauvg.
An. Albyi, Sauvg.
Anapterus sphekodes, Sauvg.
An. sp.
Osmerus propterygius, Sauvg.
Clupea Ecnomi, Sauvg.
Cl. zanclea, Sauvg.
Cl. opisthopteryx, Sauvg.
Cl. trinacridis, Sauvg.
Cl. Meneghinii, Cap.
Cl. Sauvagei, Cap.
Cl. Lawleyi, Cap.
Cl. microsoma, Sauvg.
Cl. sp.
Alosa elongata, Agassiz.
A. sp.

Insetti già riscontrati negli schisti a diatomee del Gabbro.

Tipula lineata, Heer.
Formica globularis? H.
F. sp.
Bibio sp.
Gryllacris sp.
Libellula sp.

Fra i tripoli schistosi del Gabbro e quelli di Licata, corre questa differenza: che i secondi resultano di diatomee le quali accennano a deposito in acque profonde, mentre al Gabbro si tratta di deposito operatosi non molto discosto dalla riva; ciò rende conto altresì della abbondanza delle piante terrestri nella nostra località, mentre sono rare nei tripoli di Grotte e Licata. Buon numero delle specie di pesci di Oran e Licata si trovano anche al Gabbro, come resulta dagli esemplari che ho già studiati e catalogati; per conseguenza ciò che è stato detto per la cronologia dei tripoli di Sicilia, si può ripetere per questi della Toscana, trovando appoggio anche nella flora terrestre, la quale, come ebbi ad avvertire altra volta, è ben distinta da quella più recente delle marne *a cypris* della porzione superiore dei gessi di Castellina marittima e in immediata connessione con gli strati a Congerie.

Il prof. Stöhr in un suo recente lavoro sui tripoli di Grotte in Sicilia, ha sostenuto egli pure con buoni argomenti, che i tripoli si abbiano da considerare come sarmatiani e ne ha dimostrato l'intima connessione, per la base, con il Tortoniano superiore o secondo piano mediterraneo dei geologi tedeschi e superiormente con la formazione gessoso-solfifera, che in taluni casi egli pure ritiene riferibile in parte al Sarmatiano, ammettendo che la detta formazione in alcuni punti abbia cominciato prima che in altri [1]. Conseguentemente l'intera serie del Gabbro, schisti a diatomee

[1] Stöhr, *Ueber die Radiolarienfauna aus den sogen. Tripoli-schichten von Grotte in Sicilien.* Naturforscher Versammlung in München, sept. 1877. — Capellini, *Sui terreni terziari di una parte del versante sett. dell' Apennino.* Bologna, 1876.

in alto e marne bituminose con impronte di bivalvi in basso, sarebbero da ritenersi nel Sarmatiano (Messiniano inferiore di Mayer) mentre agli strati a Congerie al più sarebbero da riferire le marne gessose e i gessi posti fra i tripoli e le vere marne a Congerie, e piccoli cardii.

Questa formazione, tanto bene sviluppata a Paltratico e al Gabbro, scompare a poco a poco verso nord-ovest, come avrò occasione di dimostrare in seguito. Sulla sinistra della Valle della Fine non vi ha traccia di tripoli schistosi; ma potrebbe darsi che le marne marine con cristalli di gesso isolati, nella loro porzione più profonda rappresentassero gli ultimi strati superiori del Sarmatiano.

Se taluni avanzi di pesci ed altri vertebrati fossili indicati come provenienti da S. Luce realmente furono ivi raccolti, in considerazione dei rapporti fra essi e taluni dei fossili di Nussdorf ed Hernals e di quelli del dienstiano di Anversa, si potrebbe dar valore a simile supposizione.

STRATI A CONGERIE.

Per completare l'esame cronologico dei terreni terziarî recenti nella provincia di Pisa, mi resta da accennare lo sviluppo degli strati a Congerie e lo farò con la maggiore brevità.

Questa formazione incomincia nel versante occidentale dei Monti livornesi nelle vicinanze stesse della città e ne fanno parte i gessi della Puzzolente, del podere dell'Uliveto e di Limone.

In altra circostanza ho riferito che gli strati marnosi superiori ai gessi contengono *Melanopsis Bonellii* Sism., *Melania Letochae* Fuchs, aff. alla *M. curvicosta* auct, neritine, littorinelle, avanzi di *Chara* (1).

Seguendo la strada che conduce alle fonti, si trovano i gessi di Suese nella tenuta Mimbelli al luogo detto Bocca di gesso, ove questa roccia è attraversata dalla strada provinciale, poscia si incontrano quelli di Cordecimo. Altri affioramenti di questa formazione si hanno al botro della Fonte a Filicaia e a Pietreto; in quest'ultima località i gessi si presentano ben cristallizzati e ricordano gli strati superiori con noccioli alabastrini di Castellina marittima.

Gli strati a Congerie, continuando senza interruzione nel versante orientale dei Monti livornesi, contengono masse gessose distinte presso il ponte del Condotto, di faccia alle cave del calcare delle Parrane e precisamente fra il Condotto e Colle Alto; ma sopratutto meritano di essere esaminati e studiati presso il Crocino lungo le rive della Morra.

La sezione degli strati a Congerie lungo la Morra offre a mio avviso una importanza eccezionale, tanto per il geologo quanto per il paleontologo, e perciò credo di non dover tardare a farla conoscere e qui la riferisco compendiatamente.

Risalendo il corso della Morra, a piccola distanza dall'osteria del Crocino cessano le marne marine plioceniche le quali occupano la maggior parte delle Valli del

(1) Capellini, *Calcare a Amphistegina, Strati a Congerie e Calcare di Leitha nei Monti livornesi.* Rendiconto dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna. 8 aprile 1875.

Salvolano e della Fine, e nella porzione loro inferiore, sebbene scarseggino i fossili, vi si trova in copia un *Pecten,* che ritengo sia var. del *Pecten denudatus* Reuss; esso corrisponde esattamente al *Pecten Comitatus* Fontannes, del Bacino del Rodano.

Le marne marine ricoprono immediatamente marne gessose con fauna salmastra, e il contatto fra le due roccie e i rapporti stratigrafici sono pure interessanti.

La marna marina è in strati inclinati di circa 15°; gli strati della serie marnosa-gessosa sono un poco più raddrizzati 17°-20°, e per conseguenza vi ha una vera *trasgressione,* della quale per brevità non renderò conto in queste prime notizie.

La serie marnosa-gessosa, ossia la formazione degli strati a Congerie, presenta la seguente successione dall'alto in basso.

1.° Marna con Cardii e Congerie o Dreissene, spesso rimaneggiata con la marna marina sovraincombente . . . . metri 3, 00

2.° Gesso grummoloso e fibroso in straterelli commisti con molta marna » 2, 70

3.° Marna fossilifera . . . . » 1, 80

4.° Gesso carnicino, spugnoso e fibroso con concentrazioni alabastrine verso la base, stratificato superiormente e con vene fibrose che attraversano gli strati . . . . » 2, 70

5.° Marna attraversata da filoncini e vene di gesso fibroso ma sempre fossilifera . . . . » 3, 50

6.° Massa principale di gesso alabastrino analogo a quello dei dintorni di Volterra e Monte Catini; l'amigdala tagliata dal fiume misura . . » 3, 50

7.° Gesso grigio con sottili straterelli alabastrini fra i quali vi hanno pure strati fibrosi candidi. Alla base vi sono noccioli decisamente alabastrini e chiara apparisce l'origine dei noccioli di alabastro candido dei gessi della Castellina . . . . » 1, 20

8.° Marna rossastra un poco scagliosa, la quale ricorda le marne dei Poggioli rossi di Bologna, è attraversata da gesso sanguigno ed è ricchissima di fossili, cardii e congerie . . . . » 1, 50

9.° Prima apparizione del gesso rappresentato da lastre irregolari sottili, cinque a dieci millimetri, le quali servono a meglio distinguere la stratificazione della marna alla quale sono associate e che ha una potenza di » 1, 57

10.° Marna biancastra con limonite, sottilmente stratificata . . » 3, 00

Fra i fossili raccolti nelle marne sopra i gessi, intercalate coi gessi e inferiori ai gessi, ho già riscontrato le seguenti specie di molluschi caratteristici coi gusci perfettamente conservati.

Congeria simplex, Barbot
C. aff. alla *C. auricularis,* Fuchs.
Cardium Odessae, Barbot
C. *nova-rossicum,* Barbot
Cardium littorale? Eichw.
C. *bollense?* Mayer.
C. *solitarium?* Krauss.
C. sp.

Questa serie di strati marnosi gessosi riposa *con leggera trasgressione* sopra una marna grossolana ricchissima di pirite, in parte decomposta, in parte intatta e ben cristallizzata.

La marna con pirite ha un metro di grossezza e termina superiormente una serie di strati arenacei analoghi agli strati superiori della serie del Gabbro e di una potenza complessiva di circa metri 10, 00.

Dal Crocino andando verso Colognole, lungo la strada si trova la continuazione dei gessi della Morra e alla loro base vi hanno marne sabbiose grigie e marne giallastre ferruginose piene zeppe di *Pisidium priscum* Eichw, *Melanopsis* e altri fossili.

Al podere detto Pane e Vino, presso il Casino podere Cubbe e a Lodolaia si possono raccogliere i modelli dei piccoli cardii degli strati a Congerie convertiti in limonite come alla Farsica; al Casino podere Cubbe, i fossili si trovano col guscio perfettamente conservato e si possono avere facilmente le seguenti specie.

Melanopsis Bonellii, Sism.
Cardium bollense, Mayer.
C. solitarium, Krauss.
C. nova rossicum, Barbot
C. praetenue, Mayer
Cardium Spratti, Fuchs.
C. sp.
Congeria simplex, Barbot
Littorinella sp.

Non mi fermerò a parlare della continuazione degli strati a Congerie sotto Castelnuovo e presso l'Acquabuona, ove si hanno masse gessose di poca importanza, nè starò a ripetere che il principale sviluppo di questa formazione si ha nelle valli della Pescera e del Marmolaio come ho già fatto conoscere da lungo tempo.

Sulla sinistra della Fine, credo si debba riferire agli strati a Congerie la maggior parte delle marne con cristalli di gesso isolati e con fossili marini; in tali circostanze riesce impossibile la delimitazione fra i rappresentanti degli strati a Congerie ed il vero pliocene.

Nella Valle della Sterza spettano indubitatamente a questa formazione i gessi di Monte Auto e le marne che li accompagnano; sulla riva sinistra non vi hanno gessi, però superiormente ai conglomerati e alle marne con *Melanopsis Bartolinii* vi hanno altre marne che contengono fossili molto interessanti e pei quali parmi vieppiù giustificato il riferimento delle ligniti di Strido al piano Sarmatiano o, per bene intenderci, alla base della formazione gessosa.

Queste marne, infatti, si trovano presso il ponte della Petraia a destra del torrente e sulla sinistra della Sterzuola, sembrano inferiori, almeno in parte, ai gessi di Monte Auto e sono caratterizzate da grandi esemplari di una *Melanopsis impressa* eguale a quella del Bacino di Vienna. Unitamente alla *Melanopsis impressa* ho raccolto altri fossili i quali per lo meno accennano ad un piano di transizione dal Sarmatiano agli strati a Congerie, del resto si sa che la *Melanopsis impressa* sebbene appartenga tanto al Sarmatiano quanto agli strati a Congerie, quando si trova in questo secondo orizzonte cronologico è sempre accompagnata dalla *Melanopsis Martiniana* o da altra specie di quel tipo che fra noi potrebbe essere la *Melanopsis Bonellii.* Per conseguenza, se si può già dubitare se non convenga considerare come Sarmatiano le marne a *Melanopsis impressa,* resta poi accertato che a quel piano debbano appartenere le marne piene zeppe di *Melanopsis Bartolinii* e così pure i conglomerati sovraincombenti, analoghi a quelli di Santo al Poggio.

I fossili di acqua salmastra delle marne superiori della Valle della Sterza, sono i seguenti.

Melanopsis impressa, Krauss.
Melania applanata, Fuchs. (sarmatiana).
Neritina micans, Gaud. e Fisch.
Cardium plicatum, Eichw. (framm. sarmatiano).
Cardium obsoletum, Eichw. (framm. sarmatiana).
C. edentulum? framm.
Frutti di Chara.

Con questi fossili vi ha una notevole quantità di frammenti di una conchiglia bivalve, la quale mentre per la cerniera e per altri caratteri bisognerebbe riferirla al genere *Unio,* d'altra parte presenta sette coste che irraggiano dall'apice e svaniscono verso la metà delle valve, le quali hanno margine liscio e sono internamente madreperlacee. Le coste sono acute e squammose come quelle di taluni cardii del Sarmatiano, e degli strati a Congerie, e si potrebbe ritenere che questa conchiglia formi un passaggio dai *cardii* alle *unionidi* come già vi hanno altri tipi intermedî che stanno fra il genere *Unio* conchiglia d'acqua dolce, e alcuni generi di conchiglie marine. Per ora propongo il nome di *Unio cardioides,* riservandomi a confrontare questa conchiglia con l'*Unio Castaliaeformis* Mgh. e decidere poscia se convenga distinguere due specie, ovvero se i gusci da me scoperti nella Valle della Sterza abbiano che fare con le impronte e i modelli raccolti a Monte Bamboli coi quali fu fondata la specie del prof. Meneghini.

Vi ha una *leggera trasgressione* fra gli strati a Congerie dei quali fanno parte i gessi di Monte Auto e le marne marine di Totalla con importanti avanzi di cetacei e filoncini e druse di baritina ([1]).

Nella Val d'Era gli strati a Congerie sono bene sviluppati sulla riva sinistra, e ne fanno parte i gessi alabastrini di Tori, dei quali l'avv. Mori possiede cave con talune varietà di *alabastro carnicino* assai pregevole.

Sotto Monte Catini, ma più specialmente sulla riva destra della Cecina, cominciando dalle Saline o Moie di s. Leopoldo, la formazione gessosa ossia gli strati a Congerie si trovano lungo la strada Salaiola che fiancheggia la strada ferrata Cecina-Saline. Ad eccezione delle vicinanze di Ponte Ginori ove appaiono i conglomerati inferiori ai gessi, le marne gessose si continuano fino oltre il ponte di Gello.

Continuando per la Valle di Cecina la formazione gessosa riappare soltanto presso il Terriccio, d'onde a poco a poco si sviluppa verso la Farsica, nelle valli della Pescera e del Marmolaio.

Quasi dovunque, sulle marne gessose riposano marne plioceniche antiche con resti di cetacei e pesci, ma relativamente povere di avanzi di molluschi ([2]).

Riassumendo ora quanto ho rapidamente accennato intorno ai *terreni miocenici* e *mio-pliocenici* di una parte della provincia di Pisa e dintorni di Livorno, parmi che si possa con tutta sicurezza concludere:

([1]) La baritina da me scoperta nella Valle della Sterza, fu illustrata dal prof. D'Acchiardi. D'Acchiardi, *Minerali Toscani* (*Ematite, Baritina, Farmaco-siderite, Preenite, Epidoto, Sperchise*). Atti della Società toscana di scienze naturali. Vol. III fasc. 1. Pisa, 1877.

([2]) Mi interessa di ricordare che nella porzione superiore degli strati a Congerie si trovano presso la Farsica concrezioni silicee che rappresentano le selci molari dello stesso piano in altre regioni.

1.° Nei Monti livornesi, in quelli della Castellina e presso Monte Catini di Val di Cecina esiste la formazione del calcare di Leitha, quindi il secondo piano Mediterraneo dei geologi austriaci (ossia l'Elveziano e Tortoniano di Mayer); questo piano è rappresentato da svariate forme litologiche le quali sono anche caratterizzate per i diversi fossili che contengono a seconda delle condizioni locali, sotto l'influenza delle quali si costituirono. Con accurati confronti è facile di ritrovare nella Valle della Fine e specialmente nei Monti livornesi un compendio di quanto vi ha nel Bacino di Vienna, specialmente per ciò che riguarda il calcare di Leitha ed il Sarmatiano.

2.° Il calcare di Leitha passa al Sarmatiano, e forse a questo secondo orizzonte sarà conveniente di riferire parte delle roccie attribuite prima a quella formazione. Il Sarmatiano tipico è rappresentato dalle *marne a cerizii* di Scaforno, e ritengo che vi appartengano, come rappresentante anche meno salmastro, le marne a *Melanopsis Bartolinii* della Valle della Sterza. Le marne a *Melanopsis impressa* e cardii sarmatiani in frammenti, della stessa valle, forse costituiscono un passaggio del Sarmatiano agli strati a Congerie. Gli schisti a diatomee del Gabbro e di Castelnuovo che già da tempo riteneva come sarmatiani, dopo i nuovi studî di Stöhr sui tripoli di Grotte in Sicilia, e per i resti organici che già vi ho riscontrati, sono confermati come tali; in complesso corrispondono al piano superiore del Messiniano inferiore di Mayer, secondo le più recenti pubblicazioni.

3.° Importante, sovra tutti gli altri gruppi, è la formazione gessosa ossia l'insieme degli strati che pigliano nome da uno dei fossili caratteristici e sono indicati col titolo di *Strati a Congerie*.

Questa formazione, per il suo sviluppo, per i fossili numerosi e spesso ben conservati che racchiude, in nessuna regione, finora a me nota in Italia, può essere meglio studiata che nella provincia di Pisa.

Con le prime scoperte del 1860, presso Castellina marittima, accertai l'esistenza degli strati a Congerie in Italia e ne accennai in seguito i rapporti con la corrispondente formazione nel mezzogiorno della Russia.

Con le più recenti scoperte nei Monti livornesi, specialmente al Casino podere Cubbe, e nella Valle della Morra, si possono chiarire anche le analogie fra queste località e gli strati a Congerie della Grecia e quelli di Bollène nella Valle del Rodano.

4.° I fossili degli strati a Congerie si trovano col guscio ben conservato, ovvero allo stato di modelli convertiti in limonite, od anche silicizzati, secondo l'influenza delle circostanze locali.

5.° Alla Morra ho potuto risolvere i dubbî intorno ai rapporti delle masse gessose con le marne a Congerie e piccoli cardii; infatti ivi i fossili si trovano indistintamente sopra e sotto i *gessi superiori* ed anche nelle marne in essi intercalate; si può quindi riconoscere che, mentre i gessi della Morra si depositavano in acqua salmastra, quelli della Castellina si costituivano in bacino lacustre.

Non vorrei troppo azzardare, ma ho motivo di credere che i gessi della Puzzolente presso Livorno si siano depositati, almeno in gran parte, in acqua più decisamente salata, mentre la loro porzione superiore contiene fossili salmastri.

Nel lavoro che sto preparando, oltre un completo cenno su tutti i fossili incontrati nelle diverse località e nei differenti piani, renderò conto delle accidentalità

stratigrafiche, accompagnando il mio scritto con opportune sezioni grafiche e con figure dei fossili vegetali e animali più caratteristici ed interessanti.

NOTA

Mi riservo a dimostrare come le diverse maniere di presentarsi del calcare di Leitha nel Bacino di Vienna, che il dott. T. Fuchs nel recente lavoro sopra ricordato ha controsegnate con diverse lettere dal *b* all'*f* (ossia, la formazione littorale del secondo piano Mediterraneo dei geologi austriaci) trova esatto riscontro in ciò che ho accennato pei Monti livornesi.

Se per l'acquedotto livornese si facesse una illustrazione geologica analoga a quella stupenda fatta dal Karrer per l'acquedotto di Vienna, sarebbero sorprendenti i rapporti che si noterebbero fra la geologia dell'acquedotto di Vienna e quella dell'acquedotto di Livorno, e azzarderò di dire che questa sembrerebbe quasi un compendio di quella.

Sopra alcuni notevoli geminati polisintetici di spinello orientale.

Memoria del Socio corrispondente GIOVANNI STRUEVER

letta nella seduta del 3 marzo 1878.

Nella collezione Spada che costituisce la parte più importante del Museo mineralogico della R. Università di Roma, trovai, qualche anno fa, un gruppo polisintetico di spinello, il quale, a motivo della sua strana simmetria, attirò la mia attenzione. Passando poi in rassegna tutti i cristalli di spinello della nostra raccolta, i quali sommano a più migliaia, rinvenni un numero relativamente cospicuo di geminati polisintetici, diversissimi per la disposizione dei singoli individui regolarmente fra di loro riuniti. È notissima la legge secondo la quale sono raggruppati in gemelli i cristalli di spinello, ed è nota altresì l'esistenza nel nostro minerale, di geminati polisintetici, ma non mi consta che altri abbia fatto uno studio particolareggiato di tali singolari aggruppamenti. Pure essi meritano l'attenzione del cristallografo, il quale vi scuopre non solamente casi di geminazione analoghi a quelli che si riscontrano in altri minerali monometrici, ma ancora parecchi gruppi affatto nuovi, sconosciuti cioè nelle altre sostanze del primo sistema, che hanno una decisa tendenza a formare geminati polisintetici. Troppo lunga sarebbe la enumerazione di tutti quanti i gruppi regolari di spinello esistenti nel nostro Museo, onde mi limito, nelle seguenti pagine, a descriverne alcuni pochi che mi sembrano più meritevoli di essere menzionati. Ma non è questo il solo scopo del mio lavoro. Volli ancora istituire delle misure esatte nell'intento di vedere entro quali limiti gli angoli diedri dei cristalli semplici e geminati di spinello vanno di accordo coi valori richiesti dalla teoria. In questi tempi in cui fanno di nuovo capolino gli attacchi contro le meravigliose leggi la cui scoperta sarà imperituro monumento dell'ingegno di Hauy, tali ricerche non mi sembrano interamente inutili, benchè le numerose osservazioni analoghe, pubblicate dal Kokscharow, dal Dauber e da tanti altri, avrebbero ormai dovuto bastare a convincere anche i più increduli che se le leggi cristallografiche sono approssimative come tutte, si può dire, le nostre leggi fisiche e chimiche, non la cedono però, per grado di approssimazione, a nessuna di quelle che possono essere paragonate ad esse. Ed in questo avviso spero di avere compagni almeno tutti i cristallografi che hanno una lunga pratica.

Si sa che essendo asse di geminazione [111] ovvero qualunque altra delle linee di simmetria trigonale dell'ottaedro, i simboli delle faccie del secondo individuo ottaedrico, riferiti agli assi del primo, diventano quelli dell'icositetraedro (511), ad eccezione delle due faccie normali all'asse di geminazione che rimangono ottaedriche; ed analogamente, le faccie rombododecaedriche del secondo individuo, riferite agli assi del primo, divengono faccie dell'icositetraedro (411), salvo quelle parallele all'asse di geminazione, le quali rimangono rombododecaedriche. Talchè, supponendo che ad un primo individuo si uniscano contemporaneamente quattro altri identici, coi loro assi di geminazione paralleli alle quattro linee di simmetria trigonale, si avrebbe un complesso di faccie che, sotto l'aspetto geometrico, corrisponderebbe alle combinazioni (111) (511), ovvero (110) (411), ovvero (111) (110) (411) (511), secondochè ciascun individuo svela le sole faccie di (111) ovvero di (110) ovvero la combinazione (111) (110). Ci limitiamo a queste due forme semplici poichè i gemelli studiati non ne presentano altre [1].

Fra i cristalli semplici di spinello che erano a mia disposizione, scelsi uno in cui non si osservano traccie di subìto rotolamento; tutte le faccie riflettevano nettamente una sola immagine dei fili del cannocchiale, ad eccezione di una la quale dava due immagini, una assai più distinta dell'altra. Per questa faccia furono indicate le sole osservazioni che si riferiscono all'immagine più distinta; scegliendo l'altra immagine che dista dalla prima di due minuti primi, si avrebbe un cambiamento di soli 10″ nelle medie qui sotto riferite. Tutti i valori indicati dei 24 angoli diedri misurati sono medie di 9 ripetizioni.

[1] Ricordiamo che essendo, nel sistema monometrico, $[m\,n\,p]$ il simbolo dell'asse di geminazione, $h\,k\,l$ il simbolo di una faccia del secondo individuo in posizione parallela al primo, si ottiene il simbolo $h'\,k'\,l'$ di questa medesima faccia, riferito agli assi del primo individuo, dopo aver fatto girare il secondo per 180° attorno ad $[m\,n\,p]$, mediante la formula

$$h' : k' : l' :: 2m\,(mh+nk+pl) - h\,(m^2+n^2+p^2) : 2n\,(mh+nk+pl) - k\,(m^2+n^2+p^2) : 2p\,(mh+nk+pl) - l\,(m^2+n^2+p^2).$$

(Vedi per es. Q. Sella, *Boro adamantino*).

Egli è, del resto, evidente che essendo asse di geminazione [111] si può, per riferire una faccia del secondo individuo agli assi del primo, adoperare direttamente la formula che, nel sistema romboedrico, serve a determinare il simbolo di una forma inversa dal simbolo della sua diretta, ossia la formula $h' : k' : l' :: 2\,(h+k+l) - 3h : 2\,(h+k+l) - 3k : 2\,(h+k+l) - 3l$ ove h, k, l, h', k', l' hanno lo stesso significato di prima.

Dalla medesima formula (o dalla analogia dei due sistemi monometrico e romboedrico in generale) segue ancora che: 1° per ogni icositetraedro $(h\,l\,l)$ si ha un triacisottaedro $(2h+l,\ 2h+l,\ 4l-h)$ in cui gli angoli diedri, concorrenti nelle estremità degli assi di simmetria trigonale, sono identici a quelli corrispondenti del suo icositetraedro, e *viceversa*; 2° che ogni due esacisottaedri $(h\,k\,l)$ e $\{2\,(h+k+l) - 3h,\ 2\,(h+k+l) - 3k,\ 2\,(h+k+l) - 3l\}$ hanno i loro angoli diedri, concorrenti nelle estremità degli assi di simmetria trigonale, identici benchè diversamente orientati. Nella prima legge entrano il cubo, l'ottaedro e il rombododecaedro, considerandoli, il cubo come forma limite degli icositetraedri, gli altri due come forme limiti dei triacisottaedri, nella seconda legge entrano i tetracisesaedri. Ove sia $h + k + l = 3k$, le due forme coincidono.

$111:1\bar{1}1$	$= 70^\circ\ 31'\ 15''$	$1\bar{1}1:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 109^\circ\ 28'\ 5''$
$\bar{1}\bar{1}1:\bar{1}1\bar{1}$	$= 70^\circ\ 32'\ 35''$	$\bar{1}1\bar{1}:111$	$= 109^\circ\ 28'\ 15''$
$1\bar{1}\bar{1}:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 70^\circ\ 31'\ 20''$	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}:\bar{1}11$	$= 109^\circ\ 26'\ 55''$
$\bar{1}11:111$	$= 70^\circ\ 31'\ 25''$	$111:1\bar{1}\bar{1}$	$= 109^\circ\ 29'\ 45''$
$111:11\bar{1}$	$= 70^\circ\ 30'\ 30''$	$11\bar{1}:\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	$= 109^\circ\ 30'\ 45''$
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}:\bar{1}\bar{1}1$	$= 70^\circ\ 32'\ 0''$	$\bar{1}\bar{1}1:111$	$= 109^\circ\ 26'\ 10''$
$1\bar{1}1:1\bar{1}\bar{1}$	$= 70^\circ\ 32'\ 50''$	$1\bar{1}\bar{1}:\bar{1}1\bar{1}$	$= 109^\circ\ 27'\ 30''$
$11\bar{1}:\bar{1}11$	$= 70^\circ\ 32'\ 0''$	$\bar{1}11:1\bar{1}1$	$= 109^\circ\ 27'\ 45''$
$11\bar{1}:\bar{1}1\bar{1}$	$= 70^\circ\ 29'\ 5''$	$\bar{1}1\bar{1}:\bar{1}\bar{1}1$	$= 109^\circ\ 24'\ 15''$
$\bar{1}\bar{1}1:1\bar{1}1$	$= 70^\circ\ 33'\ 40''$	$1\bar{1}1:11\bar{1}$	$= 109^\circ\ 32'\ 50''$
$1\bar{1}\bar{1}:11\bar{1}$	$= 70^\circ\ 30'\ 45''$	$11\bar{1}:\bar{1}11$	$= 109^\circ\ 28'\ 55''$
$\bar{1}11:\bar{1}\bar{1}1$	$= 70^\circ\ 31'\ 50''$	$\bar{1}\bar{1}1:1\bar{1}\bar{1}$	$= 109^\circ\ 28'\ 5''$
media	$= 70^\circ\ 31'\ 36''$	media	$= 109^\circ\ 28'\ 16''$
calc.	$= 70^\circ\ 31'\ 44''$	calc.	$= 109^\circ\ 28'\ 16''$

Le somme degli angoli delle sei zone sono rispettivamente:

$[10\bar{1}] = 360^\circ\ 0'\ 10''$ $[01\bar{1}] = 359^\circ\ 59'\ 25''$ $[\bar{1}10] = 359^\circ\ 59'\ 25''$

$[110] = 360^\circ\ 0'\ 5''$ $[011] = 359^\circ\ 59'\ 50''$ $[101] = 359^\circ\ 59'\ 35''$.

Nessuna delle sei zone è assolutamente perfetta, come si verifica al goniometro e come lo dimostrano i valori ottenuti per i singoli angoli, ma le deviazioni degli angoli che ne derivano, si compensano quasi interamente per ciascuna zona. Non insisto certamente sulle ultime cifre dei secondi, ma le medie suindicate dimostrano ad evidenza che, entro i limiti della osservazione, il cristallo in discorso è in pieno accordo colla teoria del sistema monometrico.

Qualunque anomalia ottica od altra si venga a scuoprire nello spinello, avremo sempre, geometricamente parlando, da considerarlo come monometrico.

Dopo i risultati ottenuti sul primo cristallo semplice misurato, mi parve inutile di continuare siffatte osservazioni.

Passando ora ai geminati dovrei incominciare da quelli composti di due soli individui, ma essendo tali gruppi notissimi, mi limito a dire che essi sono perfettamente identici a quelli che si conoscono nella magnetite ecc., e ne presentano tutte le varietà, non esclusi i casi in cui il geminato rassomiglia alla combinazione di una piramide trigonale colla base del sistema romboedrico. Al n. 10 della tavola fu raffigurato un geminato di questa serie che merita forse qualche attenzione per il disuguale sviluppo delle faccie di (111) e (110) di cui presenta la combinazione. Il gruppo è analogo a quello segnalato dal Hessenberg nella hauynite, e non richiede ulteriore spiegazione.

I geminati polisintetici la cui descrizione è scopo principale di questo lavoro, possono dividersi in tre gruppi, secondochè: 1° hanno l'asse di geminazione comune, ovvero, 2° presentano assi di geminazione non paralleli fra di loro ma paralleli ad un medesimo piano, ovvero, 3° hanno gli assi di geminazione nè tutti paralleli fra di loro nè tutti paralleli ad un medesimo piano.

1. I gemelli spettanti al primo gruppo, essendo di già stati indicati da altri, non richiedono di essere maggiormente illustrati. Noto soltanto che molti cristalli

apparentemente semplici e molti degli individui che fanno parte di gruppi più complicati contengono incluse sottili lamelle in posizione di geminati secondo la legge accennata. In alcuni dei disegni che accompagnano questo scritto, tale fenomeno è indicato con linee punto-tratteggiate, come ai n. 6 e 9; nelle figure 3 e 7 (a sinistra) vedonsi gruppi di tre individui uniti nel modo esposto, nella fig. 8, a sinistra e superiormente, un gruppo di quattro individui ad asse di geminazione comune.

2. Assai maggiore interesse presentano i geminati polisintetici della seconda serie, composti di individui, i quali hanno gli assi di geminazione compresi in un medesimo piano. Taluni di questi aggruppamenti furono raffigurati ai n. 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 16.

Il caso più semplice, e già noto nello spinello, è dato dalla riunione di tre soli individui che hanno un piano rombododecaedrico comune e i loro assi di geminazione paralleli a questo. Ma basta gettare uno sguardo sulle figure 1, 11, 12, 16 e 6 (astrazione fatta dalle sottili lamelle interposte) per farsi un' idea della grande variabilità di aspetto che questi gruppi, essenzialmente identici, presentano all'osservatore. Nella maggior parte dei casi che ho potuto studiare, i tre individui sono riuniti come fu disegnato ai n. 1 e 6 (sempre astrazione fatta dalla interposizione di sottili lamelle). Il gruppo della fig. 1 rappresenta un primo individuo (I), disegnato nella posizione che abitualmente si dà all'ottaedro semplice, cui va unito un secondo (II) con asse $[1\bar{1}\bar{1}]$, ed a questo se ne aggiunge un terzo (III) con asse di geminazione normale ad $1\bar{1}5$, riferito al primo individuo. Tutti e tre sono alquanto irregolarmente sviluppati e hanno comuni le faccie 110 e $\bar{1}\bar{1}0$ del rombododecaedro, alle quali sono paralleli i due assi di geminazione. Il terzo individuo è schiacciato nel senso $[1\bar{1}5]$, ma allargato a destra in modo che le sue tre faccie, le quali, riferite agli assi del primo individuo, avrebbero per simboli $\bar{1}\bar{1}.11.\bar{1}$, $5.13.7$ e $\bar{1}\bar{3}.\bar{5}.7$, incontrano la faccia $\bar{1}1\bar{1}$ del primo individuo in spigoli rientranti indicati da linee tratteggiate. Tutto il complesso, quale fu disegnato, presenta, rispetto agli assi del primo individuo, le faccie dell'ottaedro (salvo $11\bar{1}$ e $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ che nel disegno non compaiono), le faccie 511, $1\bar{1}5$, $\bar{1}51$ e $\bar{1}1\bar{5}$ dell'icositetraedro (511), due faccie, $11.\bar{1}\bar{1}.1$ e la sua parallela, del triacisottaedro (11.11.1), e quattro faccie, $13.5.\bar{7}$, $5.13.7$ e le loro parallele, dell'esacisottaedro (13.7.5). L'angolo $\bar{1}11:\bar{1}\bar{1}.11.\bar{1}$ fu trovato di 38° 52′, mentre il calcolo dà per esso 38° 56′ 33″ (¹).

Forse più frequentemente ancora dei gruppi di cui raffigurai uno al n. 1, s'incontrano quelli in cui i tre individui sono disposti come fu disegnato al n. 6 (astrazione fatta dalle sottili lamelle). Al primo individuo maggiormente sviluppato va unito un secondo più piccolo con asse $[\bar{1}\bar{1}1]$ ed a questo un terzo con asse $[1\bar{5}\bar{1}]$. I tre individui hanno comuni le faccie 101 e $\bar{1}0\bar{1}$ del rombododecaedro. Le faccie b_1 e (b_1) (²)

(¹) I geminati del sistema monometrico dimostrano, nel modo forse più semplice e più rappresentativo, il fatto che, immaginato tutto il complesso del numero infinitamente grande di faccie possibili nel 1° sistema, si può trovare un numero illimitato di volte un complesso di 6, 8, 12, 24, o 48 faccie, le quali formano fra di loro gli angoli del cubo, dell'ottaedro, del rombododecaedro, e di qualsiasi icositetraedro, triacisottaedro, tetracisesaedro o esacisottaedro.

(²) Le lettere racchiuse in parentesi indicano le faccie simmetriche, rispetto al piano rombododecaedrico comune, a quelle distinte colle stesse lettere non racchiuse in parentesi.

dell'individuo III incontrano le faccie 111 risp[te] $\bar{1}11$ di I sotto angoli di 22°11′30″, l'angolo b_2 $(1\bar{5}\bar{1})$: $11\bar{1}$ è di 70°31′44″, mentre gli altri due angoli rientranti delle faccie comprese nella zona [101] sono di 38°56′33″, come anche gli angoli $1\bar{1}1:a_1$, $a_1:b_1$, $(a_1):(b_1)$ e $(a_1):\bar{1}\bar{1}\bar{1}$.

Una disposizione dei tre individui, che a prima vista sembra identica alla precedente, ma pure ne è diversa, è raffigurata al n. 16. Col primo individuo maggiormente sviluppato (I) sono uniti due altri più piccoli, uno (II) con asse $[\bar{1}\bar{1}1]$, l'altro (III) con asse $[\bar{1}11]$. Le faccie rombododecaedriche comuni sono ancora 101 e $\bar{1}0\bar{1}$, ma gli angoli diedri sono diversamente disposti. Di fatti, abbiamo, per gli angoli rientranti, $11\bar{1}:\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}1}}$ e $1\bar{1}\bar{1}:\underline{\bar{1}11} = 38°56'33''$. $1\underline{1\bar{1}}:\underline{\underline{1\bar{1}\bar{1}}} = 70°31'44''$, per gli angoli sporgenti, $1\bar{1}1:\underline{\bar{1}1\bar{1}}$, $111:\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}}$ e i due corrispondenti nella parte posteriore $= 38°56'33''$, $\underline{\bar{1}1\bar{1}}:\underline{\underline{\bar{1}\bar{1}\bar{1}}}$ e l'angolo simmetrico rispetto a 101 = 22°11′30″.

Di aspetto tutto affatto diverso è il gruppo disegnato al n. 11. Anche qui i due assi di geminazione $[1\bar{1}1]$ e $[11\bar{1}]$ sono paralleli al medesimo piano rombododecaedrico 011, ma il complesso presenta la forma generale di un tetraedro a spigoli in parte rientranti, per essere l'individuo principale sviluppato tetraedricamente $\varkappa(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ (111) e gli altri due fortemente raccorciati nel senso del rispettivo asse di geminazione.

Il gruppo più singolare, fra quelli composti di soli tre individui, si vede raffigurato al n. 12. L'individuo I, maggiormente sviluppato, presenta nella sua parte superiore forma tetraedrica, nella parte inferiore è molto schiacciato nel senso normale alla faccia più estesa $1\bar{1}\bar{1}$. Nell'angolo rientrante tra la faccia $\bar{1}1\bar{1}$ della sua parte superiore e la faccia $\bar{1}11$ della sua parte inferiore, sono collocati due individui a sviluppo tetraedrico di cui uno (II) con asse di geminazione normale a $\bar{1}1\bar{1}$, l'altro (III) con asse $[\bar{1}11]$. Il gruppo è simmetrico rispetto ad un piano parallelo a 110 (o $\bar{1}\bar{1}0$) comune ai tre individui. I valori degli angoli che seguono, dimostrano chiaramente questa singolare disposizione. Fu trovato (¹)

$111:\bar{1}\bar{1}1 =$ 109°20′25″ calc. 109°28′16″,	$111:(o_3) =$ 141° 5′	calc. 141° 3′27″
$o_2:(o_2) =$ 109°20′40″	$111:o_2 =$ 38°54′25″	calc. 38°56′33″
$o_3:(o_3) =$ 109°19′25″	$11\bar{1}:o_3 =$ 38°48′55″	
$11\bar{1}:\bar{1}\bar{1}\bar{1} =$ 109°35′30″	$\bar{1}\bar{1}1:(o_2) =$ 39° 2′45″	
$111:1\bar{1}\bar{1} =$ 109°30′	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}:(o_3) =$ 38°58′20″	
$11\bar{1}:1\bar{1}\bar{1} =$ 70°49′50″(ap.) calc. 70°31′44″	$o_2:o_3 =$ 22°12′ 5″	calc. 22°11′30″
$111:11\bar{1} =$ 70°31′10″	$(o_2):(o_3) =$ 22°13′35″	
$\bar{1}\bar{1}1:\bar{1}\bar{1}\bar{1} =$ 70°32′15″		

Piuttosto frequenti sono ancora i gruppi composti di quattro individui ad assi di geminazione tutti paralleli ad un medesimo piano rombododecaedrico. La disposizione più regolare di tali gemelli polisintetici è rappresentata dalla figura 5, la quale ricorda un gemello analogo descritto dal Sella nel *Boro adamantino.*

Il gruppo in discorso consta di quattro individui ottaedrici, al primo (I) dei quali sono uniti due altri (II e IV) con asse normale ad $1\bar{1}\bar{1}$ risp[te] $\bar{1}1\bar{1}$; a II se ne aggiunge un ultimo (III) con asse $[\bar{1}1\bar{5}]$ riferito ad I. I due individui estremi sono assai raccorciati nel senso del loro rispettivo asse di geminazione. Tutti e quattro

(¹) I valori degli angoli trovati sui gemelli sono sempre le medie di tre ripetizioni ben concordanti.

hanno comuni le faccie 110 e $\bar{1}\bar{1}0$ del rombododecaedro alle quali sono paralleli i tre assi di geminazione. Furono misurati i seguenti angoli:

$d_3(\bar{1}1\bar{1})$	: $d_2(\bar{1}15)$	= 109°24′55″	$d_2(\bar{1}15)$	: $a_3(\bar{1}11)$	= 38°52′35″
$a_3(\bar{1}11)$	: $a_2(1\bar{1}1)$	= 109°33′ 5″	$a_2(1\bar{1}1)$	: $b_3(1\bar{1}5)$	= 38°49′45″
$b_3(1\bar{1}5)$	: $b_2(1\bar{1}\bar{1})$	= 109°22′50″	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$	: $c_3(11.\bar{11}.1)$	= 38°57′20″
$c_3(11.\bar{11}.1)$	: $c_2(\bar{1}1\bar{5})$	= 109°25′40″	$b_1(511)$	: $c_1(13.5.\bar{7})$	= 38°56′55″
$c_2(\bar{1}1\bar{5})$	: $(c_4)(\bar{13}.\bar{5}.7)$	= 109°23′	$(c_1)(\bar{5}.\bar{13}.\bar{7})$	: $(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$	= 38°54′20″
$b_3(1\bar{1}5)$	: $b_4(15\bar{1})$	= 109°32′40″	$a_1(111)$	: $b_1(511)$	= 38°57′15″
$a_3(\bar{1}11)$	: $a_4(11\bar{1})$	= 109°29′40″	$(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$	: $(a_1)(\bar{1}\bar{1}1)$	= 38°51′55″
$b_4(15\bar{1})$	: $b_2(1\bar{1}\bar{1})$	= 109°28′15″	$a_4(11\bar{1})$	: $b_4(15\bar{1})$	= 38°58′ 5″
$c_5(\bar{11}.11.\bar{1})$	: $d_3(\bar{1}1\bar{1})$	= 31°34′40″	$(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$	: $b_3(1\bar{1}5)$	= 70°22′55″
$c_2(\bar{1}1\bar{5})$	: $c_5(\bar{11}.11.\bar{1})$	= 70°29′10″	$b_4(15\bar{1})$	: $c_2(\bar{1}1\bar{5})$	= 70°35′20″
$c_1(13.5.\bar{7})$	: $c_2(\bar{1}1\bar{5})$	= 70°26′30″	$a_3(\bar{1}11)$	: $a_1(111)$	= 70°33′35″
$(c_4)(\bar{13}.\bar{5}.7)$	: $b_3(1\bar{1}5)$	= 70°40′ 5″	$b_1(511)$	: $b_2(1\bar{1}\bar{1})$	= 70°28′25″
$b_3(1\bar{1}5)$	: $b_1(511)$	= 70°34′40″	$b_2(1\bar{1}\bar{1})$	: $(b_1)(\bar{1}\bar{5}1)$	= 70°34′45″
$c_2(\bar{1}1\bar{5})$	: $(c_1)(\bar{5}.\bar{13}.\bar{7})$	= 70°34′50″	$(a_1)(\bar{1}\bar{1}1)$	: $a_3(\bar{1}11)$	= 70°33′50″

Le medie degli angoli omologhi sono

	109°27′31″ (8)	38°54′46″ (8)	70°32′11″ (11)	31°34′40″ (1)
calc.	109°28′16″	38 56′33″	70°31′44″	31°35′11″
diff.	—45″	—1′4,″	+27″	—31″

Ai numeri 3 e 7 della tavola furono disegnati due gruppi che si compongono di quattro individui, di cui tre ad asse di geminazione comune. Nel geminato polisintetico della fig. 7 i tre primi individui (I, II, III) hanno l'asse di geminazione comune [$\bar{1}\bar{1}1$], talchè III e I sono in posizione parallela, mentre IV è unito ad I e III con asse normale ad $1\bar{1}1$. Tutti gli assi sono paralleli ai piani rombododecaedrici 011 e $0\bar{1}\bar{1}$, comuni ai quattro individui.

Essenzialmente identico col gruppo precedente, ma diverso per sviluppo, è il gemello polisintetico raffigurato al n. 3. Dei quattro individui che lo compongono, tre (I, II, III) sono ad asse di geminazione comune [$1\bar{1}5$], talchè I e III sono in posizione parallela, il quarto individuo (IV) disegnato nella posizione normale dell'ottaedro, è unito a III e ad I con asse [$1\bar{1}\bar{1}$]. Tutti gli assi di geminazione sono paralleli ai piani 110 e $\bar{1}\bar{1}0$ comuni ai quattro individui. I e II sono di sviluppo ottaedrico piuttosto regolare, con qualche faccia di rombododecaedro, II, a sinistra, raccorciato nel senso dell'asse di geminazione [$1\bar{1}5$], III è tetraedricamente sviluppato, e IV ottaedrico nella parte superiore, tetraedrico nella parte inferiore. L'individuo II incontra la faccia $11\bar{1}$ di IV in spigoli rientranti indicati da linee tratteggiate. È evidente che il gruppo fig. 3 può considerarsi anche come un gruppo fig. 1, cui sia aggiunto un individuo semplice con asse [$\bar{1}1\bar{5}$]. Seguono gli angoli misurati sovra l'aggruppamento.

$1\bar{1}1$	: $1\bar{1}5$ =	38°53′25″	calc. 38°56′33″	111	: 5.13.7 =	22 10′ 5″	calc. 22°11′30″
5.13.7	: $15\bar{1}$ =	38°51′ 5″		$\bar{1}\bar{1}1$	: $\bar{13}.\bar{5}.7$ =	22°12′45″	
$1\bar{1}\bar{1}$	: $\bar{1}1\bar{5}$ =	70°23′50″	calc. 70°31′44″	$\bar{1}1\bar{5}$	: $\bar{1}11$ =	109°29′55″	calc. 109°28′16″
$15\bar{1}$	: $\bar{1}1\bar{5}$ =	70°27′45″		511	: $\bar{1}\bar{5}1$ =	109,31′20″	
$\bar{1}11$	: $1\bar{1}1$ =	109°29′25″		111	: $\bar{1}\bar{1}1$ =	109°36′	
$1\bar{1}5$	: $1\bar{1}\bar{1}$ =	109°32′ 5″		$\bar{1}1\bar{5}$	: $\bar{1}\bar{5}1$ =	109°27′50″.	

Ai due gruppi or ora descritti fa seguito quello disegnato al n. 8. Esso è formato da quattro individui ad asse di geminazione comune [11$\bar{1}$], talchè I e III rispte II e IV si trovano in posizione parallela, e da un quinto individuo, il quale si unisce con asse [111] al primo e terzo. Il geminato semplice, costituito da I e V, è assai più sviluppato degli altri individui, i quali sono da esso parzialmente avviluppati. Vi si osserva qualche faccia rombododecaedrica, fra le altre 1$\bar{1}$0, alla quale sono paralleli gli assi di geminazione del gruppo.

L'aggruppamento raffigurato al n. 2 della tavola si compone di sei individui a sviluppo tetraedrico i cui assi di geminazione sono compresi nel piano 110 comune a tutti gli individui. Rispetto a questo medesimo piano vi ha simmetria laterale perfetta. I quattro individui I, II, III, IV sono uniti l'uno all'altro come i quattro individui del gruppo fig. 5, V e VI sono in posizione parallela a II rispte III. Da ciò segue che nonostante l'analogia che l'aggruppamento presenta con quelli di diamante e di oro nativo, descritti dal Waltershausen e dal Rose, ne differisce essenzialmente. Gli angoli o_1o_2, o_2o_3, o_3o_4, o_5o_6, e quelli simmetricamente posti dalla parte posteriore, sono uguali al doppio angolo del tetraedro, mentre gli angoli o_1o_6, o_4o_5 e quelli analogamente posti al di là del piano di simmetria 110, corrispondono all'angolo o_2o_3 del gruppo rappresentato al n. 12. Alle estremità dello spigolo [110] comune a tutti gli individui si formano così due piramidi rientranti a sei lati rispettivamente paralleli alle faccie maggiormente estese della parte opposta del gruppo, il quale si può considerare anche come la riunione di due gruppi fig. 12 (II, I, VI) e (III, IV, V) collocati l'uno sovra l'altro colla faccia $1\bar{1}\bar{1}$. Questa disposizione risulta evidente dalle misure che seguono qui sotto.

$o_1 o_2$	= 38°57'50"	$o_1 (o_1)$	= 109°22'50"
$o_2 o_3$	= 38°57'15"	$o_2 (o_2)$	= 109°28'15"
$o_3 o_4$	= 38°59'55"	$o_3 (o_3)$	= 109°22'40"
$o_5 o_6$	= 38°51'30"	$o_4 (o_4)$	= 109°21'45"
$(o_1)(o_2)$	= 38°54'55"	$o_5 (o_5)$	= 109°26'40"
$(o_2)(o_3)$	= 38°47'45"	$o_6 (o_6)$	= 109°19'15"
$(o_3)(o_4)$	= 38°49'45"	$o_1 o'_1$	= 70°37'30"
$(o_5)(o_6)$	= 39° 9'45"	$o_3 o_6$	= 70°35'30"
$o_4 o_5$	= 22°12'55"	$(o_3)(o_6)$	= 70°42'35"
$o_6 o_1$	= 22°14'20"	$o_2 o_5$	= 70°39'25"
$(o_4)(o_5)$	= 22°11'45"	$(o_2)(o_5)$	= 70°24'55"
$(o_6)(o_1)$	= 22°11'15"		

Le medie dei quattro angoli diversi sono

	38°56' 5" (8)	22°12'34" (4)	109°23'34" (6)	70°35'59" (5)
calc.	38°56'33"	22°11'30"	109 28'16"	70°31'44"
diff.	— 28"	+ 1' 4"	— 4'42"	+ 4'15".

3. Passiamo ora ai gemelli polisintetici in cui gli assi di geminazione non sono più compresi in un medesimo piano.

Meritano anzitutto menzione i gruppi che a prima vista sembrano identici a quelli sopradescritti, composti di tre soli individui, ma ne differiscono per l'accennata interposizione di sottili lamelle. Al n. 6 fu raffigurato uno di questi gruppi già

incidentalmente menzionato. Nell' individuo I, col quale vanno uniti due altri (II e III) nel modo sopra esposto, sono intercalate due lamelle sottili; l'una si osserva sulle faccie $1\bar{1}1$, $\bar{1}\bar{1}1$, $\bar{1}11$ e ha per asse di geminazione lo spigolo $[111]$, l'altra si scorge sulle faccie 111 e $\bar{1}11$, e ha per asse di geminazione la normale a $\bar{1}\bar{1}1$ talchè si può considerare come la continuazione dell' individuo II. Il quadro che segue, riassume le osservazioni goniometriche istituite su questo gruppo.

$1\bar{1}\bar{1} : \bar{1}\bar{1}1$	=	109°24'30"	$\bar{1}\bar{1}1 : \bar{1}11$	=	70°40'30"
$111 : \bar{1}\bar{1}1$	=	109°29'15"	$\bar{1}11 : \bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	70°31'10"
$1\bar{1}\bar{1} : \bar{1}1\bar{1}$	=	109°35'25"	$\bar{1}1\bar{1} : \bar{1}11$	=	70°30'50"
$\bar{1}11 : 1\bar{1}1$	=	109°24'20"	$1\bar{1}1 : 1\bar{1}\bar{1}$	=	70°30'25"
$\bar{1}1\bar{1} : 111$	=	109°31'45"	$\bar{1}\bar{1}\bar{1} : \bar{1}1\bar{1}$	=	70°29'15"
$1\bar{1}1 : \bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	109°27'30"	$111 : 1\bar{1}1$	=	70°31'25"
$111 : 1\bar{1}\bar{1}$	=	109°20'55"	$1\bar{1}\bar{1} : \bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	70°32'30"
$\bar{1}\bar{1}\bar{1} : \bar{1}11$	=	109°32'45"	$\bar{1}11 : 111$	=	70°35'40"
$\bar{1}1\bar{1} : \bar{1}\bar{1}1$	=	109°29'25"	$\bar{1}\bar{1}1 : 1\bar{1}1$	=	70°32'
$a_1 : (a_1)$	=	109°34'30"	$a_1 : a_2$	=	70°33'20"
$b_1 : (b_1)$	=	109°25'40"	$(a_1) : a_2$	=	70°34'35"
$a_1 : b_2$	=	109°30'45"	$a_2 : 1\bar{1}\bar{1}$	=	38°44'50"
$(a_1) : 111$	=	141° 2'15"	$a_1 : b_1$	=	38°57'15"
$a_1 : \bar{1}1\bar{1}$	=	141° 4'10"	$(a_1) : \bar{1}\bar{1}\bar{1}$	=	38°59'
$b_1 : 111$	=	22°10'15"	$(a_1) : (b_1)$	=	38°59'35"
$(b_1) : \bar{1}1\bar{1}$	=	22° 5'20"	$a_1 : 1\bar{1}1$	=	38°55'20"

Le medie degli angoli sono:

	109°28'54" (12)	141°3'12" (2)	22° 7'48" (2)	70°32'53" (11)	38°55'12" (5)
calc.	109°28'16"	141°3'27"	22°11'30"	70°31'44"	38°56'33"
diff.	+ 38"	— 15"	— 3'42"	+ 1' 9"	— 1'21"

Uno dei gruppi polisintetici più singolari che io abbia incontrato nello spinello, è raffigurato al n. 4 della tavola. Lo si potrebbe considerare come un ottaedro (II) che portasse su tre faccie non parallele fra di loro degli individui uniti ad esso con assi di geminazione normali alle stesse tre faccie, ma la disposizione reale dei quattro individui è assai diversa da quella semplicissima che in tal guisa risulterebbe. Il gruppo quale si presenta in natura e quale fu disegnato, consta di un ottaedro (I) alquanto irregolarmente sviluppato per la grande estensione che assume una delle sue faccie ($\bar{1}1\bar{1}$), e di tre individui a sviluppo tetraedrico, i quali sono, per così dire, incastrati nel primo in modo che uno di essi, quello di posizione intermedia (II), è unito ad I con asse $[\bar{1}\bar{1}1]$, e gli altri due (III e IV) si collocano sovra le due faccie $1\bar{1}\bar{1}$ e 111 dell' individuo II. Le faccie (III) e (IV) s' incontrano in spigolo rientrante (tratteggiato) nella parte posteriore del gruppo, e formano angoli sporgenti colla faccia $\bar{1}1\bar{1}$ del primo individuo.

Questa disposizione è dimostrata dagli angoli che seguono:

(III) : (IV) = 31°31'10"	calc. 31°35'11"	II : IV = 38°52'10"	calc. 38°56'33"
(III) : $\bar{1}1\bar{1}$ = 22° 7'10"	calc. 22°11'30"	II : III = 38°56'35"	
(IV) : $\bar{1}1\bar{1}$ = 22°11'25"		III : (III) = 109°29'15"	calc. 109°28'16"
III : 111 = 22°16'50"		IV : (IV) = 109°22'35"	
IV : $1\bar{1}\bar{1}$ = 22°17'35"			

La fig. 14 rappresenta un altro gruppo costituito dalla riunione di quattro individui; I, III e IV sono nella medesima posizione di I, II e III della fig. 6, II è unito ad I con asse $[1\bar{1}1]$, talchè I, III e IV hanno i loro assi di geminazione paralleli ad 101, faccia rombododecaedrica comune ad essi, e II, I, III paralleli a 011, faccia comune ad essi.

Più complicato ancora è l'aggruppamento raffigurato al n. 17 della tavola. Ad un gruppo I, II, III, identico a quello disegnato al n. 16, va unito un geminato di due individui, uno dei quali (IV) è in posizione parallela a II, in guisa che I, II, III, IV hanno i loro assi di geminazione paralleli ad 101, I, IV, V paralleli ad $1\bar{1}0$.

La fig. 9 è l'immagine di un gemello polisintetico a parziale penetrazione. Ad I si unisce II con asse $[\bar{1}\bar{1}1]$ e III con asse $[1\bar{1}1]$; II continua sotto forma di sottile lamella attraverso I, come lo indicano le linee punto-tratteggiate sulle faccie $1\bar{1}1$ e 111; un quarto individuo attraversa I sotto forma di sottile lamella ad asse $[\bar{1}11]$ ed è indicato da linee punto-tratteggiate sulle faccie posteriori $\bar{1}\bar{1}1$ e $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$.

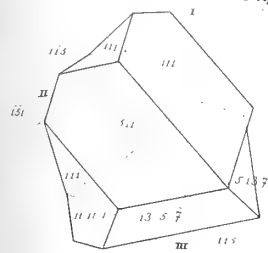
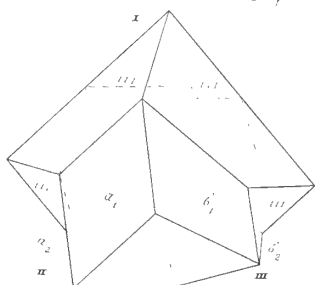
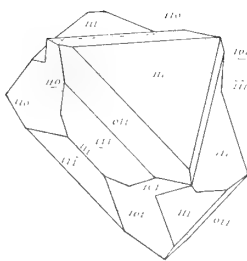
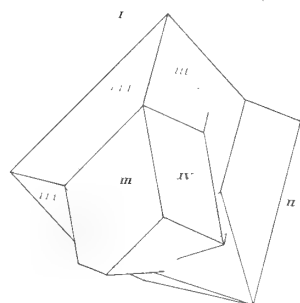
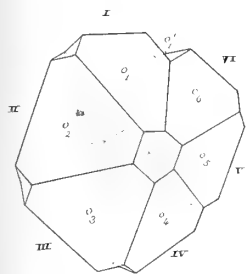
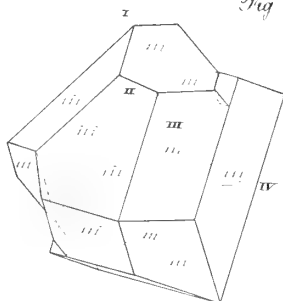
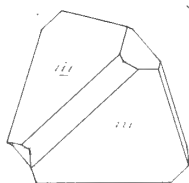
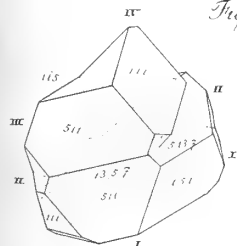
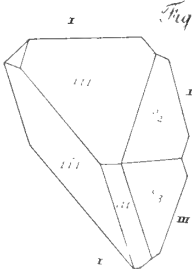
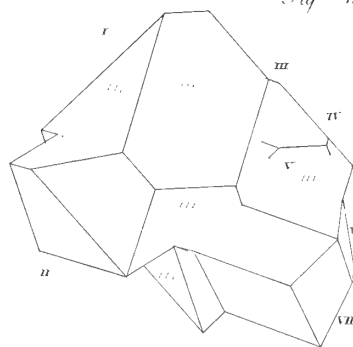
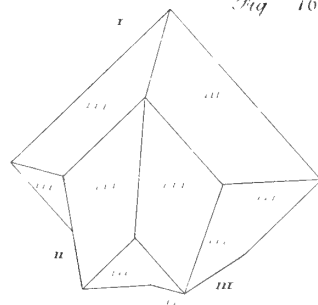
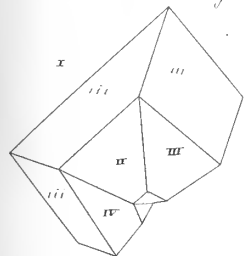
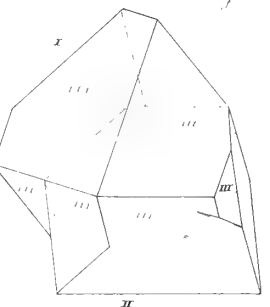
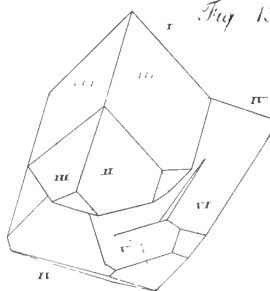
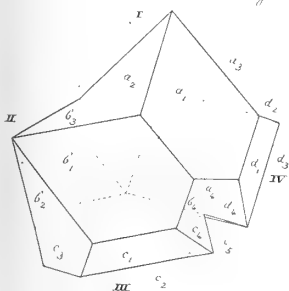
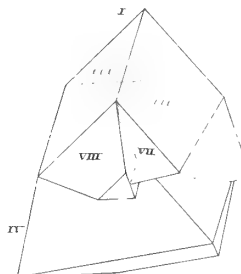
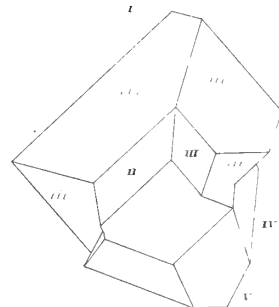
Al n. 15 fu disegnato un gruppo composto di sette individui, i quali però si trovano, almeno in parte, due a due in posizione parallela. Il grosso ottaedro (I) porta sulla sua faccia $1\bar{1}\bar{1}$ un secondo individuo (II) ad asse di geminazione $[1\bar{1}\bar{1}]$, ed è unito ad una grossa lamella (III) ad asse $[1\bar{1}1]$. A questa si unisce IV in posizione parallela ad I. Dalla faccia 111 di IV sporge un quinto individuo (V) ad asse $[\bar{1}\bar{1}1]$, ed al gruppo così costituito si unisce un geminato (VI e VII) in posizione identica di IV e V della fig. 17, in guisa che VI è in posizione parallela a V. I sette individui sono adunque in cinque posizioni diverse; gli assi di geminazione, riferiti al primo individuo, sono $[1\bar{1}\bar{1}]$, $[1\bar{1}1]$, $[\bar{1}\bar{1}1]$ e $[115]$; II, I, III, IV hanno gli assi di geminazione paralleli ad 110, I, IV, V, VI, VII, paralleli ad $1\bar{1}0$.

Il gruppo più complicato fra quanti ebbi agio di studiare, è raffigurato ai n. 13 e 13a in due posizioni diverse; la fig. 13a è girata per 90° attorno a [001] in modo che $1\bar{1}1$ di fig. 13a viene ad occupare il posto di 111 della fig. 13. L'intero gemello polisintetico è costituito da otto individui. Al primo individuo ottaedrico (I) va unito un secondo ottaedrico (IV) con asse $[1\bar{1}1]$; ad I poi si aggiungono ancora tre individui tetraedrici, II con asse $[\bar{1}11]$, VII con asse [111], e VIII con asse $[\bar{1}11]$, talchè II e VIII sono in posizione parallela; all'individuo II se ne aggiunge un altro tetraedrico (III) con asse $[15\bar{1}]$, a IV si uniscono V e VI precisamente come II e III si uniscono ad I. I due gruppi I, II, III e IV, V, VI sono identici al gruppo I, II, III della fig. 6, il gruppo I, VII, VIII è come I, II, III della fig. 16.

Riassumendo ora tutte le misure fatte sui geminati, troviamo le seguenti medie per gli angoli omologhi:

	109°27′30″ (39 sp.)	70°33′ 8″ (32)	38°55′ 5″ (30)
calc.	109°28′16″	70°31′44″	38°56′33″
diff.	— 46″	+ 1′24″	— 1′28″
	22°11′57″ (14)	141° 3′48″ (3)	31°34′40″ (1)
calc.	22°11′30″	141° 3′27″	31°35′11″
diff.	+ 27″	+ 21″	— 31″

Dal paragone istituito tra le medie trovate e i valori teorici segue, che i gemelli sottoposti alla osservazione goniometrica deviano dalla teoria assai più

sensibilmente del cristallo semplice più sopra descritto. Tale fenomeno può derivare da parecchie cause. Anzitutto non si possono misurare nei geminati tutti gli angoli omologhi di un medesimo individuo, ma pare che questo inconveniente avrebbe dovuto essere compensato dal numero assai maggiore di angoli omologhi misurati sui cristalli gemelli, a confronto di quelli misurati sul cristallo semplice. In secondo luogo potremmo attribuire la meno perfetta concordanza fra teoria ed esperienza nei geminati di spinello, a rotolamento subìto dai cristalli, i quali provengono, come si sa, da terreni di trasporto. Senza volere escludere questa causa perturbatrice, devo però notare: 1° che essa avrebbe dovuto influire tanto sui cristalli semplici quanto sui gemelli; 2° che, salvo pochissime eccezioni, le faccie dei geminati riflettevano immagini nettissime, come faccie perfettamente piane, locchè non andrebbe troppo d'accordo coll'ipotesi di un cambiamento di angoli prodotto dal rotolamento subìto; 3° che nei gruppi simmetrici, come ad es. fig. 2, gli angoli omologhi $o_1 o_2$ ecc., avrebbero dovuto cambiare tutti nel medesimo senso sotto l'influenza del rotolamento, mentre li troviamo tanto superiori quanto inferiori ai valori richiesti dalla teoria. Ritengo perciò che la causa principale delle irregolarità maggiori dei gemelli sia da cercarsi nel fenomeno stesso della geminazione. Di fatti, non mancano altri esempî che dimostrano essere la geminazione stessa una causa perturbatrice nei cristalli. Basta ricordare i geminati di ortose ad asse [001] di Baveno, dell'Elba, ecc., nei quali le faccie 001 e $\bar{1}01$ sembrano trovarsi in un medesimo piano, talchè, senza l'aspetto fisico diverso delle due pinacoidi, senza l'aiuto della sfaldatura parallela a 001, o della linea di separazione segnata sovente da sovrapposizione regolare di albite, tali gemelli si potrebbero prendere per cristalli semplici del sistema trimetrico. Tutti conoscono poi il fatto dei geminati di fluorite, in cui il fenomeno della poliedria pare essenzialmente dovuto alla geminazione. E tali esempî di leggieri si potrebbero trovare sovra molte altre sostanze. Avrò occasione di tornare sulla questione in un lavoro sull'epidoto e sul pirosseno italiano, i cui cristalli escludono affatto l'influenza del rotolamento.

G. Strüver — Geminati di spinello.

G. Strüver dis. A. Nizza inc.

Sulla variazione secolare della declinazione magnetica di Roma.

Nota di F. KELLER

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 7 aprile 1878.

Nella seduta del 3 giugno 1877 presentai a questa Accademia il risultato delle misure della componente orizzontale del magnetismo terrestre eseguite nella stazione magnetica di s. Pietro in Vincoli. Proseguendo questi studî ho fatto altre 16 misure di questa forza e i valori ottenuti poco si scostano da quelli trovati antecedentemente. Mi riserbo di pubblicare e di discutere questi nuovi valori in un' altra occasione. limitandomi in vece oggi a presentare il risultato delle misure della declinazione magnetica eseguite nella medesima stazione di s. Pietro in Vincoli.

Per conoscere la declinazione magnetica occorrono due operazioni del tutto differenti, cioè si deve prima trovare il meridiano astronomico e poi il meridiano magnetico, l' angolo compreso fra queste due direzioni è appunto la declinazione magnetica. Il primo di questi due meridiani ha una posizione invariabile e questo dev' essere determinato mediante osservazioni astronomiche, il secondo invece è alquanto variabile col tempo, e lo scopo degli osservatorii magnetici è appunto quello di assegnare per ogni giorno l'angolo, che formano i due meridiani.

Ho tracciato due volte il meridiano astronomico osservando la Polare nella sua massima elongazione dal meridiano tanto all' est quanto all' ovest. Questa operazione fu eseguita mediante un eccellente teodolite di Starke appartenente al nostro gabinetto di fisica, il di cui circolo orizzontale fornito di due microscopi dà gli angoli coll' esattezza di due secondi. La prima di queste due determinazioni è stata effettuata nel mese di settembre 1877 e ripetuta per varie sere avendo sempre cura di osservare nella sera susseguente col cannocchiale rovesciato, onde eliminare il piccolo errore che ha origine nella posizione non perfettamente perpendicolare fra l' asse ottico del cannocchiale e l' asse orizzontale del teodolite. La seconda determinazione è stata fatta in un modo del tutto analogo, nei primi giorni del passato mese di marzo. In ambedue i casi fu misurato l'angolo compreso fra la direzione del trovato meridiano ed una mira fissa segnata sul muro del fabbricato della scuola degli Ingegneri.

Le due determinazioni che ho fatto differiscono per 16 secondi e mi sembra che questa differenza sia abbastanza piccola, principalmente quando si rifletta, che la distanza della mira dal centro della stazione è di soli 54 metri, il che richiede che lo strumento sia centrato con esattezza assai grande.

Il meridiano magnetico è stato determinato col medesimo teodolite di Lamont, che ha servito per le ricerche sulla componente orizzontale magnetica e del quale

feci cenno nell' ultima pubblicazione. Il suo ago magnetico consiste di due piccole sbarre parallele della lunghezza di 12 centimetri ciascheduna, invariabilmente congiunte fra loro mediante una staffa di ottone, che porta lo specchietto. Questa staffa è fornita di due uncini per poter sospendere l'ago in due diverse posizioni, cioè in maniera che quella delle due sbarre, che si trova nella prima posizione al di sopra, viene poi nella seconda al di sotto. Egli è necessario di osservare l'ago in queste due posizioni per accertare se l'asse magnetico del sistema stia perfettamente perpendicolare sul piano dello specchio. Il cannocchiale porta nel suo foco un reticolo illuminato dal di sopra attraverso un prisma a riflessione totale, e si riconosce la posizione perpendicolare fra l' asse ottico del cannocchiale e lo specchio mediante la perfetta coincidenza del reticolo colla sua immagine.

Il filo di sospensione è di seta, della lunghezza di $1^m,90$, e che esso sia della massima tenuità possibile apparisce dal fatto, che si ruppe già due volte nel tempo di 22 mesi per il semplice peso dell'ago, senza aver ricevuto verun urto. Queste circostanze rendono il suo coefficiente di torsione assai piccolo, e da molte misure che ho fatto in diverse epoche risulta, che torcendo l' estremo superiore del filo per due intere periferie l'ago magnetico si sposta in media di $1' 56''$, lo che corrisponde a un coefficiente di torsione espresso da $\frac{1}{22344}$.

La picciolezza di questo valore rende quasi inutile la correzione per la torsione; infatti volendo anche ammettere, che la posizione d' equilibrio del filo difetti per un angolo retto dal meridiano magnetico, il relativo errore ammonterebbe a soli $15''$.

Si vede adunque, che la correzione per la torsione riesce nel nostro teodolite assai piccola, mentre i fili di metallo possono facilmente indurre a grandi errori.

Riportando qui i risultati delle misure ottenute, rammento ancora di non aver escluso veruna delle osservazioni fatte, conservando anche quelle che sembrano allontanarsi dall' andamento generale della declinazione.

Declinazione magnetica osservata nella stazione magnetica a s. Pietro in Vincoli.

Data	Ora	Declinazione
14 Maggio 1876	ore 4 pom.	12° 2',80 Ovest
4 Giugno	ore 4 pom.	12 0',75
27 id.	ore 4 pom.	11° 56',32
3 Agosto	ore 6 m. 15 ant.	11° 55',52
4 Ottobre	ore 9 ant.	11° 55',98
5 id.	ore 2 m. 20 pom.	12° 2',27
29 Aprile 1877	ore 4 m. 30 pom.	11° 58',13
5 Maggio	ore 4 pom.	11° 52',21
6 id.	ore 5 pom.	11° 54',75
20 id.	ore 5 pom.	11° 54',41
21 id.	ore 5 m. 45 pom.	11° 52',12
21 id.	ore 4 pom.	11° 59',90
3 Giugno	ore 6 m. 15 ant.	11° 49',85
4 id.	ore 6 m. 15 ant.	11° 49',68
7 id.	ore 6 m. 15 ant.	11° 50',81

8 Giugno	ore 6 m. 15 ant.	11° 53′,45	Ovest
8 id.	ore 6 m. 30 pom.	11° 54′,12	
9 id.	ore 6 ant.	11° 49′,62	
19 id.	ore 6 ant.	11° 50′,30	
26 id.	ore 6 m. 30 ant.	11° 49′,41	
11 Luglio	ore 7 ant.	11° 51′,12	
30 id.	ore 5 m. 30 pom.	11° 54′,85	
14 Agosto	ore 9 m. 30 ant.	11° 50′,73	
24 id.	ore 10 ant.	11° 53′,71	
30 id.	ore 3 m. 15 pom.	11° 54′,00	
4 Settembre	ore 5 pom.	11° 52′,82	
12 id.	ore 2 pom.	11° 55′,40	
22 id.	ore 3 m. 15 pom.	11° 52′,03	
6 Ottobre	ore 5 m. 30 pom.	11° 51′,71	
24 id.	ore 10 m. 40 ant.	11° 52′,05	
2 Novembre	ore 7 m. 45 ant.	11° 49′,50	
28 Dicembre	ore 8 ant.	11° 49′,06	
13 Gennaio 1878	ore 10 m. 15 ant.	11° 51′,25	
19 Febbraio	ore 6 m. 40 ant.	11° 47′,89	
4 Marzo	ore 5 pom.	11° 49′,25	

L'andamento di questi valori accenna in un modo evidente ad un decrescimento della declinazione, così la massima declinazione di 12° 2′,80 fu osservata il 14 maggio 76 e la minima di 11° 47′,89 il 19 febbraio 78; anche il periodo diurno è riconoscibile ma con minore evidenza.

Sarebbe stato desiderevole che le osservazioni fossero fatte ad epoche stabilite con più regolarità, ma essendo ciò impossibile nel caso presente, dovetti contentarmi di farle quando le altre mie occupazioni me lo permettevano. Per desumere con esattezza la media declinazione ad una data epoca non avvi altro mezzo che quello di fare delle osservazioni ripetute per un certo numero di giorni (per esempio per una settimana) ad ore fisse ed equidistanti fra loro. Queste osservazioni posson farsi col declinometro differenziale, ma una di esse dovendo essere assoluta, richiede in ogni modo l'uso del teodolite.

Nel solo caso, ove il periodo diurno della declinazione fosse conosciuto con esattezza sufficiente, si potrebbe fare a meno degli intervalli uguali di tempo, ma ciò suppone già per sè uno studio abbastanza lungo e minuto. Mentre adunque ciascuno dei valori riportati dà la declinazione esatta per l'epoca in cui fu osservata, non abbiamo mezzo per concludere regolarmente dal loro insieme la declinazione media in una data epoca. In vista di questa difficoltà non mi è rimasto per ora altro modo di procedere che quello di prendere semplicemente la media di tutte le osservazioni la quale risulta essere:

11° 53′,4

e l'epoca a cui si riferisce sarebbe

1877,3.

Uno sguardo sulla tavola delle declinazioni fa vedere, che le misure furono a preferenza fatte nelle prime ore della mattina, in cui ha luogo a un di presso il minimo della declinazione, mentre mancano quasi affatto le ore del massimo, il quale si verifica poco dopo il mezzodì. Questa circostanza avrà per effetto che la media trovata sia di qualche poco inferiore alla vera declinazione, ma non avendo fatto ancora degli studî sul periodo diurno, non ci sono per ora i mezzi per determinare questa quantità, la quale dovrebbe essere del resto abbastanza piccola.

Un' ultima osservazione rimane ancora da fare sulla declinazione trovata, cioè importerebbe molto di sapere se realmente nella camera magnetica non esista veruna causa perturbatrice. L' oggetto di ferro più vicino all' istrumento si trova alla distanza di 34 metri, ed ho già ricordato nella mia prima pubblicazione che la sua influenza sembra essere insensibile nella componente orizzontale. Non ho fatto ricerche simili sulla declinazione; i teodoliti, ambedue pesantissimi e di grande volume non si prestano bene a studî comparativi.

Venendo ora all' argomento finale di questa Nota, cioè alla variazione secolare della declinazione in Roma, prendo per punti di partenza le seguenti due misure corrispondenti ad epoche anteriori. La prima viene riportata dal Lamont [1] e si riferisce all' anno 1850; si aveva allora secondo questo autore la declinazione

$$40^\circ\ 31';$$

mancando l'indicazione del giorno, ammetto che essa si riferisca alla metà dell' anno cioè a 1850,5.

La seconda è quella fatta da Secchi nel novembre 1859 nell' osservatorio del Collegio romano, e questa risulta

$$13^\circ\ 43',5;$$

non essendo precisato il giorno del mese di novembre suppongo per la medesima l' epoca 1859,8.

Per le osservazioni a s. Pietro in Vincoli si ha invece la declinazione

$$11^\circ\ 53',4$$

per l' epoca 1877,3.

Uno sguardo sopra questi valori fa rilevare una forte diminuzione della declinazione magnetica, come si verifica in tutta l' Europa.

Contando il tempo t dal principio dell' anno 1875, l' andamento della declinazione può essere rappresentato dalla formula

$$\delta = 12^\circ\ 9',41 - 6',860\, t - 0',0441\, t^2, \tag{1}$$

dalla quale risulta che il decremento annuo aumenta col tempo.

Kohlrausch dà per Gottinga la formula seguente [2]

$$\delta = 14^\circ\ 51',7 - 8',843\, t - 0',05349\, t^2 \tag{2}$$

ove si deve il tempo computare a partire da 1867,52.

[1] Carl, Repertorium der Physik. Vol. 5, pag. 51.
[2] Astronomische Nachrichten. Vol. 72, pag. 319.

Per rendere le due formule più paragonabili riferiamo quella di Roma anch' essa all' epoca 1867,52 e così otteniamo

$$\delta = 12^\circ\ 58',38 - 6',1989\, t - 0',0441\, t^2. \tag{3}$$

Come si vede sono le formule (2) e (3) assai simili fra loro; ambedue danno una diminuzione della declinazione e in ciascuna aumento di decremento annuo col tempo: gli andamenti della declinazione a Roma e Gottinga presentano quindi una grande concordanza; la sola differenza sta nei valori numerici di questi decrementi, che sono minore a Roma e maggiore a Gottinga. Un fatto analogo si verifica per la componente magnetica orizzontale, questa cresce a Roma e a Gottinga, ma l' aumento annuo di Roma è minore di quello di Gottinga. Su questo fatto ho già richiamato l'attenzione nell' ultima pubblicazione.

Finalmente noto ancora che, osservando il prof. Respighi negli anni 1855 e 58 la declinazione magnetica a Bologna, trovò (1) un decremento annuo di 7'; questa quantità è intermedia a quelle trovate per Roma e Gottinga e si accorda bene colla posizione geografica di Bologna, la quale è anch' essa intermedia fra Roma e Gottinga.

(1) *Sulla declinazione magnetica assoluta di Bologna.* Memorie dell'Accademia di Bologna. Vol. 10.

Osservazioni astronomiche e fisiche sull'asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte: fatte nella Reale Specola di Brera in Milano coll'equatoriale di Merz durante l'opposizione del 1877.

Memoria del Socio G. V. SCHIAPARELLI

letta nella seduta del 5 maggio 1878.

INTRODUZIONE

1. Quando nel settembre 1877, presentandosi Marte in una delle sue più favorevoli opposizioni, io diressi l'attenzione su questo pianeta, non era da principio mio intendimento consacrare ad esso una serie continuata e regolare di osservazioni. Io desiderava soltanto esperimentare, se il nostro Refrattore di Merz, il quale aveva dato così buon saggio di sè sopra le stelle doppie, possedesse anche le qualità ottiche opportune ad aiutare lo studio della superficie dei pianeti. Desiderava pure verificare per propria esperienza quanto nei libri d'Astronomia descrittiva si suole narrare sulla superficie di Marte, sulle sue macchie, e sulla sua atmosfera. Devo confessare, che comparando l'aspetto del pianeta colle carte che ne furono pubblicate negli ultimi tempi, i primi saggi non riuscirono molto incoraggianti. Io ebbi la sfortuna di fare le prime osservazioni su quelle parti delle superficie di Marte che da tutti finora son state considerate come le più difficili e le più dubbiose: cioè sulle regioni designate nelle carte annesse a questa Memoria col nome di *Mare Eritreo* (vedi Tav. III e IV), e sopra quelle altre, che subito dopo del Mare Eritreo si presentano all'osservatore per effetto della rotazione diurna del pianeta. Da principio non seppi orientarmi affatto: e soltanto più tardi con qualche difficoltà pervenni a riconoscere sul pianeta alcuna delle forme notate su quelle carte. Quando però cominciai ad esaminare i bellissimi disegni eseguiti dal prof. Kaiser e dal sig. Lockyer durante l'opposizione del 1862 ed in configurazioni del pianeta quasi affatto identiche a quelle che ebbero luogo nel 1877, vidi con piacere, che i miei disegni in molti particolari essenziali erano rassomiglianti ai loro. Potei convincermi, che malgrado alcune discordanze, io vedeva il pianeta press'a poco com'essi l'avevano veduto; che le differenze apparenti provenivano in somma dal diverso modo d'interpretare le cose osservate; e sopratutto, che sulla topografia del pianeta Marte molto ancora restava da fare, e molto ancora si poteva fare, anche coi mezzi limitati di cui io disponeva. Il 12 settembre 1877, malgrado che l'opposizione fosse già seguìta il giorno 5 dello stesso mese, deliberai di proseguire le osservazioni in modo da trarne fuori tutto il partito che fosse possibile col dato istrumento e nelle date circostanze. Le condizioni atmosferiche

furono tanto favorevoli al mio divisamento, da permettermi di descrivere quasi completamente e con discreta abbondanza di particolari, l'emisfero australe del pianeta, e d'incominciare anche ad abbozzarne con qualche approssimazione quella parte dell'emisfero boreale che giace fra l'equatore e il 40° parallelo nord. L'amplificazione impiegata fu quasi esclusivamente quella del nostro oculare IV positivo, che è di 322 volte. Soltanto in gennaio, febbraio e marzo 1878, essendo il diametro apparente del pianeta ridotto a pochi secondi, ho dovuto impiegare un'amplificazione più forte, che fu quella di 468 corrispondente al nostro oculare V negativo.

2. Il mio intento fondamentale fu di procedere alla descrizione del pianeta non per mezzo di dischi o di ritratti di Marte fatti a misura d'occhio, ma dietro principî e con metodi geometrici. A tal fine da prima determinai di nuovo il fondamento di tutta l'areografia, cioè la direzione dell'asse di rotazione, e il luogo della calotta polare australe. In secondo luogo, appoggiandomi a questa come base definii micrometricamente sulla superficie di Marte un certo numero di punti fondamentali, in modo da poterne dedurre le coordinate di latitudine e di longitudine areografica. Da ultimo, coll'aiuto di questi punti potei compiere senza troppa incertezza la descrizione topografica per mezzo di disegni delle regioni fra i medesimi punti interposte, precisamente come il geografo compie la descrizione di un paese della Terra interpolando a stima i particolari fra i punti geometricamente determinati.

3. Nella presente Memoria ho esposto quanto nell'intervallo compreso fra il settembre 1877 e il marzo 1878 ho potuto fare per eseguire il proposto piano. A ciascuna delle tre operazioni già sopra enumerate è destinato uno dei tre primi capitoli. Un quarto capitolo riassume le osservazioni di natura fisica, che mi fu dato di fare e contiene inoltre fatti o discussioni relative alla costituzione della superficie del pianeta e della sua atmosfera. Le carte del pianeta, che accompagnano questo scritto, sebbene ancora molto imperfette, sono di gran lunga le più ricche di particolari, che siano state pubblicate: il qual vantaggio in prima linea è dovuto all'eccellente definizione del nostro cannocchiale di Merz. Questo nobile istrumento, malgrado le sue modeste dimensioni [1], ha rivelato una gran quantità di minuti oggetti, che nelle opposizioni precedenti erano sfuggiti ai giganteschi telescopi di cui giustamente si vantano le estere nazioni. Non vi è dubbio che molto di più si sarebbe ancora ottenuto, se io avessi potuto usare un cannocchiale simile a quelli che formano oggi ornamento ed orgoglio delle specole di Vienna, di Gateshead e di Washington. Mi contento dunque per ora di presentare quello che mi è stato concesso di ottenere, supplendo fin che ho potuto colla maggior diligenza alla minor potenza ottica dell'istrumento.

[1] Distanza focale $3^{m},25$: apertura millimetri 218.

Capitolo I.

Nuova determinazione della direzione dell'asse rotatorio di Marte.

4. La descrizione geometrica della superficie di Marte richiedeva che fosse conosciuta con esattezza la direzione di quel diametro del disco, secondo il quale si projetta ad ogni istante l'asse polare del pianeta. Tale scopo si può raggiungere con molta precisione e con molta facilità osservando i movimenti della macchia nevosa che giace a poca distanza dal polo visibile (che nel 1877 fu il polo australe). Se noi immaginiamo condotta in ogni istante una retta dal centro del pianeta ad un punto determinato e costante di quella macchia, tal retta durante la rivoluzione diurna di Marte descriverà un cono, e sarà facile dedurre, dall'osservazione di un certo numero di generatrici del medesimo, la direzione apparente dell'asse del cono, che è pure l'asse del pianeta.

5. Con questo intendimento in diciotto giorni compresi fra il 12 settembre e il 13 ottobre [1] feci 66 misure dell'angolo di posizione, che rispetto al centro del disco apparente di Marte teneva quel punto della calotta nevosa che poteva ad ogni volta considerarsi come il centro della sua intensità luminosa. Il metodo adoperato fu il seguente. Essendo AB (fig. 1) una porzione del perimetro del disco, N la macchia di neve, si girava il micrometro in modo, che tagliando col filo di posizione HK un minimo segmento contiguo alla neve, questa ne occupasse il mezzo, e riuscissero uguali a stima d'occhio le parti NH, NK. Allora si riteneva, che HK fosse esattamente perpendicolare al raggio ON, e dalla posizione letta di HK si concludeva quella di ON. Questo procedimento fu impiegato fino alla fine di settembre [2], cioè finchè il corno australe della fase si trovò abbastanza lontano dalla neve, per non correre pericolo di comprenderne una parte nell'intervallo HK. Nelle osservazioni dell'ottobre si credette più prudente usare della semplice tangenza del filo HK a quel punto del lembo, che a stima d'occhio credevasi giacere sul raggio del disco passante pel centro della neve (fig. 2). Questo modo si poteva praticare finchè il corno australe della fase non invadeva la parte del lembo occupata dalla neve, o ad essa molto vicina: il che fu vero fino al 14 ottobre. In questo giorno il corno australe della fase raggiunse la posizione 154°, e il centro della neve, nella

[1] Tutte le osservazioni riferite in questa Memoria essendo comprese fra il settembre 1877 e il marzo 1878, credo inutile di aggiungere ogni volta alla data del giorno e del mese l'indicazione dell'anno, che riesce per sè abbastanza chiara.

[2] Si devono eccettuare le cinque prime osservazioni, fatte il 12 e il 13 settembre, le quali furono ottenute disponendo il micrometro in modo che il filo di posizione bissecasse simultaneamente la macchia nevosa, e il disco di Marte. Questo metodo fu tosto abbandonato per i pericoli che offre di gravi errori sistematici, specialmente quando la fase è sensibile, e gli orli del pianeta non sono da per tutto egualmente luminosi.

sua digressione orientale, arrivò a 157°: la neve poi occupava certamente almeno 6° del lembo, onde la sua estremità orientale avrebbe potuto benissimo venire a contatto colla cuspide della fase oscura, quando la neve si fosse trovata esattamente sull'orlo del lembo visibile. Ma ciò non era, e il contatto non ebbe certamente luogo nè quel giorno, nè in alcuni altri che lo seguirono. Lo stato delle cose fu allora come dimostra la fig. 3ª. Nondimeno credetti opportuno di concludere le osservazioni sulla posizione della macchia nevosa col giorno 13 ottobre, per evitare il pericolo di corrompere, con osservazioni affette da errori sistematici, il risultamento delle altre.

6. La macchia nevosa essendo eccentrica rispetto al polo, nelle diverse configurazioni non presentava uguale aderenza al lembo del disco. Durante il periodo delle osservazioni essa fu sempre *tutta* visibile, a cagione della forte inclinazione dell'asse del pianeta sul piano del circolo terminatore del disco, inclinazione che si mantenne sempre fra 22° e 25°. Ma in certe fasi della rotazione, quando la neve passava *dietro* del polo di Marte, si avvicinava tanto al lembo col suo contorno, da parervi attaccata: nelle fasi opposte, nei passaggi cioè della neve pel meridiano centrale del disco essa se ne staccava sensibilmente, e appariva tutta projettata sulla superficie dell'emisfero anteriore del pianeta. Nelle prime posizioni la inclinazione delle parti centrali della superficie nevosa rispetto alla visuale fu di circa 17°: nelle ultime, di 29°. A parità di circostanze la neve appariva dunque più larga e più visibile nel secondo caso, che nel primo. Queste variazioni però non esercitavano alcun influsso sulle misure di cui qui si rende ragione; e non portavano alcuna diversità nel metodo di osservazione adoperato. Maggior timore doveano inspirare le variazioni del contorno della massa dei ghiacci, che andava impiccolendosi a vista d'occhio; la sua forma non sempre circolare, ma negli ultimi tempi molto variabile; e da ultimo la possibilità, che quelle masse potessero lentamente essere trasportate in balìa di correnti marine, come sulla Terra si è riconosciuto avvenire sopra masse di ghiacci non minori di quella. Da tali cause d'errore è impossibile liberare il calcolo, anzi dal calcolo devono ricavarsi gl'indizî della loro esistenza, e la stima del loro possibile influsso.

7. I risultati delle misure sono consegnati nella prima e nella terza colonna del quadro numerico intercalato al § 16, delle quali il significato è bastantemente dichiarato dalle rispettive intestazioni. Il calcolo di cui ho fatto uso per dedurre da questa misura le quantità che importa conoscere ha per iscopo di determinare direttamente non l'intero valore di tali quantità, ma solo la piccola correzione che si deve portare a valori delle medesime già approssimativamente conosciuti: e si appoggia ai principî che ora brevemente esporremo.

8. Sulla sfera celeste apparente (fig. 4) sia P il polo boreale dell'equatore terrestre, P′ quello dell'equatore di Marte, M la posizione geocentrica del pianeta, il tutto per l'istante di una data osservazione. Il luogo di M è conosciuto per le Effemeridi astronomiche: il luogo di P′ (che è quello che si tratta di correggere coll'aiuto delle nuove osservazioni) supponiamo prossimamente conosciuto per osservazioni anteriori. Nel triangolo così formato sarà dato l'angolo P che è la differenza delle ascensioni rette di M e di P′: saran dati i lati PM, PP′, che sono le distanze polari di M e di P′. Sarà facile concludere: 1° il lato P′M che misura l'angolo formato al centro di Marte dalla visuale diretta da Marte alla Terra e dalla parte australe

dell'asse di rotazione del pianeta; angolo che diciamo δ; 2° l'angolo in M compreso fra il piano del circolo di declinazione di Marte, e il piano P′M condotto per l'asse rotatorio di Marte e pel centro della Terra. Questo angolo manifestamente è misurato da quello che sulla sfera celeste fanno al centro di Marte il circolo di declinazione e l'altro circolo massimo, secondo il quale al nostro sguardo si projetta l'asse rotatorio del pianeta. In altri termini è l'angolo di posizione della parte boreale di quest'asse; aggiungendovi 180° si otterrà la posizione della parte australe dell'asse medesimo, posizione che chiameremo p. 3° Da ultimo si potrà ottenere l'angolo in P′ che col piano fisso PP′ fa quel meridiano areografico, che nel momento dell'osservazione passa al centro del disco apparente: meridiano che chiameremo quindi *centrale* e di cui P′M′ sarà la traccia sulla sfera celeste. Ed è manifesto, che se si conosce con bastante esattezza il periodo della rotazione e uno degli istanti, in cui l'origine delle longitudini areografiche è passata pel circolo fisso PP′, facilmente si saprà qual'è, per il momento dell'osservazione, il luogo del primo meridiano di Marte, e quindi anche la longitudine areocentrica del punto, che in quel momento figurava come centro del disco.

9. Per queste determinazioni, necessarie ai calcoli seguenti, ho preso come base dell'approssimazione la direzione dell'asse di Marte determinata da Oudemans sopra osservazioni delle macchie polari australe e boreale fatte da Bessel negli anni 1830, 1835 e 1837 (1). Oudemans ha assegnato per una data, che non trovo indicata, ma che non può esser molto lontana da 1834,0 le seguenti coordinate del punto della sfera celeste, a cui corrisponde la parte boreale di quest'asse

$$\alpha = 317^0\ 34' \qquad \delta = +\ 50^0.\ 5'.$$

Le variazioni annuali dovute alla precessione terrestre essendo rispettivamente $+\ 0', 485$ e $+\ 0', 247$, sarà facile trasportare queste coordinate ad un'epoca qualsiasi, ma sarà forza negligere il moto precessionale dell'asse di Marte, il quale non è ancora conosciuto. Adottando pel 1877 i valori

$$\alpha = 317^0\ 55' \qquad \delta = +\ 50^0.\ 16'$$

e prendendo le coordinate di Marte nel *Nautical Almanac*, calcolai per alcune date i valori di δ e di p, i quali trovai essere affatto identici a quelli, che il sig. Marth ha pubblicato nel volume XXXVII delle *Notizie mensili* della Società Astronomica di Londra, pag. 301 e seguenti (2). Ciò mi dispensò dal calcolare il resto, e tutti gli altri valori di δ e di p corrispondenti agli istanti delle 66 osservazioni trassi dall'effemeride del sig. Marth, la quale evidentemente è fondata sopra elementi identici a quelli da me assunti, sebbene l'autore non abbia dato in proposito alcuna indicazione.

10. Nello stesso luogo il sig. Marth ha pure dato di due in due giorni la longitudine areografica del punto centrale del disco di Marte per l'istante del mezzogiorno medio di Greenwich. Comparando questa effemeride colle mie osservazioni mi

(1) Vedi il Giornale intitolato *Astronomische Nachrichten*, n. 838.

(2) *Ephemeris for Physical Observations of Mars.* Monthly Notices of the R. Astronomical Society, Vol. XXXVII, p. 301. April 1877.

avvidi, che il sig. Marth ha scelto (come pure io ho fatto) per origine delle longitudini areocentriche il punto designato da Maedler sulla sua carta colla lettera a: il quale si trova molto presso all'equatore del pianeta, ed è sulle nostre carte designato col nome di *Vertice d'Aryn*. — Inoltre ho constatato, che deviando dall'uso degli areografi anteriori, Marth ha fatto crescere i numeri delle longitudini in modo, che nel passaggio al meridiano centrale si succedano nell'ordine dei tempi luoghi di longitudine sempre crescente: questo modo che è certamente più naturale e più comodo dell'altro, fu pure da me adottato, e si può definire dicendo, che sul disco di Marte le longitudini vanno crescendo dal lembo precedente al lembo seguente. — Da ultimo riconobbi, che pel calcolo delle longitudini areografiche del punto centrale del disco di Marte il sig. Marth ha adottato per durata di una rotazione completa rispetto alle stelle 88642, 7 secondi di tempo medio solare terrestre. Questa durata non può essere in errore che di una piccola frazione di secondo, come risulta dalle ricerche di Kaiser e di Proctor sui vecchi disegni di Marte fatti da Hooke e da Huygens. Essa è più che bastevolmente accurata per comparare fra loro le mie misure, che non abbracciano due mesi interi ([1]). Su quanto concerne l'epoca adottata dal sig. Marth per le longitudini areocentriche (cioè la posizione del primo meridiano di Marte nello spazio in un istante determinato) non ho potuto scoprire quali siano le basi del suo calcolo. Dirò soltanto, che le longitudini areografiche del centro del disco interpolate dalla sua effemeride si sono accordate sempre egregiamente colle mie osservazioni dal principio sin alla fine delle medesime. E del resto è facile comprendere, come un errore costante di queste longitudini nulla possa influire sulla presente investigazione, l'origine delle medesime sul globo di Marte potendosi scegliere affatto ad arbitrio. Tutte queste considerazioni mi hanno determinato ad adottare l'effemeride di Marth anche pel calcolo delle longitudini areografiche del centro del disco, certo di avere con ciò per esse un'eccellente approssimazione. Per tal fine il tempo siderale di Milano di ciascuna osservazione fu da prima convertito in medio, poi corretto per l'equazione della luce, e da ultimo ridotto a quello di Greenwich adottando $36^m, 8$ per differenza dei meridiani. Col tempo così calcolato si entrò nell'effemeride accennata, e le longitudini del centro del disco corrispondenti a ciascuna delle osservazioni si trovano registrate nella seconda colonna del quadro che sta nel § 16. Tali longitudini saran sempre designate con ω.

11. Il circolo della fig. 5 rappresenti il disco di Marte, come appariva rovesciato nel cannocchiale astronomico durante queste nostre osservazioni: O ne sia il centro, P il luogo in cui si vedrebbe il polo australe, se fosse contrassegnato in qualche modo. Il diametro AB sarà quello su cui si projetta l'asse rotatorio del pianeta, e di cui preme anzitutto determinare l'esatta direzione, o l'angolo $\mathrm{NOB} = p$ ch'esso fa col circolo di declinazione NS. Sia mr la piccola ellisse secondo cui si projetta il parallelo descritto nella rotazione diurna di Marte dal centro della macchia nevosa, m il luogo ch'essa occupa durante l'osservazione, mO, mP i circoli massimi che la congiungono col polo P di rotazione, e col polo anteriore O del circolo SBQNAR. Nel triangolo

([1]) Dal 12 settembre al 4 novembre. Nei mesi seguenti sino al marzo 1878 le osservazioni furono esclusivamente consacrate al completamento dei particolari topografici.

sferico mPO il lato PO misura l'inclinazione della parte australe dell'asse rotatorio sulla linea visuale, ciò che sopra abbiam chiamato δ: esso è il complemento della latitudine areografica australe del punto O che occupa il centro dell'emisfero visibile. Il lato Pm è la distanza (supposta costante) del centro della calotta nevosa dal polo P, e lo chiamiamo λ. L'angolo mPO è la differenza delle longitudini areografiche del punto O (longitudine che chiamiamo ω), e della calotta nevosa (longitudine che chiamiamo θ): sia t questa differenza contata positivamente da PO come origine verso sinistra, in senso contrario alle longitudini. Finalmente l'angolo $mOP = \Pi$ è la differenza fra l'angolo di posizione della calotta nevosa mON e l'angolo di posizione PON del polo P. Questa differenza si suppone positiva, quando m è a sinistra del circolo massimo PO. L'angolo in m diciamo x. Dati λ, δ, t si ricavano Π e x dalle note analogie

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Pi + x) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta - \lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\delta + \lambda)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t, \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\Pi - x) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta - \lambda)}{\sin\frac{1}{2}(\delta + \lambda)} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t,$$

ed ove sia pur conosciuto l'angolo di posizione p dell'asse OP, aggiungendovi Π si otterrà la posizione P della macchia nevosa, il cui paragone colla posizione osservata somministrerà il modo di correggere gli elementi presi per base del computo. Per l'esecuzione di questo calcolo gli elementi p e δ furono ricavati dall' effemeride di Marth. Per λ un esame approssimativo delle osservazioni avea mostrato che non poteva esser molto diverso da 7°: e s'impiegò questo valore. Dallo stesso esame avendo tratto 30° come valore approssimato della longitudine areocentrica θ della macchia polare, l'angolo t si ebbe sottraendo 30° dalla longitudine ω del centro del disco:

$$t = \omega - \theta = \omega - 30°.$$

Le differenze fra gli angoli P osservati e quelli calcolati nel modo ora spiegato si trovano nella quarta colonna del quadro numerico del § 16, intestata dP: e si devono intendere nel senso osservazione-calcolo.

12. La determinazione completa della giacitura dell'asse rotatorio di Marte nello spazio richiede che si ottengano l'ascension retta e la declinazione del punto P′ della sfera celeste (fig. 4). Evidentemente però a tale ricerca si può surrogare quella di due altre coordinate qualunque del punto P′. Nel caso presente si ottiene la massima comodità col ricercare per un dato istante e per una data posizione M del pianeta l'angolo PMP′ (cioè l'angolo di posizione p dell'asse veduto dalla Terra) e la distanza angolare MP′ (cioè l'angolo δ che fa l'asse del pianeta colla visuale dell'osservatore). Queste due quantità hanno il vantaggio di risultare più direttamente dalle osservazioni, e la loro determinazione dipende da un calcolo più semplice. Due delle incognite del problema saranno dunque le correzioni dp e $d\delta$ da apportarsi alle quantità p e δ in un momento determinato. Dico in un momento determinato, perchè queste correzioni variano col tempo, cioè col variare la positura dell'osservatore rispetto all'asse di Marte. È da riflettere tuttavia che durante i 32 giorni abbracciati da queste osservazioni tal positura ha pochissimo cambiato. Il moto geocentrico del pianeta non arrivò a 4° durante tale intervallo, e gli angoli p e δ non variarono più di 2°. Queste quantità son dell'ordine stesso delle correzioni dp e $d\delta$ che si voglion determinare; onde è manifesto che durante quel tempo potremo ritenere dp e $d\delta$

come costanti, senza pericolo di commettere errori più importanti di quelli che derivano dal trascurare i quadrati delle quantità stesse dp e $d\delta$.

13. Le due altre quantità, di cui occorre considerare la correzione, sono le coordinate θ e λ della macchia nevosa. Designando dunque con dP la differenza (presa nel senso osservazione-calcolo) degli angoli di posizione osservati e calcolati della macchia suddetta, abbiamo dapprima, a causa di $P = p + \Pi$ (§ 11),

$$dP = dp + d\Pi:$$

e poichè Π è funzione della quantità δ, λ, θ, sarà

$$dP = dp + \left(\frac{d\Pi}{d\delta}\right) d\delta + \left(\frac{d\Pi}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{d\Pi}{d\theta}\right) d\theta$$

il tipo generale delle equazioni di condizione da cui si hanno a ricavare le correzioni. Non resta dunque che trovare i coefficienti $\frac{d\Pi}{d\delta}$, $\frac{d\Pi}{d\lambda}$, $\frac{d\Pi}{d\theta}$. Su ciò è da notare, che a cagione di $t = \omega - \theta$, si ha $d\theta = d\omega - dt$. Ma se noi intendiamo le longitudini θ e ω riferite alla medesima origine arbitraria, è manifesto che ω si potrà considerare come esente da correzione, onde rimarrà $d\theta = -dt$, e $\frac{d\Pi}{d\theta} = -\frac{d\Pi}{dt}$. Quindi il problema è ridotto al computo di $\frac{d\Pi}{d\delta}$, $\frac{d\Pi}{d\lambda}$, $\frac{d\Pi}{dt}$: e poichè Π, δ, λ, t sono elementi di un identico triangolo sferico mPO (fig. 5), il calcolo dei detti coefficienti si dedurrà immediatamente dalle analogie differenziali dei triangoli sferici. Possiamo dunque scrivere subito l'espressione completa di dP: chiamando ρ l'arco Om che misura la distanza variabile della neve dal centro dell'emisfero visibile, si ha

$$dP = dp - \sin\Pi \cot\rho \,.\, d\delta + \frac{\sin x}{\sin\rho} \,.\, d\lambda + \frac{\cos x}{\sin\rho} \sin\lambda \,.\, d\theta \quad . \;\; . \;\; . \quad (a)$$

In questa formula il coefficiente di $d\delta$ consta dei due fattori $\cot\rho$ e $\sin\Pi$. Di questi il primo oscilla entro stretti limiti intorno alla quantità $\cot\delta$, la quale nel caso presente è sempre minore di $\frac{1}{2}$: l'altro poi, non arrivando mai Π a 7 gradi, è sempre una piccola frazione. Ne segue ciò che si poteva prevedere dalla natura del problema: cioè che la correzione di δ entra in queste equazioni di condizione con peso troppo inferiore a quello delle altre correzioni dp, $d\lambda$ e $\sin\lambda d\theta$, perchè si possa arrischiare di cavarne una determinazione con sole osservazioni di angoli di posizione: la quale attesi gli errori inevitabili delle quantità dP non potrebbe riuscire che illusoria, ed anche assurda. Vi è inoltre la circostanza facile a verificare, che i coefficienti di $d\delta$ e di $d\lambda$ crescono con leggi quasi affatto identiche e conservano fra loro un rapporto quasi costante per tutti i valori di t [1]. Queste due incognite dunque nelle equazioni

[1] Infatti si ha
$$\frac{\sin\Pi\cot\rho}{\frac{\sin x}{\sin\rho}} = \frac{\sin\Pi\cos\rho}{\sin x} = \frac{\sin\lambda\cos\rho}{\sin\delta}.$$
Posto $\delta = 66°$, $\lambda = 6°$, per $t = 0$ si avrà $\rho = 60°$, e per $t = 180°$, $\rho = 72°$: onde tale rapporto varierà fra i limiti
$$\frac{\sin 6°}{\sin 66°}\cos 60° = 0{,}0572 \quad \text{e} \quad \frac{\sin 6°}{\sin 66°}\cos 72° = 0{,}0354.$$
Si vede quanto difficile sia la separazione delle incognite $d\delta$ e $d\lambda$, e quanto piccolo peso $d\delta$ abbia in confronto di dp, di $d\lambda$ e di $\sin\lambda \,.\, d\theta$.

sono poco meno che solidarie l'una dell'altra, ed una determinazione assurda di $d\delta$ potrebbe cagionare un errore minore, ma pur tuttavia sensibile sopra $d\lambda$.

14. D'altra parte ove si ammetta che il valore di δ, adottato provvisoriamente nei calcoli preparatorî dietro Oudemans, sia già esatto entro uno o due gradi (com'è probabile), l'importo del termine in $d\delta$ non può cambiare il 2° membro dell'equazione (a) che di alcuni centesimi di grado, a cagione del piccolo coefficiente. Or le quantità dP, come or ora vedremo, sono soggette all'error probabile di poco meno che un grado, $d\lambda$ e $\sin\lambda . d\theta$ a circa un decimo di grado. Manifestamente dunque si potrà sopprimere il termine $-\sin\Pi \cot\rho . d\delta$ nelle equazioni di condizione senza correr rischio di modificare sensibilmente il risultato della ricerca [1]. Per queste considerazioni l'equazione (a) resta ridotta a

$$dP = dp + A d\lambda + B d\theta$$

dove si ha $$A = \frac{\sin x}{\sin\rho} \qquad B = \frac{\cos x \sin\lambda}{\sin\rho}.$$

Il quadro numerico del § 16 dà per ciascuna delle 66 osservazioni i valori di A e di 10 B. Dico di 10 B e non di B, perchè per ottenere maggior proporzione nei numeri, nelle equazioni si è posta per incognita $d\Theta = \frac{1}{10} d\theta$ invece di $d\theta$, e quindi si dovettero moltiplicare per 10 i coefficienti di $d\theta$.

15. Le 66 equazioni ottenute sostituendo nella formula tipica i valori di A e di 10 B furono trattate col metodo dei minimi quadrati; dando a tutte le osservazioni il peso 1, le equazioni normali risultanti furono

$$\begin{aligned}
+113^\circ,35 &= +66,000 . d\rho - 5,064 . d\lambda + 18,090\, d\Theta \\
-42,17 &= -5,064 . d\rho + 39,815 . d\lambda - 3,975\, d\Theta \\
+30,55 &= +18,090 . d\rho - 3,975 . d\lambda + 56,016\, d\Theta
\end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$\begin{aligned}
d\rho &= +1^\circ,6667 \quad \text{col peso} \quad 59,796: \\
d\lambda &= -0^\circ,8525 \quad \text{col peso} \quad 39,295: \\
d\Theta &= -0^\circ,0534 \quad \text{col peso} \quad 50,880.
\end{aligned}$$

16. Questi valori, surrogati nelle equazioni di condizione, lasciano gli errori residui contenuti nell'ultima colonna, segnata ε, del quadro già più volte citato, che è il seguente. In esso tutte le osservazioni e i correlativi numeri stanno ordinati non già secondo la data, ma secondo i valori corrispondenti della longitudine areografica ω del centro del disco.

[1] Si potrebbe conservare il termine in $d\delta$ esprimendo le altre incognite in funzione della medesima: ottenuto (come faremo) il $d\delta$ per altra via, si potrebbe così dare ai valori di dp, di $d\lambda$ e di $d\theta$ maggior rigore. Ma ciò potrebbe forse parere pura affettazione di esattezza, specialmente a chi consideri i procedimenti assai più semplici del nostro, con cui Oudemans (*Astr. Nachr.* n. 838), Kaiser (*Leydener Beobb.* Vol. III, p. 84) e Hall (*Astr. Nachr.* n. 2174) credettero (e non a torto) di bastare alla soluzione di questo problema. I loro calcoli suppongono che si abbia $\Pi = \lambda \sin t$, ciò che è vero soltanto a un dipresso, ed equivale a supporre $\delta = 90^\circ$.

Quadro

contenente le osservazioni di posizione della macchia nevosa ed i risultati dei calcoli corrispondenti a ciascuna.

Data e tempo siderale 1877.			ω	P osservato	dP	A	10 B	ε
Ottobre	4	20h 8m	12°47	164°70	+3°58	—0.372	—1.343	+1°52
	2	19. 0	16. 09	165. 39	+3. 72	—0.297	—1.369	+1. 73
	1	19. 0	26. 10	164. 81	+1. 85	—0.080	—1.417	+0. 04
	2	19.55	29. 45	167. 11	+3. 65	—0.009	—1.420	+1. 90
	1	20.15	44. 33	166. 69	+1. 19	+0.304	—1.362	—0. 29
	2	21.52	57. 90	169. 07	+1. 78	+0.406	—1.223	+0. 39
Settembre	30	21.10	67. 70	168. 90	+0. 56	+0.736	—1.072	—0. 54
	30	21.41	75. 24	169. 37	+0. 27	+0.844	—0.934	—0. 73
	26	19.28	82. 83	170. 69	+1. 20	+0.933	—0.779	+0. 29
	25	19.15	89. 61	169. 97	+0. 11	+0.997	—0.632	—0. 74
	26	20. 0	90. 62	171. 11	+1. 08	+1.006	—0.609	+0. 24
	24	18.55	94. 68	170. 17	+0. 10	+1.033	—0.518	—0. 71
	30	23.10	96. 88	170. 73	—0. 90	+1.049	—0.466	—1. 70
	25	20. 6	102. 02	170. 74	+0. 24	+1.073	—0.348	—0. 53
	25	20.43	111. 02	171. 51	+1. 20	+1.095	—0.137	+0. 46
	24	20.38	119. 73	171. 37	+0. 73	+1.090	+0.064	±0. 00
	22	19.55	129. 07	170. 70	+0. 45	+1.057	+0.266	—0. 30
	24	21.29	132. 14	172. 14	+1. 75	+1.038	+0.362	+0. 99
	20	18.54	133. 97	169. 52	—0. 32	+1.028	+0.377	—1. 09
	22	20.43	140. 74	171. 52	+1. 73	+0.983	+0.517	+0. 93
	20	19.28	142. 24	169. 67	+0. 22	+0.969	+0.546	—0. 59
	18	19.28	162. 00	168. 79	+1. 01	+0.759	+0.892	+0. 04
	20	20.50	162. 18	170. 17	+2. 17	+0.757	+0.895	+1. 20
	25	0.16	162. 82	168. 04	—0. 48	+0.753	+0.911	—1. 46
	20	21.30	171. 91	169. 17	+2. 10	+0.625	+1.028	+1. 02
	18	21.13	187. 54	166. 86	+1. 77	+0.383	+1.184	+0. 49
	16	20.24	195. 30	164. 74	+0. 86	+0.253	+1.232	—0. 52
	18	21.50	196. 53	166. 91	+2. 91	+0.233	+1.239	+1. 51
	20	23.23	199. 39	166. 02	+2. 14	+0.183	+1.249	+0. 70
	14	19.25	200. 59	161. 25	—1. 60	+0.156	+1.252	—3. 07
	16	20.55	202. 84	164. 67	+1. 73	+0.124	+1.259	+0. 24
	14	19.35	203. 02	162. 85	+0. 25	+0.109	+1.260	—1. 25
	20	23.45	204. 74	165. 24	+2. 03	+0.091	+1.263	+0. 51
	14	20.10	211. 54	162. 15	+0. 63	—0.021	+1.266	—0. 99
	16	21.40	213. 79	162. 80	+1. 22	—0.062	+1.265	—0. 43
	16	22. 2	219. 14	162. 07	+1. 19	—0.158	+1.253	—0. 54
	14	20.49	221. 03	161. 40	—1. 02	—0.180	+1.248	—0. 73
	20	0.55	221. 76	165. 70	+4. 64	—0.204	+1.246	+2. 87
	14	21.25	229. 79	162. 05	+2. 80	—0.336	+1.196	+0. 91
	20	1.40	232. 71	162. 94	+3. 22	—0.388	+1.183	+1. 29
	16	21.55	237. 08	160. 62	+2. 24	—0.457	+1.143	+0. 24
	16	23.15	237. 13	161. 90	+3. 20	—0.458	+1.143	+1. 20
	20	2.25	243. 64	161. 77	+3. 29	—0.560	+1.080	+0. 80
	14	22.38	247. 54	160. 15	+2. 92	—0.616	+1.034	+0. 78
	13	22. 0	247. 61	158. 55	+1. 47	—0.617	+1.032	—0. 67
	16	0. 0	247. 84	162. 87	+5. 33	—0.620	+1.030	+3. 19

Settembre	14	23^h10^m	$255^0 33$	$158^0 25$	$+1^0 77$	—0.722	+0.927	—0. 46
	12	22.20	262. 32	156. 38	+0. 82	—0.811	+0.820	—1. 49
	13	23.15	265. 86	157. 22	+1. 69	—0.851	+0.763	—0. 66
	12	22.52	270. 11	156. 03	+1. 09	—0.898	+0.688	—1. 31
Ottobre	13	19.29	271. 87	158. 47	+1. 74	—0.923	+0.669	—0. 68
	12	19.27	281. 56	157. 50	+1. 26	—1.007	+0.479	—1. 24
Settembre	12	23.54	285. 19	156. 13	+1. 99	—1.022	+0.392	—0. 53
Ottobre	10	19. 0	295. 58	156. 65	+0. 87	—1.084	+0.176	—1. 71
	12	20.33	297. 60	158. 35	+1. 86	—1.092	+0.130	—0. 73
	10	19.14	298. 98	157. 38	+1. 55	—1.094	+0.098	—1. 04
	11	20. 4	300. 72	158. 85	+3. 13	—1.099	+0.058	+0. 53
	12	21.29	311. 21	159. 38	+3. 60	—1.102	—0.187	+0. 98
	11	20.50	311. 90	159. 70	+3. 90	—1.100	—0.204	+1. 28
	13	22.25	314. 64	158. 95	+3. 15	—1.095	—0.268	+0. 54
	11	21. 3	315. 06	158. 47	+2. 60	—1.092	—0.278	—0. 01
	10	20.25	316. 23	158. 90	+2. 90	—1.088	—0.306	+0. 29
	10	20.58	324. 25	158. 55	+2. 22	—1.050	—0.494	—0. 37
	13	23.30	330. 43	157. 33	+0. 74	—1.008	—0.636	—1. 82
	10	22.20	344. 18	160. 45	+2. 64	—0.841	—0.930	+0. 21
Ottobre	4	18.50	353. 51	160. 37	+1. 58	—0.718	—1.093	—0. 76

17. L' error probabile di uno dei valori osservati di P risulta di $\pm 0°,768$: quelli di dp, $d\lambda$ $d\Theta$ sono rispettivamente $\pm$ 0°,0994, $\pm$ 0°,1226, $\pm$ 0°,1077. Combinando le correzioni $d\theta = 10\, d\Theta$ e $d\lambda$ coi valori supposti qui sopra per θ e per λ si ottengono i valori corretti delle coordinate della macchia nevosa,

$$\theta_0 = 30° + 10\, d\Theta = 29°, 466 \pm 1°, 077;$$
$$\lambda_0 = 7 + d\lambda = 6°, 147 \pm 0, 1226;$$

dove la longitudine si suppone numerata dalla medesima origine, che i valori ω del quadro precedente; di essa più tardi si determinerà la posizione rispetto alle macchie fisse del pianeta. Inoltre, poichè l'effemeride del sig. Marth dà per il 27 settembre a 0^h di Greenwich $p = 163°, 23$, avremo per questa data, la quale assai prossimamente corrisponde al medio di tutte le osservazioni, il valore corretto della posizione della metà australe dell' asse di Marte veduta dalla Terra,

$$p_0 = 163°, 23 + dp = 164°. 90 \pm 0°, 0994.$$

Per questo istante il luogo geocentrico di Marte dato dal *Nautical Almanac* essendo

$$\alpha = 22^h. 49^m. 31^s \quad \delta = -12°. 41'. 3'',$$

il valore di p_0 sopradetto determinerà per questo punto un circolo massimo della sfera celeste, sopra il quale deve trovarsi il punto P′ della fig. 4, cioè la traccia della parte boreale dell' asse del pianeta, supposta indefinitamente prolungata.

18. Il grado di esattezza indicato per p_0 dal suo errore probabile $\pm$ 0°, 0994 non sarà forse raggiunto in realtà, e ciò a cagione degli errori individuali costanti inevitabili in un processo così delicato, come quello che ha servito alla determinazione delle posizioni P. Soltanto la combinazione di analoghi risultati ottenuti in diverse opposizioni di Marte potrà eliminare l'effetto di tali errori individuali. Al contrario i valori di $d\theta$ e di $d\lambda$ risultando esclusivamente da differenze degli angoli

di posizione, sembra che, data l'assoluta stabilità del centro della massa nevosa, non vi dovrebbe esser ragione di diffidare degli errori probabili qui sopra assegnati per le sue coordinate. Adottando il diametro polare di Marte assegnato da Kaiser ($9'',387$ alla distanza 1) e supponendo $8''80$ per la parallasse orizzontale equatoriale del Sole, un grado di circolo massimo sul globo di Marte equivarrà a $0°,533$ dell'equatore terrestre, o a circa 32 miglia italiane, o a chilometri 59. L'error probabile del luogo ottenuto per la macchia nevosa sarebbe dunque

nel senso del meridiano $59 \times 0,1226 = 7,13$ chilometri:

nel senso del parallelo $59 \times 1,077 \times \sin\lambda = 6,80$ chilometri.

Questa stima d'esattezza è tuttavia probabilmente esagerata, perchè la calotta nevosa di Marte durante le osservazioni ha cambiato notevolmente di grandezza e di forma, come più innanzi sarà dichiarato; questo indica inevitabilmente piccoli spostamenti del punto che l'osservatore ha dovuto considerare come centro dell'area splendente. Nè è lontana dalla probabilità la supposizione di qualche movimento di tutta la massa. Esaminando infatti la serie degli errori residui ε, si trovano certe persistenze di segno, che difficilmente possono provenire da una causa diversa da quelle or ora indicate.

19. Come vedemmo, gli angoli di posizione della macchia polare non possono dare, in una opposizione sola del pianeta, la compiuta determinazione del suo asse. Nella speranza di poter giungere ad un soddisfacente risultato, per ottenere anche il valore di $d\delta$, ebbi ricorso ad un altro genere di osservazioni diverso da quello finora considerato. Sia P (fig. 6) il polo australe del pianeta, PN la projezione del meridiano centrale, MQT il parallelo percorso durante la rotazione da una macchia non molto lontana dall'equatore. È manifesto, che se, stando la macchia nel punto M qualunque del suo corso diurno, s'immagina abbassata da essa sul piano diametrale NS la perpendicolare MI, le variazioni di luogo del punto I nelle diverse positure di M a parità di circostanze saranno tanto maggiori, quanto sarà più piccola l'inclinazione δ dell'asse sulla linea visuale. Scegliendo opportunamente la macchia da osservare si potrà ottenere, che il valore di δ influisca con quasi tutta la sua grandezza sulla variazione della distanza OI; ed inversamente fare che le misure di OI, eseguite in posizioni molto diverse del punto M, somministrino una determinazione abbastanza vantaggiosa di δ.

20. Essendo τ l'angolo sferico MPQ, σ la distanza polare PM $=$ PQ della macchia, ρ il raggio del disco, e chiamando, come al solito, δ l'arco PO: avremo

$$\frac{\mathrm{OI}}{\rho} = \cos\sigma \sin\delta - \cos\tau \,.\, \sin\sigma \cos\delta$$

ovvero, posto $\cos\sigma \sin\delta = x$, $\sin\sigma \cos\delta = y$,

$$\frac{\mathrm{OI}}{\rho} = x - y \cos\tau. \qquad (b)$$

Ogni misura di OI darà dunque un'equazione fra x ed y. Avuti i quali, σ e δ si otterranno dalle

$$\sin(\delta + \sigma) = x + y, \qquad \sin(\delta - \sigma) = x - y.$$

Onde tradurre in effetto quest'idea, scelsi come oggetto d'osservazione quella cospicua macchia oscura di Marte che fu già designata da Maedler e da Kaiser colla lettera d,

che è nominata *Mare di Lockyer* sulla carta di Proctor, e sulla nostra *Lago del Sole.* Essa è quasi esattamente rotonda; per la sua nerezza si può facilmente osservare anche presso gli orli del disco; ed è molto adatta al nostro scopo per la sua non grande distanza dall'equatore del pianeta. Il suo diametro apparente essendo di circa 2″ nel tempo delle osservazioni, si poteva intersecarla molto bene coi fili. L'osservazione si faceva nel seguente modo (fig. 7). Disposto il filo trasversale del micrometro press' a poco parallelamente al diametro KR passante pel centro della macchia nevosa, si misuravano cogli altri fili ad esso perpendicolari le due distanze KU, RU della corda MH dai punti K, R: la semidifferenza delle quali dava immediatamente la distanza UO di detta corda dal centro del disco.

21. Sia ora P il luogo del polo australe, NS il meridiano centrale nell'istante dell'osservazione: abbassando da M la perpendicolare MI, il problema è di dedurre OI dalla distanza misurata OU. Detto Π l'angolo ROP (che è somministrato direttamente dalle osservazioni combinate colla direzione ora ben conosciuta di PN) sarà $OV = OU \sec\Pi$, $IV = MI \operatorname{tang}\Pi$, quindi

$$\frac{OI}{\rho} = \frac{OU}{\rho}\sec\Pi - \frac{MI}{\rho}\operatorname{tang}\Pi ,$$

o, a cagione di $MI = \rho\sin\tau\sin\sigma$,

$$\frac{OI}{\rho} = \frac{OU}{\rho}\sec\Pi - \sin\tau\sin\sigma\operatorname{tang}\Pi .$$

Posto ora $OU = \mu$, abbiamo dall'equazione (b) qui sopra

$$x - y\cos\tau = \frac{\mu}{\rho}\sec\Pi - \sin\tau\sin\sigma\operatorname{tang}\Pi$$

ossia

$$\cos\sigma\sin\delta - \sin\sigma\cos\delta\cos\tau + \sin\sigma\operatorname{tang}\Pi\sin\tau = \frac{\mu}{\rho}\sec\Pi . \qquad (b')$$

Ogni osservazione di OU o di μ darà un'equazione simile a questa fra le incognite σ e δ. Onde ridurle a miglior forma, poniamo

$$\delta + \sigma = 2\alpha . \qquad \delta - \sigma = 2\beta :$$

avremo

$$2\cos\sigma\sin\delta = \sin 2\alpha + \sin 2\beta , \quad 2\sin\sigma\cos\delta = \sin 2\alpha - \sin 2\beta , \quad \sin\sigma = \sin(\alpha - \beta) ,$$

e la (b') diventerà

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \cos\tau(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + 2\sin(\alpha - \beta)\operatorname{tang}\Pi\sin\tau = \frac{2\mu}{\rho}\sec\Pi$$

o moltiplicando per $\cos\Pi$, e facendo qualche riduzione,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi . \sin 2\alpha + \cos^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi\sin 2\beta + \sin(\alpha - \beta)\sin\Pi\sin\tau = \frac{\mu}{\rho} .$$

Differenziando ora per ottenere le variazioni di μ in funzione di quelle di α e di β, si ha

$$\begin{aligned} d\mu = \rho d\alpha & \left\{ 2\cos 2\alpha\sin^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi + \cos(\alpha - \beta)\sin\tau\sin\Pi \right\} \\ + \rho d\beta & \left\{ 2\cos 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\tau\cos\Pi - \cos(\alpha - \beta)\sin\tau\sin\Pi \right\} \end{aligned} \qquad (c)$$

Partendo da valori approssimati di α e di β (ossia di σ e di δ) si ricaveranno per determinare le correzioni di queste quantità tante equazioni di condizione, quante sono le misure eseguite della quantità μ.

22. A cagione del cattivo tempo e di altri impedimenti non si poterono fare che sei misure della quantità μ. I risultati delle medesime, e gli elementi corrispondenti di riduzione stanno nella tavoletta seguente. Le quattro prime colonne non han bisogno di spiegazione. Nella quinta gli angoli τ sono stati calcolati sottraendo dalla longitudine areografica del centro (cioè da ω) la longitudine del centro del Lago del Sole, che fu supposta di 90°, 18 rispetto alla origine stessa, da cui si sono contati gli ω. La colonna P dà la posizione indicata dal micrometro pel filo KR durante l'operazione. La colonna p dà la posizione dell'asse di Marte, cioè della linea NPS, apportandovi la correzione già da noi precedentemente determinata, + 1°, 67. La differenza $P - p$ dà gli angoli Π della penultima colonna. Nell'ultima finalmente stanno gli angoli δ quali risultano dall'effemeride di Marth.

Data e tempo siderale 1877	μ	ρ	ω	τ	P	p	Π	δ
sett. 22. 20h,52m	+2″,822	11″,565	142°,93	+52°,75	171°,52	164°,45	+7°,07	66°,79
sett. 24. 19, 5	+0, 384	11, 400	97, 11	+ 6, 93	170, 17	164, 67	+5, 50	66, 67
sett. 25. 19, 26	+0, 734	11, 312	92, 29	+ 2, 11	169, 97	164, 77	+5, 20	66, 60
sett. 26. 20, 3	+0, 168	11, 224	91, 35	+ 1, 17	170, 69	164, 85	+5, 84	66, 53
sett. 30. 22, 48	+0, 099	10, 843	91, 52	+ 1, 34	169, 37	165, 11	+4, 26	66, 26
ott. 1. 19, 52	+2, 489	10, 756	38, 74	−61, 44	164, 81	165, 16	−0, 35	66, 18

23. Partendo dagli angoli δ anzi riferiti e ponendo provvisoriamente $\sigma = 65°$, il calcolo delle equazioni analoghe a (c) di cui stimo inutile riferire qui tutti i particolari, diede finalmente

$$\begin{aligned}
-0'',184 &= +\ \ 7,700\, d\delta - 10,238\, d\sigma \\
-0,\ 095 &= + 11,273\, d\delta - 11,273\, d\sigma \\
+0,\ 418 &= + 11,312\, d\delta - 11,312\, d\sigma \\
-0,\ 132 &= + 11,224\, d\delta - 11,224\, d\sigma \\
-0,\ 134 &= + 10,843\, d\delta - 10,843\, d\sigma \\
+0,\ 159 &= +\ \ 6,100\, d\delta -\ \ 9,771\, d\sigma
\end{aligned}$$

I valori di $d\delta$ e di $d\sigma$ che risultano da queste equazioni, risolute col metodo dei minimi quadrati, sono, ridotti in gradi e decimali di grado,

$$\begin{aligned}
d\delta &= -\,0°,\,364 \pm 2°,\,67 \\
d\sigma &= -\,0°,\,365 \pm 2°,\,46:
\end{aligned}$$

molto inferiori, come si vede, ai loro valori probabili, e non hanno che pochissimo peso. I forti errori ± 2°, 67 e ± 2°, 46 sono dovuti al numero affatto insufficiente delle misure, delle quali quattro corrispondono alla posizione centrale della macchia e due sole furono fatte presso i lembi, cioè la prima e l'ultima. Si vede però, che accrescendo sufficientemente il numero delle misure, la determinazione di $d\delta$, e

quindi la completa determinazione dell'asse di Marte può anche ottenersi con questo metodo. L'error probabile di un μ misurato risulta qui $\pm 0'' 177$, ciò che fa $\pm 0°, 94$ di circolo massimo, quando si assuma per raggio del disco di Marte il medio dei valori di ρ corrispondenti alle fatte osservazioni, vale a dire $10'', 177$. Tale è quindi l'errore che si può aspettare nelle misure micrometriche di questo genere; e si vede come col ripeterle su di una medesima macchia più volte sia possibile ottenere la sua posizione entro una frazione di grado di circolo massimo del pianeta.

24. Non avendo dunque potuto, per cause da me indipendenti, ottenere una correzione di δ per esattezza comparabile alla correzione che si è avuto per p, converrà attendere la prossima opposizione del 1879. Intanto ho calcolato le mie misure e determinazioni areografiche coi valori di δ dati dal sig. Marth nella sua effemeride, e che dipendono dalla posizione dell'asse stabilita dal sig. Oudemans. L'effetto di un errore mediocre di δ sulle posizioni dei punti che si voglion determinare sulla superficie del pianeta è affatto insensibile per le longitudini areografiche, come l'esposizione del metodo usato dimostrerà. Invece esso pesa tutto intero sulle latitudini areografiche; ma l'errore prodotto è per tutti i punti determinati una quantità costante, di cui nel 1879 si potrà facilmente definire il valore.

Capitolo II.

Determinazione del luogo areografico dei punti fondamentali e costruzione della carta.

Sezione I.

Osservazioni e loro riduzione.

25. Le carte finora pubblicate della superficie di Marte sono fondate quasi esclusivamente sopra disegni fatti a vista d'occhio. Che con questo modo si possa raggiungere un certo grado d'approssimazione, lo ha provato Kaiser nella sua eccellente Memoria su Marte inserita nel Tomo III delle *Osservazioni di Leyda*, pag. 52 e segg. Non posso tuttavia sottoscrivere all'opinione di quell'illustre astronomo, che siano impossibili misure micrometriche sulle macchie di Marte (pag. 54 dell'opera citata). L'investigazione fatta poc'anzi sul valore di δ e sulla latitudine del Lago del Sole ha mostrato, che anche in condizioni non tutte favorevoli si può giungere, con una osservazione isolata, a determinare la distanza di una macchia dal centro con l'error probabile di circa un grado di circolo massimo del pianeta, almeno finchè questo ha un diametro apparente non minore di $20''$ (§ 23). Ed anche quando l'inesattezza fosse maggiore, si può sempre diminuirla quasi a piacere, facendo sulla stessa macchia molte osservazioni. Le prove ch' io ho fatto mi danno speranza, che fra non molti anni si conosceranno le posizioni areocentriche di molti punti di Marte con errore minore di un grado. Ma per giungere a questo scopo conviene non lasciarsi spaventare dall' apparente inesattezza dei risultati ottenuti, ed è necessario sopratutto calcolare le misure con intiero rigore, affinchè non rimangano nei risultati altri errori, che quelli inevitabili delle osservazioni. Non è lecito per esempio, nel formare la carta, supporre che la calotta nevosa occupi col suo centro esattamente il luogo del polo.

26. Volendo fondare la topografia di Marte su basi esatte, conviene seguire lo stesso principio, che si usa per la topografia terrestre. Un certo numero di punti distinti e facili a riconoscere, distribuiti colla maggior possibile uniformità su tutta la superficie del pianeta, si prende come rete fondamentale, e si cerca di ottenerne la posizione colla massima esattezza. Fra questi poi s'interpolano le linee del tracciamento ed i minuti particolari a semplice estimazione d'occhio. La composizione, la misura, il calcolo di una tal rete, e la formazione di un catalogo di latitudini e di longitudini areografiche è il secondo problema che si presenta nella descrizione geometrica di Marte.

27. La determinazione del luogo areografico di un punto della superficie si ottiene in modo semplicissimo notando il tempo, in cui quel punto traversa in L (fig. 8) il meridiano centrale, e misurando in quell'istante col micrometro la distanza $LO = \mu$ che lo separa dal centro del disco. Essendo infatti per quel momento ω la longitudine areografica del centro del disco, sarà ancora ω la longitudine cercata del punto considerato, ogni volta che si adoperi per zero delle longitudini la stessa

origine arbitraria, che ha servito a computare gli ω. Chiamando poi (come sempre si è fatto) δ la distanza polare del centro del disco (cioè l'arco che si projetta in PO) e σ la distanza del punto dato dal polo australe, avremo manifestamente arco $LO = \delta - \sigma$; e fatto il raggio del disco $= \rho$,

$$\frac{\mu}{\rho} = \sin(\delta - \sigma) \qquad (d)$$

con che si otterrà σ conoscendo δ. Il segno di μ supponiamo positivo quando L sta al di sopra del centro O, e negativo nel caso contrario. Qui è manifesto, che se δ è affetto da un errore costante ε, i σ così calcolati conterranno l'errore costante $-\varepsilon$, e le latitudini areografiche saranno pure affette dal medesimo errore.

28. L'istante del passaggio in L, e la misura di $LO = \mu$ non si possono ottenere direttamente coll'osservazione, nulla indicando sul disco del pianeta la direzione del diametro SPN. Se si potesse stabilire i fili di posizione nell'esatto parallelismo col diametro RK che passa pel centro R della macchia nevosa, sarebbe facile, osservando il passaggio in M del punto da determinarsi, e misurando la distanza MO, concluderne il passaggio per L e la distanza LO. Ma in pratica non è possibile assicurarsi del parallelismo suddetto senza perdere molto tempo: perchè la direzione OR varia ad ogni momento colla rotazione della macchia R intorno all'asse del pianeta. Io mi sono contentato quindi di stabilire questo parallelismo in modo approssimato, riservandomi di correggere col calcolo il piccolo errore che deriva dalla non completa esattezza del medesimo. Poniamo che RZ indichi la direzione prossimamente parallela a RK. Il passaggio del punto da determinare si stimava avvenuto, quando collocato questo punto e la macchia nevosa in mezzo ai fili di posizione, la linea fra loro condotta sembrava esattamente parallela a questi fili. Il punto a determinare stava allora manifestamente in I. Così dunque il passaggio realmente era osservato quando il punto stava in I sulla linea RZ; e la distanza dal centro era contemporaneamente IX compresa fra I e OX perpendicolare abbassata da O sopra RZ. Gli angoli ROS, ORZ essendo molto piccoli, la misura della distanza LO non domanderà alcuna correzione percettibile dipendente dalla sostituzione di IX a LO: ma il passaggio dovrà esser corretto per la sostituzione del punto I osservato al punto L, che realmente si doveva osservare.

29. Indichiamo come sopra con p l'angolo di posizione del meridiano centrale NS: con Π l'angolo ROS, eccesso della posizione della macchia nevosa su quella del polo australe: con π l'angolo di posizione della linea RZ, il quale si legge sul circolo del micrometro. Noi avremo

$$\text{posizione di RK} = p + \Pi:$$
$$\text{angolo ORX} = \pi - (p + \Pi):$$

il qual angolo, che è l'errore di collocazione del micrometro, chiameremo ε. Esso si potrà facilmente ottenere, perchè π è dato dal micrometro, p si ha dall'effemeride (corretta di $+1°,67$) di Marth, e Π si può agevolmente calcolare nel modo indicato al § 12 impiegando per la macchia nevosa le coordinate λ e θ corrette col calcolo del capitolo precedente. Ciò posto è chiaro, che si ha con sufficiente esattezza

$$ML = \mu \sin\Pi,$$
$$MI = RM \sin\varepsilon = (RO - MO)\sin\varepsilon = (\rho\sin\delta - \mu)\sin\varepsilon,$$

potendosi fare senza grave errore $RO = \rho \sin \delta$. Ne ricaviamo

$$IL = ML - MI = \mu \sin \Pi - \rho \sin \delta \sin \varepsilon + \mu \sin \varepsilon$$

od ancora senza error sensibile

$$IL = \mu \sin (\Pi + \varepsilon) - \rho \sin \delta \sin \varepsilon :$$

e poichè per definizione $\varepsilon = \pi - p - \Pi$, $\Pi + \varepsilon = \pi - p$, nasce

$$IL = \mu \sin (\pi - p) - \rho \sin \delta \sin \varepsilon .$$

Dividendo per $\rho \sin \sigma$, che è il raggio apparente del parallelo descritto dal punto che si vuol determinare, e moltiplicando per $57°, 296$ si otterrà finalmente in gradi la correzione della longitudine, cioè la quantità da sottrarsi [1] dalla longitudine di L (che è ω) per avere la longitudine cercata del punto I ossia θ:

$$\theta = \omega - \frac{57°,296}{\sin \sigma} \left\{ \frac{\mu}{\rho} \sin (\pi - p) - \sin \delta \sin \varepsilon \right\} . \qquad (e)$$

30. I punti fondamentali da me scelti per l'applicazione di questo procedimento sono in numero di 62 e si possono riscontrare facilmente sulla carta principale unita a questa Memoria, dove stanno segnati ciascuno col proprio numero corrispondente a quello del catalogo che ne daremo più sotto. Non tutti sono definiti con egual precisione, e non tutti sono egualmente opportuni per esatte misure: nella strettezza del tempo e nella quasi totale novità degli oggetti che era costretto a misurare prima ancora di conoscerne bene la relazione cogli oggetti conosciuti e figurati sulle carte anteriori, io ho dovuto procedere in questa scelta molto sommariamente, e prendere ogni volta ciò che di meglio determinato si presentava al meridiano centrale in momenti di buona atmosfera senza cercare se punti più adatti potessero pigliarsi qualche mezz'ora prima o qualche mezz'ora dopo. La descrizione che qui sotto sarà data di ciascuno di essi indicherà senza ambiguità il significato delle osservazioni fatte. Per ciascuno è stato osservato almeno una volta il valore di ω e di μ: e per molti di essi parecchie volte in giorni differenti. Tutte queste osservazioni stanno disposte per ordine nelle prime colonne del quadro qui appresso. Seguono nelle altre i valori delle quantità $\frac{\mu}{\rho}, \Pi, p, \pi, \varepsilon$, della correzione totale, e dei valori di σ e di θ dedotti per ciascuna osservazione dalle formule (*d*) (*e*). Da ultimo sta sotto il titolo ΔT la quantità

$$- \frac{57°,296}{\sin \sigma} \left\{ \frac{\mu}{\rho} \sin (\pi - p) - \sin \delta \sin \varepsilon \right\}$$

ridotta in tempo, cioè l'intervallo siderale, di cui il passaggio di ogni punto in L ha preceduto quello dello stesso punto in I; e finalmente sotto la rubrica T il tempo siderale di Milano del passaggio effettivo dei punti osservati al meridiano centrale NS, corretto dell'aberrazione. I dati di quest'ultima colonna serviranno più tardi a calcolare con maggior esattezza la durata della rotazione di Marte. L'error probabile di ciascuno dei tempi T non essendo (come sotto si vedrà) maggiore di $7^m, 3$, in capo a pochi decennî si potrà da una ripetizione di osservazioni simili a queste ottenere la rotazione di Marte con un grado di precisione molto notabile, senza aver più bisogno di ricorrere alle dubbiose delineazioni di Hooke e di Huygens.

[1] Si noti che le longitudini crescono, sul disco di Marte, da M verso L, secondo le fatte convenzioni.

Calcolo delle posizioni ar

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	Π
1	Vertice d'Aryn	Ott. 4. $19^h.25^m$	2°,02	—0,333	85°,44	—3°,2
2	Secondo corno del Golfo Sabeo . . .	Ott. 4. 19. 41	5, 91	—0,444	92, 37	—2, 8
3	Terra di Deucalione, istmo	Ott. 2. 18. 58	15, 60	—0,444	92, 52	—1, 7
	id.	Ott. 4. 20. 18	14, 90	. . . . .	. . . .	—1, 8
4	Terra di Deucalione, ombra	Ott. 2. 18. 58	15, 60	. . . . .	. . . .	—1, 7
	id.	Ott. 4. 20. 18	14, 90	—0,333	85, 44	—1, 8
5	Golfo delle Perle, bocca dell'Indo . .	Ott. 1. 19. 8	28, 04	—0,444	92, 60	—0, 2
	id.	Ott. 2. 19. 21	21, 19	—0,500	96, 12	—1, 0
	id.	Ott. 4. 20. 29	17, 57	—0,500	95, 97	—1, 5
6	Bocca dell'Idaspe	Ott. 2. 19. 40	25, 81	—0,333	85, 59	—0, 5
7	Capo degli Aromi	Ott. 1. 20. 0	40, 69	—0,250	80, 68	+1, 2
	id.	Ott. 2. 20. 14	34, 07	—0,286	82, 72	+0, 5
8	Capo delle Ore in Argyre	Ott. 1. 20. 0	40, 69	+0,250	51, 72	+1, 2
	id.	Ott. 2. 20. 32	38, 45	+0,286	49, 52	+1, 0
9	Capo delle Grazie in Argyre	Ott. 1. 21. 0	55, 28	+0,500	36, 20	+3, 0
	id.	Ott. 2. 21. 30	52, 55	+0,500	36, 12	+2, 6
10	Golfo dell'Aurora, bocca del Gange . .	Ott. 1. 21. 5	56, 49	—0,333	85, 67	+3, 1
	id.	Ott. 2. 21. 35	53, 77	—0,400	89, 70	+2, 8
11	Punta dell'Aurea Cherso	Ott. 1. 21. 18	59, 66	—0,047	68, 73	+3, 5
	id.	Ott. 2. 22. 14	63, 24	+0,094	60, 74	+3, 8
12	Primo punto di Thaumasia	Sett. 30. 21. 15	68, 92	+0,000	66, 28	+4, 4
	id.	Ott. 1. 21. 33	63, 30	+0,060	66, 20	+3, 8
	id.	Ott. 2. 22. 28	66, 64	+0,000	66, 16	+4, 1
13	Confluente del Chrysorroas col Nilo .	Nov. 4. 21. 30	73, 83	—0,714	108, 88	+4, 9
14	Lago del Sole, centro	Sett. 25. 19. 11	88, 64	+0,065	62, 90	+5, 8
	id.	Sett. 26. 19. 59	90, 37	+0,015	65, 70	+5, 9
	id.	Sett. 30. 22. 48	91, 52	+0,009	65, 75	+6, 0
15	Lago della Fenice, centro	Sett. 24. 19. 33	103, 92	—0,088	71, 72	+6, 4
	id.	Sett. 25. 20. 22	105, 91	—0,049	69, 44	+6, 5
16	Bocca del Fasi	Sett. 24. 20. 0	110, 49	+0,400	43, 11	+6, 6
	id.	Sett. 25. 20. 33	108, 59	+0,333	47, 14	+6, 6

fondamentali.

-ll	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
°,96	160°,30	—1°,66	—3°,09	358°,93	—4^{m}	—13^{m}	Ott. 4. 19^{h}. 8^{m}
, 37	160, 30	—2, 07	—3, 44	2, 47	—4	—14	Ott. 4. 19. 23
, 42	165, 54	+2, 12	+2, 00	17, 60	—4	+ 8	Ott. 2. 19. 2
, 42	164, 80	+1, 38	+1, 01	15, 91	—4	+ 4	Ott. 4. 20. 18
. 42	165, 54	+2, 12	+1, 96	17, 56	—4	+ 8	Ott. 2. 19. 2
. 42	164, 80	+1, 38	+1, 06	15, 96	—4	+ 4	Ott. 4. 20. 18
. 92	164, 54	—0, 38	—0, 60	27, 44	—4	— 2	Ott. 1. 19. 2
, 19	165, 24	+1, 05	+0, 93	21, 82	—4	+ 4	Ott. 2. 19. 21
71	164, 80	+1, 09	+0, 73	18, 30	—4	+ 3	Ott. 4. 20. 28
69	165, 24	+0, 55	+0, 50	26, 31	—4	+ 2	Ott. 2. 19. 38
43	164, 54	—1, 89	—1, 81	38, 88	—4	— 7	Ott. 1. 19. 49
69	167, 04	+1, 35	+1, 72	35, 79	—4	+ 7	Ott. 2. 20. 17
43	164, 54	—1, 89	—1, 97	38, 72	—4	— 8	Ott. 1. 19. 48
22	167, 04	+0, 82	+0, 25	38, 70	—4	+ 1	Ott. 2. 20. 29
19	166, 84	—1, 35	—3, 44	51, 84	—4	—14	Ott. 1. 20. 42
88	167, 04	—0, 84	—2, 81	49, 74	—4	—12	Ott. 2. 21. 14
28	166, 84	—1, 44	—0, 74	55, 75	—4	— 3	Ott. 1. 20. 58
06	167, 04	—1, 02	—0, 18	53, 59	—4	— 1	Ott. 2. 21. 30
66	166, 84	—1, 82	—1, 75	57, 91	—4	— 7	Ott. 1. 21. 7
03	169, 14	+0, 11	—0, 30	62, 94	—4	— 1	Ott. 2. 22. 9
51	168, 90	—0, 61	—0, 60	68, 32	—4	— 2	Sett. 30. 21. 9
03	166, 84	—2, 19	—2, 16	61, 14	—4	— 9	Ott. 1. 21. 20
38	169, 14	—0, 24	—0, 24	66, 40	—4	— 1	Ott. 2. 22. 23
97	170, 17	+3, 20	+9, 26	83, 09	—5	+38	Nov. 4. 22. 3
63	170, 74	+0, 11	—0, 32	88, 32	—3	— 1	Sett. 25. 19. 7
79	170, 14	—0, 65	—0, 74	89, 63	—3	— 3	Sett. 26. 19. 53
15	169, 20	—1, 95	—1, 97	89, 55	—4	— 8	Sett. 30. 22. 36
11	170, 27	—0, 84	—0, 31	103, 61	—3	— 1	Sett. 24. 19. 29
27	172, 14	+0, 87	+1, 25	107, 16	—3	+ 5	Sett. 25. 20. 24
33	170, 27	—1, 06	—4, 74	105, 75	—3	—19	Sett. 24. 19. 38
40	172, 14	+0, 74	—2, 61	105, 98	—3	—10	Sett 25. 20. 20

Calcolo delle posizioni areo[illegible]nti fondamentali.

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	η	[illegible]	$\rho+\eta$	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
1	Vertice d'Aryn	Ott. 4. 19h.25m	2°,02	—0,333	85°,44	—3°,28	[illegible]	161°,96	160°,30	—1°,66	—3°,09	358°,93	—4m	—13m	Ott. 4. 19h. 8m
2	Secondo corno del Golfo Sabeo . . .	Ott. 4. 19. 41	5, 91	—0,444	92, 37	—2, 87	[illegible]	162, 37	160, 30	—2, 07	—3, 44	2, 47	—4	—14	Ott. 4. 19. 23
3	Terra di Deucalione, istmo	Ott. 2. 18. 58	15, 60	—0,444	92, 52	—1, 77	[illegible]	163, 42	165, 54	+2, 12	+2, 00	17, 60	—4	+ 8	Ott. 2. 19. 2
	id.	Ott. 4. 20. 18	14, 90	. . . . .	. . . .	—1, 82	[illegible]	163, 42	164, 80	+1, 38	+1, 01	15, 91	—4	+ 4	Ott. 4. 20. 18
4	Terra di Deucalione, ombra	Ott. 2. 18. 58	15, 60	. . . . .	. . . .	—1, 77	[illegible]	163, 42	165, 54	+2, 12	+1, 96	17, 56	—4	+ 8	Ott. 2. 19. 2
	id.	Ott. 4. 20. 18	14, 90	—0,333	85, 44	—1, 82	[illegible]	163, 42	164, 80	+1, 38	+1, 06	15, 96	—4	+ 4	Ott. 4. 20. 18
5	Golfo delle Perle, bocca dell'Indo . .	Ott. 1. 19. 8	28, 04	—0,444	92, 60	—0, 24	[illegible]	164. 92	164, 54	—0, 38	—0, 60	27, 44	—4	— 2	Ott. 1. 19. 2
	id.	Ott. 2. 19. 21	21, 19	—0,500	96, 12	—1, 00	[illegible]	164, 19	165, 24	+1, 05	+0, 93	21, 82	—4	+ 4	Ott. 2. 19. 21
	id.	Ott. 4. 20. 29	17, 57	—0,500	95, 97	—1, 53	[illegible]	163, 71	164, 80	+1, 09	+0, 73	18, 30	—4	+ 3	Ott. 4. 20. 28
6	Bocca dell'Idaspe	Ott. 2. 19. 40	25, 81	—0,333	85, 59	—0, 50	[illegible]	164, 69	165, 24	+0, 55	+0, 50	26, 31	—4	+ 2	Ott. 2. 19. 38
7	Capo degli Aromi	Ott. 1. 20. 0	40, 69	—0,250	80, 68	+1, 27	[illegible]	166. 43	164, 54	—1, 89	—1, 81	38, 88	—4	— 7	Ott. 1. 19. 49
	id.	Ott. 2. 20. 14	34, 07	—0,286	82, 72	+0, 50	[illegible]	165. 69	167, 04	+1, 35	+1, 72	35, 79	—4	+ 7	Ott. 2. 20. 17
8	Capo delle Ore in Argyre	Ott. 1. 20. 0	40, 69	+0 250	51, 72	+1, 27	[illegible]	166. 43	164, 54	—1, 89	—1, 97	38, 72	—4	— 8	Ott. 1. 19. 48
	id.	Ott. 2. 20. 32	38, 45	+0,286	49, 52	+1, 03	[illegible]	166, 22	167, 04	+0, 82	+0, 25	38, 70	—4	+ 1	Ott. 2. 20. 29
9	Capo delle Grazie in Argyre	Ott. 1. 21. 0	55, 28	+0.500	36, 20	+3, 03	[illegible]	168, 19	166, 84	—1, 35	—3, 44	51, 84	—4	—14	Ott. 1. 20. 42
	id.	Ott. 2. 21. 30	52, 55	+0.500	36, 12	+2, 69	[illegible]	167, 88	167, 04	—0, 84	—2, 81	49, 74	—4	—12	Ott. 2. 21. 14
10	Golfo dell'Aurora, bocca del Gange . .	Ott. 1. 21. 5	56, 49	—0,333	85, 67	+3, 12	[illegible]	168, 28	166, 84	—1, 44	—0, 74	55, 75	—4	— 3	Ott. 1. 20. 58
	id.	Ott. 2. 21. 35	53, 77	—0,400	89, 70	+2, 87	[illegible]	168, 06	167, 04	—1, 02	—0, 18	53, 59	—4	— 1	Ott. 2. 21. 30
11	Punta dell'Aurea Cherso	Ott. 1. 21. 18	59, 66	—0,047	68, 73	+3, 50	[illegible]	168, 66	166, 84	—1, 82	—1, 75	57, 91	—4	— 7	Ott. 1. 21. 7
	id.	Ott. 2. 22. 14	63, 24	+0,094	60, 74	+3, 84	[illegible]	169, 03	169, 14	+0, 11	—0, 30	62, 94	—4	— 1	Ott. 2. 22. 9
12	Primo punto di Thaumasia	Sett. 30. 21. 15	68, 92	+0,000	66, 28	+4, 40	[illegible]	169, 51	168, 90	—0, 61	—0, 60	68, 32	—4	— 2	Sett. 30. 21. 9
	id.	Ott. 1. 21. 33	63, 30	+0,060	66, 20	+3, 87	[illegible]	169, 03	166, 84	—2, 19	—2, 16	61, 14	—4	— 9	Ott. 1. 21. 20
	id.	Ott. 2. 22. 28	66, 64	+0,000	66, 16	+4, 19	[illegible]	169, 38	169, 14	—0, 24	—0, 24	66, 40	—4	— 1	Ott. 2. 22. 23
13	Confluente del Chrysorroas col Nilo .	Nov. 4. 21. 30	73, 83	—0,714	108, 88	+4, 97	[illegible]	166, 97	170, 17	+3, 20	+9, 26	83, 09	—5	+38	Nov. 4. 22. 3
14	Lago del Sole, centro	Sett. 25. 19. 11	88, 64	+0,065	62, 90	+5, 86	[illegible]	170, 63	170, 74	+0, 11	—0, 32	88, 32	—3	— 1	Sett. 25. 19. 7
	id.	Sett. 26. 19. 59	90, 37	+0,015	65, 70	+5, 94	[illegible]	170, 79	170, 14	—0, 65	—0, 74	89, 63	—3	— 3	Sett. 26. 19. 53
	id.	Sett. 30. 22. 48	91, 52	+0,009	65, 75	+6, 04	[illegible]	171, 15	169, 20	—1, 95	—1, 97	89, 55	—4	— 8	Sett. 30. 22. 36
15	Lago della Fenice, centro	Sett. 24. 19. 33	103, 92	—0,088	71, 72	+6, 44	[illegible]	171, 11	170, 27	—0, 84	—0, 31	103, 61	—3	— 1	Sett. 24. 19. 29
	id.	Sett. 25. 20. 22	105, 91	—0,049	69, 44	+6, 50	[illegible]	171, 27	172. 14	+0, 87	+1, 25	107, 16	—3	+ 5	Sett. 25. 20. 24
16	Bocca del Fasi	Sett. 24. 20. 0	110, 49	+0,400	43, 11	+6, 66	[illegible]	171, 33	170, 27	—1, 06	—4, 74	105, 75	—3	—19	Sett. 24. 19. 38
	id.	Sett. 25. 20. 33	108, 59	+0,333	47, 14	+6, 63	[illegible]	171, 40	172, 14	+0, 74	—2, 61	105, 98	—3	—10	Sett 25. 20. 20

Calcolo delle posizioni a

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877		ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	Π
17	Colonne d'Ercole, bocca esterna . . .	Sett. 24.	20ʰ.54ᵐ	123°,62	+0,400	43°,11	+6°,
	id.	Sett. 25.	21. 25	121, 63	+0,333	47, 14	+6,
18	Centro d' Icaria	Sett. 25.	21. 25	121, 23	+0,250	52, 14	+6,
19	1° punto del Mare delle Sirene . . .	Sett. 22.	20. 0	130, 28	+0,130	59, 36	+6,
	id.	Sett. 24.	21. 30	132, 38	+0,151	57, 99	+6,
20	1° punto di Thyle I.ª	Ott. 27.	20. 35	143, 84	+0,630	24, 92	+6,
21	Colonne d' Ercole, bocca interna . . .	Sett. 22.	20. 25	136, 37	. . . . .	. . . .	+6,
	id.	Sett. 24.	22. 5	140, 89	. . . . .	. . . .	+6,
22	Centro di Thyle I.ª	Ott. 27.	21. 39	159, 38	+0,630	24, 92	+5,
23	Base australe d' Atlantide I.ª . . .	Sett. 20.	20. 35	158, 53	+0.250	52, 46	+5,
24	1° punto del Mare Cimmerio	Sett. 18.	19. 35	163, 70	+0,250	52, 56	+4,
	id.	Sett. 20.	21. 5	165, 83	+0,250	52, 46	+4,
25	Golfo dei Titani	Sett. 20.	21. 20	169, 48	—0,085	71, 83	+4,
26	Ult.° punto del Mar delle Sirene . .	Sett. 18.	20. 20	174, 65	+0,084	62, 40	+3,
	id.	Sett. 20.	21. 45	175, 56	+0,000	66, 93	+3,
27	Stretto d' Ulisse, mezzo	Ott. 21.	19. 43	193, 01	+0,750	15, 92	+1,
28	Punto sulla riva australe dell'Oceano	Sett. 16.	19. 50	187, 04	—0,500	97, 12	+2,
29	Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano	Ott. 21.	20. 16	201, 28	—0,500	94, 50	+0,
30	Golfo dei Lestrigoni, intimo seno . .	Sett. 14.	19. 28	201, 32	—0,124	74, 33	+0,
	id.	Sett. 16.	21. 0	204, 06	—0,042	69, 50	+0,
	id.	Sett. 20.	23. 15	197, 45	—0,085	71, 83	+1,
31	Scamandro, bocca sul Mar Cronio . .	Ott. 20.	19. 39	206, 13	+0,500	34, 59	+0,
	id.	Sett. 16.	20. 43	199, 92	. . . . .	. . . .	+1,
32	Scamandro, punto di mezzo	Sett. 16.	20. 43	199, 92	. . . . .	. . . .	+1,
	id.	Ott. 20.	19. 39	206, 13	+0,400	41, 02	+0,
33	Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano	Ott. 20.	19. 46	207, 83	—0,600	101, 46	+0,
	id.	Ott. 21.	20. 36	206, 14	—0,714	110, 08	+0,
34	Base australe d' Esperia	Sett. 14.	20. 10	211, 54	. . . . .	. . . .	—0,
35	Capo boreale di Thyle II.	Ott. 20.	20. 36	219, 98	+0,600	27, 72	—1,

fondamentali.

+II	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
11°,33	171°,37	+0°,04	— 3°,86	119°,76	—3^m	—16^m	Sett. 24. 20^h.35^m
11, 45	171, 14	—0, 31	— 3, 51	117, 72	—3	—14	Sett. 25. 21. 8
11, 45	171, 14	—0, 31	— 2, 38	118, 85	—3	—10	Sett. 25. 21. 12
11, 00	170, 57	—0, 43	— 1, 23	129, 05	—3	— 5	Sett. 22. 19. 52
11, 15	171, 37	+0, 22	— 0, 82	131, 56	—3	— 3	Sett. 24. 21. 24
19, 53	167, 20	—2, 33	—10, 79	133, 05	—4	—44	Sett. 27. 19. 47
10, 82	170, 57	—0, 25	— 2, 23	134, 14	—3	— 9	Sett. 22. 20. 13
10, 84	171, 77	+0, 93	— 1, 13	139, 76	—3	— 5	Sett. 24. 21. 57
18, 54	167, 20	—1, 34	— 8, 59	150, 79	—5	—35	Ott. 27. 20. 59
19, 37	171, 47	+2, 10	+ 0, 20	158, 73	—3	+ 1	Sett. 20. 20. 33
18, 67	169, 31	+0, 64	— 0, 93	162, 77	—3	— 4	Sett. 18. 19. 28
18, 81	171, 47	+2, 66	+ 0, 86	166, 69	—3	+ 4	Sett. 20. 21. 6
18, 39	171, 47	+3, 08	+ 3, 69	173, 17	—3	+15	Sett. 20. 21. 32
17, 70	167, 70	+0, 00	— 0, 18	174, 47	—3	— 1	Sett. 18. 20. 16
17, 89	168, 97	+1, 08	+ 0, 88	176, 44	—3	+ 4	Sett. 20. 21. 46
15, 20	163, 40	—2, 80	— 7, 00	186, 01	—4	—29	Ott. 21. 19. 10
16, 22	165, 37	—0, 85	+ 0, 04	187, 08	—3	± 0	Sett. 16. 19. 47
15, 24	163, 40	—1, 84	— 2, 16	199, 12	—4	— 9	Ott. 21. 20. 3
14, 34	162, 95	—1, 39	— 1, 39	199, 93	—3	— 6	Sett. 14. 19. 19
14, 40	164, 93	+0, 53	+ 0, 62	204, 68	—3	+ 3	Sett. 16. 21. 0
15, 59	165, 57	—0, 02	+ 0, 09	197, 54	—3	± 0	Sett. 20. 23. 12
14, 82	162, 00	—2, 82	— 2, 30	203, 83	—4	— 9	Ott. 20. 19. 26
14, 82	164, 93	+0, 11	— 0, 85	199, 07	—3	— 3	Sett. 16. 20. 37
14, 82	164, 93	+0, 11	— 0, 59	199, 33	—3	— 2	Sett. 16. 20. 38
14, 82	162, 00	—2, 82	— 2, 47	203, 66	—4	—10	Ott. 20. 19. 25
14, 64	162, 00	—2, 64	— 4, 16	203, 67	—4	—17	Ott. 20. 19. 25
14, 70	163, 40	—1, 30	— 1, 85	204, 29	—4	— 8	Ott. 21. 20. 24
13, 26	161, 45	—1, 81	— 1, 51	210, 03	—3	— 6	Sett. 14. 20. 1
13, 29	162, 00	—1, 29	+ 0, 56	220, 54	—4	+ 2	Ott. 20. 20. 34

Calcolo delle posizioni areog[illegible]nti fondamentali.

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	μ/ρ	Distanza σ dal polo australe	Π	ρ—Π	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
17	Colonne d'Ercole, bocca esterna . . .	Sett. 24. $20^{h}.54^{m}$	123°,62	+0,400	43°,11	+6°,66	171°,33	171°,37	+0°,04	— 3°,86	119°,76	-3^{m}	-16^{m}	Sett. 24. $20^{h}.35^{m}$
	id.	Sett. 25. 21. 25	121, 63	+0,333	47, 14	+6, 68	171. 45	171, 14	—0, 31	— 3, 51	117, 72	—3	—14	Sett. 25. 21. 8
18	Centro d' Icaria	Sett. 25. 21. 25	121, 23	+0,250	52, 14	+6, 68	171, 45	171, 14	—0, 31	— 2, 38	118, 85	—3	—10	Sett. 25. 21. 12
19	1° punto del Mare delle Sirene . . .	Sett. 22. 20. 0	130, 28	+0,130	59, 36	+6, 55	171. 00	170, 57	—0, 43	— 1, 23	129, 05	—3	— 5	Sett. 22. 19. 52
	id.	Sett. 24. 21. 30	132, 38	+0,151	57, 99	+6, 48	171. 15	171, 37	+0, 22	— 0, 82	131, 56	—3	— 3	Sett. 24. 21. 24
20	1° punto di Thyle I.ª	Ott. 27. 20. 35	143, 84	+0,630	24, 92	+6, 09	169, 53	167, 20	—2, 33	—10, 79	133, 05	—4	—44	Sett. 27. 19. 47
21	Colonne d' Ercole, bocca interna . . .	Sett. 22. 20. 25	136, 37	. . . . .	. . . .	+6, 37	170, 82	170, 57	—0, 25	— 2, 23	134, 14	—3	— 9	Sett. 22. 20. 13
	id.	Sett. 24. 22. 5	140, 89	. . . . .	. . . .	+6, 17	170, 84	171, 77	+0, 93	— 1, 13	139, 76	—3	— 5	Sett. 24. 21. 57
22	Centro di Thyle I.ª	Ott. 27. 21. 39	159, 38	+0,630	24, 92	+5, 10	168, 54	167, 20	—1, 34	— 8, 59	150, 79	—5	—35	Ott. 27. 20. 59
23	Base australe d' Atlantide I.ª . . .	Sett. 20. 20. 35	158, 53	+0.250	52, 46	+5, 16	169, 37	171, 47	+2, 10	+ 0, 20	158, 73	—3	+ 1	Sett. 20. 20. 33
24	1° punto del Mare Cimmerio	Sett. 18. 19. 35	163, 70	+0,250	52, 56	+4, 70	168, 67	169, 31	+0, 64	— 0, 93	162, 77	—3	— 4	Sett. 18. 19. 28
	id.	Sett. 20. 21. 5	165, 83	+0,250	52, 46	+4, 60	168. 81	171, 47	+2, 66	+ 0, 86	166, 69	—3	+ 4	Sett. 20. 21. 6
25	Golfo dei Titani	Sett. 20. 21. 20	169, 48	—0,085	71, 83	+4, 18	168, 39	171, 47	+3, 08	+ 3, 69	173, 17	—3	+15	Sett. 20. 21. 32
26	Ult.° punto del Mar delle Sirene . .	Sett. 18. 20. 20	174, 65	+0,084	62, 40	+3, 73	167, 70	167, 70	+0, 00	— 0, 18	174, 47	—3	— 1	Sett. 18. 20. 16
	id.	Sett. 20. 21. 45	175, 56	+0,000	66, 93	+3, 68	167, 89	168, 97	+1. 08	+ 0, 88	176, 44	—3	+ 4	Sett. 20. 21. 46
27	Stretto d' Ulisse, mezzo	Ott. 21. 19. 43	193, 01	+0,750	15, 92	+1, 90	166, 20	163, 40	—2, 80	— 7, 00	186, 01	—4	—29	Ott. 21. 19. 10
28	Punto sulla riva australe dell'Oceano	Sett. 16. 19. 50	187, 04	—0,500	97, 12	+2, 52	166, 22	165, 37	—0, 85	+ 0, 04	187, 08	—3	± 0	Sett. 16. 19. 47
29	Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano	Ott. 21. 20. 16	201, 28	—0,500	94, 50	+0, 94	165, 24	163, 40	—1, 84	— 2, 16	199, 12	—4	— 9	Ott. 21. 20. 3
30	Golfo dei Lestrigoni, intimo seno . .	Sett. 14. 19. 28	201, 32	—0,124	74, 33	+0, 97	164, 34	162, 95	—1, 39	— 1, 39	199, 93	—3	— 6	Sett. 14. 19. 19
	id.	Sett. 16. 21. 0	204, 06	—0,042	69, 50	+0, 70	164, 40	164, 93	+0, 53	+ 0, 62	204, 68	—3	+ 3	Sett. 16. 21. 0
	id.	Sett. 20. 23. 15	197, 45	—0,085	71, 83	+1, 38	165, 59	165, 57	—0, 02	+ 0, 09	197, 54	—3	± 0	Sett. 20. 23. 12
31	Scamandro, bocca sul Mar Cronio . .	Ott. 20. 19. 39	206, 13	+0,500	34, 59	+0, 40	164, 82	162, 00	—2, 82	— 2, 30	203, 83	—4	— 9	Ott. 20. 19. 26
	id.	Sett. 16. 20. 43	199, 92	. . . . .	. . . .	+1, 12	164, 82	164, 93	+0, 11	— 0, 85	199, 07	—3	— 3	Sett. 16. 20. 37
32	Scamandro, punto di mezzo	Sett. 16. 20. 43	199, 92	. . . . .	. . . .	+1, 12	164, 82	164, 93	+0, 11	— 0, 59	199, 33	—3	— 2	Sett. 16. 20. 38
	id.	Ott. 20. 19. 39	206, 13	+0,400	41, 02	+0, 40	164, 82	162, 00	—2, 82	— 2, 47	203, 66	—4	—10	Ott. 20. 19. 25
33	Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano	Ott. 20. 19. 46	207, 83	—0,600	101, 46	+0, 22	164, 64	162, 00	—2, 64	— 4, 16	203, 67	—4	—17	Ott. 20. 19. 25
	id.	Ott. 21. 20. 36	206, 14	—0,714	110, 08	+0, 40	164, 70	163, 40	—1, 30	— 1, 85	204, 29	—4	— 8	Ott. 21. 20. 24
34	Base australe d' Esperia	Sett. 14. 20. 10	211, 54	. . . . .	. . . .	—0, 11	163, 26	161, 45	—1, 81	— 1, 51	210, 03	—3	— 6	Sett. 14. 20. 1
35	Capo boreale di Thyle II.	Ott. 20. 20. 36	219, 98	+0,600	27, 72	—1, 13	163, 29	162, 00	—1, 29	+ 0, 56	220, 54	—4	+ 2	Ott. 20. 20. 34

Calcolo delle posizioni

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	I
36	Centro di Thyle II.	Ott. 21. $21^h.33^m$	220°,00	+0,700	20,°07	—1°
37	Golfo dei Ciclopi	Sett. 14. 20. 55	222, 49	—0,166	76, 78	—1,
	id.	Sett. 15. 21. 55	227, 25	. . . . .	. . . .	—1,
	id.	Sett. 16. 22. 35	227, 40	. . . . .	. . . .	—1,
	id.	Sett. 20. 24. 35	217, 63	—0,198	78, 36	—0,
38	Primo punto del Mar Tirreno	Sett. 14. 21. 4	224, 68	+0,305	49, 48	—1,
	id.	Sett. 16. 22. 23	224, 24	+0,299	49, 75	—1,
	id.	Sett. 20. 25. 0	222, 98	+0,167	57, 33	—1,
39	Centro d' Esperia	Sett. 14. 21. 30	231, 01	±0,000	67, 21	—2,
40	Bocca australe dello Xanto	Sett. 14. 21. 33	231, 74	+0,500	37, 21	—2,
	id.	Sett. 15. 22. 14	231, 87	. . . . .	. . . .	—2,
	id.	Sett. 20. 25. 20	227, 84	+0,444	40, 53	—1,
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio . .	Sett. 14. 21. 50	235, 87	—0,167	76, 78	—2,
	id.	Sett. 20. 25. 48	234, 65	—0,286	83, 53	—2,
42	Base settentrionale d' Esperia	Sett. 13. 22. 25	253, 69	. . . . .	. . . .	—4,
	id.	Sett. 14. 22. 35	246, 81	—0,167	76, 78	—3,
43	Piccola Sirte	Sett. 12. 22. 20	262, 32	—0,353	87, 95	—5,
	id.	Sett. 13. 22. 38	256, 80	—0,250	81, 73	—4,
	id.	Sett. 14. 23. 14	256, 30	—0,333	86, 68	—4,
	id.	Sett. 15. 23. 55	256, 44	—0,200	78, 70	—4,
44	Capo Circeo in Ausonia	Sett. 13. 23. 8	264, 15	—0,082	71, 98	—5,
	id.	Ott. 14. 20. 0	269, 21	—0,206	76, 67	—5,
45	Punto della costa d'Ausonia	Sett. 12. 22. 40	267, 19	±0,000	67, 30	—5,
46	Lago Tritone	Ott. 12. 19. 0	275, 00	. . . . .	. . . .	—5.
	id.	Ott. 13. 19. 12	267, 74	—0,750	113, 82	—5,
	id.	Ott. 14. 20. 4	270, 18	—0,667	106, 94	—5,
47	Primo punto dell' Ellade	Sett. 12. 22. 40	267, 19	. . . . .	. . . .	—5,
	id.	Sett. 13. 23. 11	264, 88	+0,469	39, 26	—5,
	id.	Ott. 14. 19. 48	266. 29	+0,400	41, 56	—5,
48	Lago Meride	Ott. 13. 20. 7	281, 11	. . . . .	. . . .	—6,
49	Biforcazione d'Ausonia	Ott. 14. 20. 55	282, 58	—0,206	76, 67	—6,
50	Congiunzione del Nepente col Nilo . .	Ott. 14. 21. 36	292, 54	—0,800	118, 26	—6,

…*nti fondamentali.*

…−Π	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
1…°,17	163°,40	+0°,23	+2°,46	222°,46	−4^m	+10^m	Ott. 21. 21^h.39^m
1…, 07	161, 85	−0, 22	−0, 49	222, 00	−3	− 2	Sett. 14. 20. 50
1…, 66	161, 66	±0, 00	−0, 35	226, 90	−3	− 1	Sett. 15. 21. 51
1…, 83	161, 57	−0, 26	−0, 65	226, 75	−3	− 2	Sett. 16. 22. 30
1…, 33	165, 57	+2, 24	+2, 37	220, 00	−3	+10	Sett. 20. 24. 42
1…, 71	161, 85	+0, 14	+0, 65	225, 33	−3	+ 2	Sett. 14. 21. 3
1…, 16	161, 57	−0, 59	−0, 01	224, 23	−3	± 0	Sett. 16. 22. 20
1…, 77	166, 37	+3, 60	+3, 48	226, 46	−3	+15	Sett. 20. 25. 12
1…, 11	160, 95	−0, 16	−0, 16	230, 85	−3	− 1	Sett. 14. 21. 26
1…, 99	160, 95	−0, 04	+1, 69	233, 43	−3	+ 7	Sett. 14. 21. 37
1…, 12	161, 12	±0, 00	+1, 76	233, 63	−3	+ 7	Sett. 15. 22. 18
1…, 24	166, 37	+4, 13	+4, 22	232, 06	−3	+17	Sett. 20. 25. 34
1…, 53	160, 95	+0, 42	+0, 15	236, 02	−3	+ 1	Sett. 14. 21. 48
1…, 48	166, 37	+4, 89	+4, 92	239, 57	−3	+20	Sett. 20. 26. 5
…5, 67	157, 92	−0, 75	−1, 87	251, 82	−3	− 8	Sett. 13. 22. 14
…5, 36	159, 95	+0, 59	−0, 21	246, 60	−3	− 1	Sett. 14. 22. 31
…5, 90	156, 13	−1, 77	−3, 68	258, 64	−3	−15	Sett. 12. 22. 2
…5, 45	157, 92	−0, 53	−2, 09	254, 71	−3	− 8	Sett. 13. 22. 27
…5, 61	158, 85	+0, 24	−1, 17	255, 13	−3	− 5	Sett. 14. 23. 6
…5, 86	158, 86	±0, 00	−1, 43	255, 01	−3	− 6	Sett. 15. 23. 46
…5, 93	157, 92	−0, 01	−0, 80	263, 35	−3	− 3	Sett. 13. 23. 2
…5, 32	158, 62	−0, 70	−1, 61	267, 70	−4	− 6	Ott. 14. 19. 50
…5, 56	156, 03	−1, 53	−1, 47	265, 72	−3	− 6	Sett. 12. 22. 31
…5, 12	157, 45	−1, 67	−7, 20	267, 80	−4	−30	Ott. 12. 18. 26
…5, 47	160, 60	+1, 13	−2, 18	265, 56	−4	− 9	Ott. 13. 18. 59
…5, 25	158, 62	−0, 63	−5, 29	264, 89	−4	−22	Ott. 14. 19. 38
…5, 56	156, 03	−0, 53	+4, 03	271, 22	−3	+16	Sett. 12. 22. 53
…5, 89	157, 92	+0, 03	+3, 64	268, 52	−3	+15	Sett. 13. 23. 23
…5, 57	158, 62	−0, 95	+2, 99	269, 28	−4	+12	Ott. 14. 19. 56
…5, 81	157, 80	−1, 01	−5, 09	276, 02	−4	−21	Ott. 13. 19. 42
…5, 61	158, 62	+0, 01	−1, 33	281, 25	−4	− 5	Ott. 14. 20. 46
…5, 31	157, 62	−0, 69	−7, 36	285, 18	−4	−30	Ott. 14. 21. 2

Calcolo delle posizioni areografiche dei punti fondamentali.

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	μ/ρ	Distanza σ dal polo australe	Π	ρ+Π	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
36	Centro di Thyle II.	Ott. 21. 21h.33m	220°,00	+0,700	20°,07	—1°,13	163°,17	163°,40	+0°,23	+2°,46	222°,46	—4m	+10m	Ott. 21. 21h.39m
37	Golfo dei Ciclopi	Sett. 14. 20. 55	222, 49	—0,166	76, 78	—1, 30	162, 07	161, 85	—0, 22	—0, 49	222, 00	—3	— 2	Sett. 14. 20. 50
	id.	Sett. 15. 21. 55	227, 25	. . . . .	. . . .	—1, 87	161, 66	161, 66	±0, 00	—0, 35	226, 90	—3	— 1	Sett. 15. 21. 51
	id.	Sett. 16. 22. 35	227, 40	. . . . .	. . . .	—1, 87	161, 83	161, 57	—0, 26	—0, 65	226, 75	—3	— 2	Sett. 16. 22. 30
	id.	Sett. 20. 24. 35	217, 63	—0,198	78, 36	—0, 88	163, 33	165, 57	+2, 24	+2, 37	220, 00	—3	+10	Sett. 20. 24. 42
38	Primo punto del Mar Tirreno	Sett. 14. 21. 4	224, 68	+0,305	49, 48	—1, 66	161, 71	161, 85	+0, 14	+0, 65	225, 33	—3	+ 2	Sett. 14. 21. 3
	id.	Sett. 16. 22. 23	224, 24	+0,299	49, 75	—1, 54	162, 16	161, 57	—0, 59	—0, 01	224, 23	—3	± 0	Sett. 16. 22. 20
	id.	Sett. 20. 25. 0	222, 98	+0,167	57, 33	—1, 44	162, 77	166, 37	+3, 60	+3, 48	226, 46	—3	+15	Sett. 20. 25. 12
39	Centro d'Esperia	Sett. 14. 21. 30	231, 01	±0,000	67, 21	—2, 26	161, 11	160, 95	—0, 16	—0, 16	230, 85	—3	— 1	Sett. 14. 21. 26
40	Bocca australe dello Xanto	Sett. 14. 21. 33	231, 74	+0,500	37, 21	—2, 38	160, 99	160, 95	—0, 04	+1, 69	233, 43	—3	+ 7	Sett. 14. 21. 37
	id.	Sett. 15. 22. 14	231, 87	. . . . .	. . . .	—2, 41	161, 12	161, 12	±0, 00	+1, 76	233, 63	—3	+ 7	Sett. 15. 22. 18
	id.	Sett. 20. 25. 20	227, 84	+0,444	40, 53	—1, 97	162, 24	166, 37	+4, 13	+4, 22	232, 06	—3	+17	Sett. 20. 25. 34
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio	Sett. 14. 21. 50	235, 87	—0,167	76, 78	2, 84	160, 53	160, 95	+0, 42	+0, 15	236, 02	—3	+ 1	Sett. 14. 21. 48
	id.	Sett. 20. 25. 48	234, 65	—0,286	83, 53	—2, 73	161, 48	166, 37	+4, 89	+4, 92	239, 57	—3	+20	Sett. 20. 26. 5
42	Base settentrionale d'Esperia	Sett. 13. 22. 25	253, 69	. . . . .	. . . .	—4, 55	158, 67	157, 92	—0, 75	—1, 87	251, 82	—3	— 8	Sett. 13. 22. 14
	id.	Sett. 14. 22. 35	246, 81	—0,167	76, 78	—3, 86	159, 36	159, 95	+0, 59	—0, 21	246, 60	—3	— 1	Sett. 14. 22. 31
43	Piccola Sirte	Sett. 12. 22. 20	262, 32	—0,353	87, 95	—5, 16	157, 90	156, 13	—1, 77	—3, 68	258, 64	—3	—15	Sett. 12. 22. 2
	id.	Sett. 13. 22. 38	256, 80	—0,250	81, 73	—4, 77	158, 45	157, 92	—0, 53	—2, 09	254, 71	—3	— 8	Sett. 13. 22. 27
	id.	Sett. 14. 23. 14	256, 30	—0,333	86, 68	—4, 76	158, 61	158, 85	+0, 24	—1, 17	255, 13	—3	— 5	Sett. 14. 23. 6
	id.	Sett. 15. 23. 55	256, 44	—0,200	78, 70	—4, 67	158, 86	158, 86	±0, 00	—1, 43	255, 01	—3	— 6	Sett. 15. 23. 46
44	Capo Circeo in Ausonia	Sett. 13. 23. 8	264, 15	—0,082	71, 98	—5, 29	157, 93	157, 92	—0, 01	—0, 80	263, 35	—3	— 3	Sett. 13. 23. 2
	id.	Ott. 14. 20. 0	269, 21	—0,206	76, 67	—5, 65	159, 32	158, 62	—0, 70	—1, 61	267, 70	—4	— 6	Ott. 14. 19. 50
45	Punto della costa d'Ausonia	Sett. 12. 22. 40	267, 19	±0,000	67, 30	—5, 50	157, 56	156, 03	—1, 53	—1, 47	265, 72	—3	— 6	Sett. 12. 22. 31
46	Lago Tritone	Ott. 12. 19. 0	275, 00	. . . . .	. . . .	—5, 97	159, 12	157, 45	—1, 67	—7, 20	267, 80	—4	—30	Ott. 12. 18. 26
	id.	Ott. 13. 19. 12	267, 74	—0,750	113, 82	—5, 55	159, 47	160, 60	+1, 13	—2, 18	265, 56	—4	— 9	Ott. 13. 18. 59
	id.	Ott. 14. 20. 4	270, 18	—0,667	106, 94	—5, 72	159, 25	158, 62	—0, 63	—5, 29	264, 89	—4	—22	Ott. 14. 19. 38
47	Primo punto dell'Ellade	Sett. 12. 22. 40	267, 19	. . . . .	. . . .	—5, 50	156, 56	156, 03	—0, 53	+4, 03	271, 22	—3	+16	Sett. 12. 22. 53
	id.	Sett. 13. 23. 11	264, 88	+0,469	39, 26	—5, 33	157, 89	157, 92	+0, 03	+3, 64	268, 52	—3	+15	Sett. 13. 23. 23
	id.	Ott. 14. 19. 48	266, 29	+0,400	41, 56	—5, 40	159, 57	158, 62	—0, 95	+2, 99	269, 28	—4	+12	Ott. 14. 19. 56
48	Lago Meride	Ott. 13. 20. 7	281, 11	. . . . .	. . . .	—6, 22	158, 81	157, 80	—1, 01	—5, 09	276, 02	—4	—21	Ott. 13. 19. 42
49	Biforcazione d'Ausonia	Ott. 14. 20. 55	282, 58	—0,206	76, 67	—6, 36	158, 61	158, 62	+0, 01	—1, 33	281, 25	—4	— 5	Ott. 14. 20. 46
50	Congiunzione del Nepente col Nilo	Ott. 14. 21. 36	292, 54	—0,800	118, 26	—6, 66	158, 31	157, 62	—0, 69	—7, 36	285, 18	—4	—30	Ott. 14. 21. 2

Calcolo delle posizioni a

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	Π
51	Gran Sirte e bocca del Nilo	Sett. 12. 24h.25m	292°,73	—0,614	105°,23	—6″,
	id.	Ott. 10. 19. 3	296, 31	—0,667	107, 30	—6,
	id.	Ott. 11. 19. 50	297, 32	. . . . .	. . . . .	—6,
	id.	Ott. 12. 20. 15	293, 22	—0,667	107, 12	—6,
	id.	Ott. 13. 21. 4	294, 96	—0,750	113, 82	—6,
	id.	Ott. 14. 21. 50	295, 94	—0,600	102, 00	—6,
52	Punto più australe dell' Ellade	Ott. 10.	. . . . .	+0,550	32, 08	. . . .
	id.	Ott. 12.	. . . . .	+0,550	31, 94	. . . .
53	Centro dell' Ellade	Sett. 12. 24. 5	287, 86	+0,389	+44, 40	—6,
	id.	Ott. 12. 20. 2	290, 07	+0,325	+46, 33	—6,
	id.	Ott. 13. 20. 44	290, 10	+0,357	+44, 29	—6,
	id.	Ott. 14. 21. 39	293, 27	+0,300	+39, 76	—6,
54	Punto più boreale dell' Ellade	Ott. 10.	. . . . .	+0,101	59, 68	. . . .
	id.	Ott. 12.	. . . . .	+0,100	59, 57	. . . .
55	Ultimo punto del Mar Tirreno	Ott. 12. 20. 44	300, 27	—0,429	90, 67	—6,
	id.	Ott. 13. 21. 17	298, 12	. . . . .	. . . .	—6,
56	Ultimo punto dell' Ellade	Ott. 10. 20. 5	311, 37	+0,333	46, 01	—6,
	id.	Ott. 11. 20. 57	313, 60	+0,333	45, 92	—6,
	id.	Ott. 12. 21. 24	310, 00	+0,333	45, 83	—6,
	id.	Ott. 14. 22. 50	310, 52	. . . . .	. . . .	—6,
57	Corno d'Ammone	Ott. 10. 20. 42	320, 37	—0,250	79, 95	—6,
	id.	Ott. 11. 21. 20	319, 19	—0,286	81, 99	—6,
	id.	Ott. 12. 21. 54	317, 29	—0,250	79, 77	—6,
	id.	Ott. 14. 23. 24	318, 78	—0,206	76, 67	—6,
58	Scilla e Cariddi	Ott. 13. 23. 15	326, 79	—0,052	68, 20	—6,
	id.	Ott. 14. 23. 42	323, 15	—0,105	71, 18	—6,
59	Ellesponto, punto medio	Ott. 10. 20. 50	322, 31	+0,400	41, 91	—6,
	id.	Ott. 12. 22. 10	321, 17	. . . . .	. . . .	—6,
	id.	Ott. 13. 22. 53	321, 44	+0,400	41, 65	—6,
60	Primo punto della Noachide	Ott. 13. 23. 15	326, 79	+0,400	41, 65	—6,
	id.	Ott. 14. 24. 31	335, 07	+0,400	41, 56	—5,
61	Bocca del Phison nel Golfo Sabeo . .	Ott. 10. 22. 10	341, 75	—0,333	84, 95	—5,
	id.	Ott. 14. 25. 0	342, 12	. . . . .	. . . .	—5,
62	Primo Corno del Golfo Sabeo	Ott. 4. 19. 15	359, 59	—0,444	92, 37	—3,

ondamentali.

I	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
.42	156°,13	—0°,29	—5°,02	287°,71	—3ᵐ	—20ᵐ	Sett. 12. 24ʰ. 2ᵐ
52	157, 30	—1, 22	—6, 31	290, 00	—4	—26	Ott. 10. 18. 33
42	158, 30	—0, 12	—5, 82	291, 50	—4	—24	Ott. 11. 19. 22
40	157, 55	—0, 85	—5, 95	287, 27	—4	—24	Ott. 12. 19. 47
36	157, 80	—0, 56	—5, 47	289, 49	—4	—22	Ott. 13. 20. 38
25	157, 62	—0, 63	—5, 62	290, 32	—4	—23	Ott. 14. 21. 23
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
63	156, 13	—0, 50	+2, 81	290, 67	—3	+12	Sett. 12. 24. 14
54	157, 55	—0, 99	+2, 49	292, 56	—4	+10	Ott. 12. 20. 8
48	157, 80	—0, 68	+2, 72	292, 82	—4	+11	Ott. 13. 20. 51
22	157, 62	—0, 60	+2, 88	296, 15	—4	+12	Ott. 14. 21. 47
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
40	156, 95	—1, 45	—4, 75	295, 52	—4	—20	Ott. 12. 20. 20
36	157, 80	—0, 56	—3, 59	294, 53	—4	—15	Ott. 13. 20. 58
55	157, 00	—1, 55	+1, 93	313, 30	—4	+ 8	Ott. 10. 20. 9
50	159, 80	+1, 30	+3, 96	317, 56	—4	+16	Ott. 11. 21. 9
44	156, 95	—1, 49	+1, 99	311, 99	—4	+ 8	Ott. 12. 21. 28
27	157, 62	—0, 65	+2, 63	313, 15	—4	+11	Ott. 14. 22. 57
76	157, 00	—1, 76	—3, 60	316, 77	—4	—15	Ott. 10. 20. 23
65	160, 40	+1, 75	+0, 35	319, 54	—4	+ 1	Ott. 11. 21. 17
59	159, 25	+0, 66	—0, 89	316, 40	—4	— 4	Ott. 12. 21. 46
47	157, 62	—0, 75	—2, 50	316, 28	—4	—10	Ott. 14. 23. 10
75	158, 10	—0, 65	—1, 19	325, 60	—4	— 5	Ott. 13. 23. 6
63	157, 62	—1, 01	—1, 55	321, 60	—4	— 6	Ott. 14. 23. 32
84	157, 00	—1, 84	+2, 54	324, 85	—4	+10	Ott. 10. 20. 56
71	159, 25	+0, 54	+4, 21	325, 38	—4	+17	Ott. 12. 22. 23
65	158, 10	—0, 55	+3, 46	324, 90	—4	+14	Ott. 13. 23. 3
75	158, 10	—0, 65	+3, 33	330, 12	—4	+14	Ott. 13. 23. 25
25	157, 62	—1, 63	+2, 32	337, 39	—4	+10	Ott. 14. 24. 37
03	159, 60	—0, 43	—2, 23	339, 52	—4	— 9	Ott. 10. 21. 57
76	156, 12	—3, 64	—6, 08	336, 04	—4	—25	Ott. 14. 24. 31
68	160, 30	—1, 38	—3, 39	356, 20	—4	—14	Ott. 4. 18. 57

Calcolo delle posizioni areog[illegible]nti fondamentali.

N. d'ordine dei punti	Nome dei punti	Data e tempo siderale 1877	ω	$\frac{\mu}{\rho}$	Distanza σ dal polo australe	Π	[illegible]—Π	π	ε	Correzione	Longitudine corretta θ	Equazione della luce	ΔT	T, passaggio dei punti al meridiano centrale (Siderale Milano)
51	Gran Sirte e bocca del Nilo	Sett. 12. 24h.25m	292°,73	—0,614	105°,23	—6°,64	156°.42	156°,13	—0°,29	—5°,02	287°,71	—3m	—20m	Sett. 12. 24h. 2m
	id.	Ott. 10. 19. 3	296, 31	—0,667	107, 30	—6, 66	158, 52	157, 30	—1, 22	—6, 31	290, 00	—4	—26	Ott. 10. 18. 33
	id.	Ott. 11. 19. 50	297, 32	. . . . .	. . . . .	—6, 67	158, 42	158, 30	—0, 12	—5, 82	291, 50	—4	—24	Ott. 11. 19. 22
	id.	Ott. 12. 20. 15	293, 22	—0,667	107, 12	—6, 69	158, 40	157, 55	—0, 85	—5, 95	287, 27	—4	—24	Ott. 12. 19. 47
	id.	Ott. 13. 21. 4	294, 96	—0,750	113, 82	—6, 67	158, 36	157, 80	—0, 56	—5, 47	289, 49	—4	—22	Ott. 13. 20. 38
	id.	Ott. 14. 21. 50	295, 94	—0,600	102, 00	—6, 72	158, 25	157, 62	—0, 63	—5, 62	290, 32	—4	—23	Ott. 14. 21. 23
52	Punto più australe dell'Ellade	Ott. 10.	. . . . .	+0,550	32, 08	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
	id.	Ott. 12.	. . . . .	+0,550	31, 94	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
53	Centro dell'Ellade	Sett. 12. 24. 5	287, 86	+0,389	+44, 40	—6, 43	156, 63	156, 13	—0, 50	+2, 81	290, 67	—3	+12	Sett. 12. 24. 14
	id.	Ott. 12. 20. 2	290, 07	+0,325	+46, 33	—6, 55	158, 54	157, 55	—0, 99	+2, 49	292, 56	—4	+10	Ott. 12. 20. 8
	id.	Ott. 13. 20. 44	290, 10	+0,357	+44, 29	—6, 55	158, 48	157, 80	—0, 68	+2, 72	292, 82	—4	+11	Ott. 13. 20. 51
	id.	Ott. 14. 21. 39	293, 27	+0,300	+39, 76	—6, 75	158, 22	157, 62	—0, 60	+2, 88	296, 15	—4	+12	Ott. 14. 21. 47
54	Punto più boreale dell'Ellade	Ott. 10.	. . . . .	+0,101	59, 68	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
	id.	Ott. 12.	. . . . .	+0,100	59, 57	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
55	Ultimo punto del Mar Tirreno. . . .	Ott. 12. 20. 44	300, 27	—0,429	90. 67	—6, 69	158, 40	156, 95	—1, 45	—4, 75	295, 52	—4	—20	Ott. 12. 20. 20
	id.	Ott. 13. 21. 17	298, 12	. . . . .	. . . .	—6, 67	158, 36	157, 80	—0, 56	—3, 59	294, 53	—4	—15	Ott. 13. 20. 58
56	Ultimo punto dell'Ellade	Ott. 10. 20. 5	311, 37	+0,333	46, 01	—6, 63	158, 55	157, 00	—1, 55	+1, 93	313, 30	—4	+ 8	Ott. 10. 20. 9
	id.	Ott. 11. 20. 57	313, 60	+0,333	45, 92	—6, 59	158, 50	159, 80	+1, 30	+3, 96	317, 56	—4	+16	Ott. 11. 21. 9
	id.	Ott. 12. 21. 24	310, 00	+0,333	45, 83	—6, 65	158, 44	156, 95	—1, 49	+1, 99	311, 99	—4	+ 8	Ott. 12. 21. 28
	id.	Ott. 14. 22. 50	310, 52	. . . . .	. . . .	—6, 70	158, 27	157, 62	—0, 65	+2, 63	313, 15	—4	+11	Ott. 14. 22. 57
57	Corno d'Ammone	Ott. 10. 20. 42	320, 37	—0,250	79, 95	—6, 42	158, 76	157, 00	—1, 76	—3, 60	316, 77	—4	—15	Ott. 10. 20. 23
	id.	Ott. 11. 21. 20	319, 19	—0,286	81, 99	—6, 44	158, 65	160, 40	+1, 75	+0, 35	319, 54	—4	+ 1	Ott. 11. 21. 17
	id.	Ott. 12. 21. 54	317, 29	—0,250	79, 77	—6, 50	158, 59	159, 25	+0, 66	—0, 89	316, 40	—4	— 4	Ott. 12. 21. 46
	id.	Ott. 14. 23. 24	318, 78	—0,206	76, 67	—6, 50	158, 47	157, 62	—0, 75	—2, 50	316, 28	—4	—10	Ott. 14. 23. 10
58	Scilla e Cariddi	Ott. 13. 23. 15	326, 79	—0,052	68, 20	—6, 28	158, 75	158, 10	—0, 65	—1, 19	325, 60	—4	— 5	Ott. 13. 23. 6
	id.	Ott. 14. 23. 42	323, 15	—0,105	71, 18	—6, 34	158, 63	157, 62	—1, 01	—1, 55	321, 60	—4	— 6	Ott. 14. 23. 32
59	Ellesponto, punto medio	Ott. 10. 20. 50	322, 31	+0,400	41, 91	—6, 34	158, 84	157, 00	—1, 84	+2, 54	324, 85	—4	+10	Ott. 10. 20. 56
	id.	Ott. 12. 22. 10	321, 17	. . . . .	. . . .	—6, 38	158, 71	159, 25	+0, 54	+4, 21	325, 38	—4	+17	Ott. 12. 22. 23
	id.	Ott. 13. 22. 53	321, 44	+0,400	41, 65	—6, 38	158, 65	158, 10	—0, 55	+3, 46	324, 90	—4	+14	Ott. 13. 23. 3
60	Primo punto della Noachide	Ott. 13. 23. 15	326, 79	+0,400	41, 65	—6, 28	158, 75	158, 10	—0, 65	+3, 33	330, 12	—4	+14	Ott. 13. 23. 25
	id.	Ott. 14. 24. 31	335, 07	+0,400	41, 56	—5, 72	159, 25	157, 62	—1, 63	+2, 32	337, 39	—4	+10	Ott. 14. 24. 37
61	Bocca del Phison nel Golfo Sabeo . .	Ott. 10. 22. 10	341, 75	—0,333	84, 95	—5, 15	160, 03	159, 60	—0, 43	—2, 23	339, 52	—4	— 9	Ott. 10. 21. 57
	id.	Ott. 14. 25. 0	342, 12	. . . . .	. . . .	—5, 21	159, 76	156, 12	—3, 64	—6, 08	336, 04	—4	—25	Ott. 14. 24. 31
62	Primo Corno del Golfo Sabeo	Ott. 4. 19. 15	359, 59	—0,444	92, 37	—3, 56	161, 68	160, 30	—1, 38	—3, 39	356, 20	—4	—14	Ott. 4. 18. 57

31. Riguardo alla tavola annessa sono da notare due cose. La prima concerne la colonna $\frac{\mu}{\rho}$ nella quale assai spesso i numeri sono frazioni semplici, come $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ o simili. In tutte queste occasioni il μ (cioè la distanza del punto dal centro) non fu misurato micrometricamente, ma stimato a vista in parti del raggio o del diametro del disco. Ciò ho dovuto fare tutte le volte che l'aria non era abbastanza tranquilla per la misura delle distanze. Altre volte avrei potuto far misure, ma il tempo enorme richiesto da queste mi avrebbe reso impossibile altre osservazioni che in quel momento eran per me più importanti. Cercai adunque di aiutarmi con stime eseguite accuratamente. L'altra osservazione concerne le denominazioni dei punti fondamentali contenute nella colonna 2ª del quadro. Su queste si daranno più sotto tutte le desiderabili informazioni: qui però è necessario notare generalmente, che i nomi così spesso occorrenti di *primo* e di *ultimo* punto di una data regione indicano quel punto di essa che primo od ultimo di tutti durante la rotazione del pianeta si è presentato su quel diametro del disco, che passava in quel momento per il centro della macchia nevosa. Generalmente quando si tratta di un punto saliente del contorno, tali punti possono anche dirsi i primi o gli ultimi, che passano al meridiano centrale: o per lo meno così dicendo non si commette alcun errore di rilievo. In alcuni casi però, quando il contorno della regione non offre in quel luogo che una curvatura di grande raggio, vi potrà esser una piccola differenza secondo che si considera il diametro che passa per la neve, o il meridiano centrale. In tal caso il primo e l'ultimo punto (come anche il più alto e il più basso) indicano luoghi del contorno, in cui questo è tangente (o perpendicolare) al circolo massimo che da essi va al centro della neve australe. Con ciò si spiega, perchè sulla nostra carta in questa specie di punti il contorno qualche volta non è tangente al parallelo o al meridiano di Marte, siccome dovrebb' essere.

32. Dalla tavola stessa fu dedotto il quadro definitivo delle posizioni areografiche fondamentali che viene qui appresso. Facendo per ciascun punto le medie delle distanze polari σ dal polo australe, e sottraendone 90° si ottenne per ciascuno la latitudine areografica che per ora si considera come definitiva. Il segno — indica latitudine boreale, il segno + latitudine australe. La stessa operazione fatta sulle longitudini θ di ciascun punto avrebbe dato le longitudini areografiche riferite alla stessa origine fittizia, da cui furono numerati gli ω nell'effemeride del sig. Marth. Ora si trova che ritenendo tale origine, la longitudine del punto n. 1 (in cui vogliamo assumere il primo meridiano dietro l'esempio di Maedler) viene 358°, 93 invece di 360°, 00 come dovrebbe essere. Ciò significa, che per ridurre le nostre longitudini all'origine di Maedler è necessario accrescerle tutte di + 1°, 07. Tali longitudini così corrette formano la colonna 3ª del quadro delle posizioni areografiche. L'ultima colonna dello stesso quadro dà il numero delle osservazioni a cui si appoggia la posizione di ciascun punto. Quando il numero è unico, esso vale tanto per la latitudine, quanto per la longitudine: quando vi sono due numeri il primo serve per la longitudine e il secondo per la latitudine. Questi dati possono fornir un' idea del grado di approssimazione di ciascun luogo, quando si conosca l' error probabile di una osservazione. Dal confronto di quelle posizioni che furono determinate

almeno 3 volte, mi è risultato, che l'error probabile di una osservazione isolata è di ± 1°, 94 in latitudine, e di ± 1°, 81 in longitudine, ciò che corrisponde ad un errore di ± 7^{min},4 di tempo nel passaggio al meridiano centrale (§ 30).

33. Ecco ora definitivamente il

Quadro delle posizioni areografiche dei punti fondamentali.

Numero	Denominazione	Longitud.	Latitud.	N. delle determinazioni
1	Vertice d'Aryn	0°,00	+ 4°,56	1
2	Secondo corno del Golfo Sabeo	3, 54	— 2, 37	1
3	Istmo della Terra di Deucalione	17, 82	— 2, 52	2, 1
4	Ombra dell'istmo stesso.	17, 83	+ 4, 56	2, 1
5	Golfo delle Perle, bocca dell'Indo	23, 59	— 4, 90	3
6	Bocca dell'Idaspe	27, 38	+ 4, 41	1
7	Capo degli Aromi	38, 40	+ 8, 30	2
8	Capo delle Ore in Argyre	39, 78	+39, 38	2
9	Capo delle Grazie in Argyre.	51, 86	+53, 84	2
10	Golfo dell'Aurora, bocca del Gange. . . .	55, 74	+ 2, 32	2
11	Punta dell'Aurea Cherso.	61, 49	+25, 26	2
12	1° punto di Thaumasia	66, 36	+23, 79	3
13	Confluente del Chrysorroas col Nilo. . . .	84, 16	—18, 88	1
14	Lago del Sole, centro	90, 24	+25, 22	3
15	Lago della Fenice, centro	106, 45	+19, 42	2
16	Bocca del Fasi.	106, 93	+44, 88	2
17	Colonne d'Ercole, bocca esterna	119, 81	+44, 88	2
18	Centro d'Icaria.	119, 92	+37, 86	1
19	1° punto del Mare delle Sirene	131, 37	+31, 32	2
20	1° punto di Thyle I^a.	134, 12	+65, 08	1
21	Colonne d'Ercole, bocca interna	138, 02	. . . .	2, 0
22	Centro di Thyle I^a.	151, 86	+65, 08	1
23	Base australe d'Atlantide I^a	159, 80	+37, 54	1
24	1° punto del Mare Cimmerio	165, 80	+37, 49	2
25	Golfo dei Titani	174, 24	+18, 17	1
26	Ultimo punto del Mare delle Sirene . . .	176, 52	+25, 34	2
27	Stretto d'Ulisse, mezzo	187, 08	+74, 08	1
28	Punto della riva australe dell'Oceano. . .	188, 15	— 7, 12	1
29	Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano .	200, 19	— 4, 50	1
30	Golfo dei Lestrigoni, intimo seno	201, 79	+18, 01	3
31	Scamandro, bocca sul Mare Cronio . . .	202, 52	+55, 41	2, 1
32	Scamandro, punto di mezzo	202, 57	+48, 98	2, 1
33	Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano. . .	205, 05	—15, 77	2
34	Base australe d'Esperia	211, 10	. . . .	1, 0
35	Capo boreale di Thyle II	221, 61	+62, 28	1
36	Centro di Thyle II.	223, 53	+69, 93	1
37	Golfo dei Ciclopi.	224, 98	+12, 43	4, 2
38	1° punto del Mar Tirreno.	226, 41	+37, 81	3
39	Centro d'Esperia.	231, 62	+22, 79	1
40	Bocca australe dello Xanto	234, 11	+51, 13	3, 2
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio	238, 87	+ 9, 85	2
42	Esperia, base settentrionale	250, 28	+13, 22	2, 1
43	Piccola Sirte	256, 94	+ 6, 24	4
44	Capo Circeo in Ausonia	266, 59	+15, 68	2
45	Punto della costa d'Ausonia.	266, 79	+22, 70	1

Numero	Denominazione	Longitud.	Latitud.	N. delle determinazioni
46	Lago Tritone	267°,15	—20°,38	3
47	Primo punto dell'Ellade.	270, 74	+49, 49	3
48	Lago Meride	277, 09	. . . .	1, 0
49	Biforcazione d'Ausonia.	282, 32	+13, 33	1
50	Congiunzione del Nepente col Nilo. . . .	286, 25	—28, 26	1
51	Gran Sirte e bocca del Nilo	290, 45	—17, 09	6, 5
52	Punto più australe dell'Ellade	. . . .	+57, 99	0, 2
53	Centro dell'Ellade	294, 12	+46, 30	4
54	Punto più boreale dell'Ellade.	. . . .	+30, 38	0, 2
55	Ultimo punto del Mar Tirreno	296, 09	— 0, 67	2, 1
56	Ultimo punto dell'Ellade	315, 07	+44, 08	4
57	Corno d'Ammone.	318, 32	+10, 40	4
58	Scilla e Cariddi.	324, 17	+20, 31	2
59	Ellesponto, punto di mezzo	326, 11	+48, 22	3, 2
60	1° punto della Noachide.	334, 82	+48, 40	2
61	Bocca del Phison nel Golfo Sabeo	338, 85	+ 5, 05	2, 1
62	Primo Corno del Golfo Sabeo.	357, 27	— 2, 37	1

34. Soggiungeremo ora alcune note relative a ciascuna delle posizioni contenute nel quadro precedente.

1. *Vertice d'Aryn.* Questo punto è determinato con molta precisione dall'estremità della lingua di terra, che divide i due seni formati dal Golfo Sabeo nella sua parte occidentale [1]. Tale lingua termina in punta acuta, e la sua forma nel 1877 era precisamente quella che Dawes avea rilevato nel 1864: onde la sua costanza sembra fuor di dubbio. Questo si crede da tutti che sia il luogo designato da Maedler colla lettera *a* [2]: sebbene egli attribuisca all'estremità del Golfo Sabeo una forma affatto diversa, probabilmente per l'insufficienza del potere ottico da lui impiegato. Come Maedler, vi ho posto lo zero delle longitudini areografiche; e secondo quest'idea gli ho applicato il nome di *Vertice* o *Cupola d'Aryn*, punto immaginario del Mare Indiano, che presso i geografi e gli astronomi arabi talora veniva assunto come origine delle longitudini terrestri [3]. Non mi è riuscito di ottenere che una sola determinazione di questo punto celebre nell'areografia; onde la posizione può esser notabilmente incerta e le longitudini da esso numerate possono contenere tutte un errore costante di qualche importanza. Al quale difetto (del resto più apparente che reale) si potrà riparare più tardi con altre osservazioni.

2. *Secondo corno del Golfo Sabeo.* È formato dalla estremità interna di un golfo terminato in punta acuta, ed è benissimo definito. Il canale che vi mette foce non è tanto facile a vedere, che da esso possa nascere alcuna notabile incertezza. Questo punto è stato nettamente riconosciuto da Kaiser e da Dawes nei loro disegni. Dei due rami del Golfo Sabeo questo è l'ultimo a presentarsi davanti all'osservatore per effetto della rotazione di Marte, ed è anche l'ultimo nell'ordine delle longitudini: quindi il nome di *secondo* che ho pure usato altre volte in consimili occasioni.

3. *Istmo della Terra di Deucalione.* Punto determinato molto bene in longitudine, l'asse della penisola cui appartiene essendo in quel luogo quasi esattamente diretto nel senso dal meridiano. Sulla

(1) Notiamo una volta per tutte, che parlando delle regioni di Marte l'*oriente* e l'*occidente* s'intendono presi rispetto ad un osservatore che si trovi sulla superficie del pianeta. Così diremo che un punto si trova ad oriente di un altro, quando passa al centro del disco prima di quello: rispetto all'osservatore terrestre si trova ad occidente di quello. In tutti i nostri disegni l'oriente è a sinistra, l'occidente a destra, il settentrione in basso, il mezzodì in alto, secondo la posizione che gli oggetti hanno nel cannocchiale astronomico.

(2) Vedi la sua carta del 1830. *Astronomische Nachrichten* n. 191.

(3) Vedi fra altri Santarem, in molti luoghi del suo *Essai sur l'histoire de la cosmographie et de la cartographie de moyen âge*, specialmente Vol. III p. 309 e seguenti.

carta esso si trova alquanto fuori dell'asse della penisola, per la necessità di tener conto della posizione dei punti circostanti, colla quale esso non concorda in conseguenza di errori di osservazione.

4. *Terra di Deucalione, confine dell'ombra.* Con questo si deve intendere il punto di mezzo della linea che separa la terra ombreggiata di Deucalione dalla parte inferiore più chiara. Sulla carta la posizione non occupa esattamente il mezzo, a causa delle incongruenze inevitabili nelle osservazioni di tanti punti vicini, dei quali tutti bisogna tener conto. Il confine fra il chiaro e l'oscuro fu da me veduto come linea affatto precisa, ma non è sempre facile a riconoscere. Onde l'osservazione di questo punto sarà sempre alquanto scabrosa, dato pure che nel detto confine non abbiano luogo variazioni.

5. *Golfo delle Perle, Bocca dell'Indo.* Punto bene definito in longitudine dall'ampia foce del canale detto Indo: ma non altrettanto bene in latitudine. Questo è uno dei quattordici punti di Maedler, dal medesimo segnato colla lettera (c). Le mie osservazioni si accordano poco bene in longitudine.

6. *Bocca dell'Idaspe.* Indentatura molto visibile, foce stretta e bene determinata in ambe le coordinate. La posizione del catalogo presenta qualche discordanza coi punti vicini.

7. *Capo degli Aromi.* Promontorio assai bene definito, e specialmente in longitudine per esser precisamente sul mezzo dell'istmo, per cui la penisola oscura di Pirra si attacca al continente di Chryse. Forse la posizione dal catalogo assegnata è un po' troppo boreale. Nel tracciare la carta mi sono attenuto a questa e alle posizioni precedenti il più che si poteva senza far troppa violenza alla vera configurazione quale risulta dai disegni fatti ad occhio.

8. *Capo delle Ore.* Punto prominente e di sicura identificazione nella parte nord-ovest della grande isola d'Argyre.

9. *Capo delle Grazie.* Estremità occidentale e ben determinabile dell' isola d' Argyre, ed ultimo punto della medesima (cioè quello che ultimo si presenta nel passaggio al meridiano centrale ed ha la massima longitudine).

10. *Golfo dell'Aurora, bocca del Gange.* A cagione della larghezza del canale chiamato Gange e del suo allargarsi verso la foce questo punto non si può definire che con precisione mediocre, tuttavia sufficiente in pratica. Sembra identico al punto (k) della carta di Kaiser, annessa al Tomo III delle *Osservazioni di Leyda.*

11. *Punta dell'Aurea Cherso.* Ben determinata, ma non riconoscibile che nelle più eccellenti condizioni di atmosfera a cagione della difficoltà di vedere il canale che separa l'Aurea Cherso da Thaumasia.

12. *Primo punto di Thaumasia.* Ben definibile in longitudine, ma solo tutte le volte che si vede distintamente la separazione dell'Aurea Cherso. Circa il nome di *primo punto* occorre qui l'osservazione fatta al § 31. La latitudine è molto indeterminata, come l'aspetto della carta dimostra.

13. *Confluente del Chrysorroas col Nilo.* Il Chrysorroas essendo stato da me veduto in questa parte una volta sola il 4 novembre, e l'osservazione essendo stata fatta in circostanze non molto felici, non posso dire qual grado di fede si meriti la posizione data nel catalogo. I disegni fatti indicherebbero per questo punto una posizione alquanto più orientale.

14. *Lago del Sole.* Il centro del lago circolare così denominato è forse in tutta la superficie di Marte il punto meglio definibile e meglio osservabile in ambe le coordinate. Le mie osservazioni si accordano bene tanto fra loro, quanto coi risultati di Maedler e di Kaiser, i quali designano questo punto colla lettera (d). Sarebbe quindi forse stato opportuno assumerlo come origine delle longitudini dietro l'esempio di Kaiser: ma il suo aspetto attuale presenta qualche differenza con quello che Dawes, Lockyer, e Kaiser figurarono nel 1862 e nel 1864, e vi è qualche indizio probabile di variazioni avvenute, siccome a suo luogo sarà detto. Per questo ho preferito il vertice d'Aryn, il quale è meno comodo, ma sembra più stabile di forma.

15. *Lago della Fenice.* Punto importante nella topografia di questa regione per le multiple comunicazioni, che il lago della Fenice ha coi mari e coi canali circostanti. Si può determinare con molta esattezza malgrado che la sua tinta poco oscura presenti qualche difficoltà all'osservazione.

16. *Bocca del Fasi.* Questa bocca si va allargando verso il sud in forma di tromba, così che soltanto la longitudine si può determinare con precisione. La posizione assegnata dal catalogo è probabilmente troppo australe.

17. *Colonne d'Ercole, bocca esterna.* Il canale detto *Colonne d'Ercole* fu sempre facile a vedere in

qualunque occasione e la sua foce nel mare Australe è ben definita. Quindi la posizione si può determinare con facilità.

18. *Centro d'Icaria.* Geometricamente parlando questo punto parrebbe molto indeterminato, ma i limiti dell'incertezza riescono assai stretti in pratica, la regione d'Icaria essendo non molto grande, di forma pentagona quasi regolare, e determinata con precisione da tutte le parti.

19. *Primo punto del Mare delle Sirene, bocca dell'Arasse.* Questo è il punto (p) di Maedler e di Kaiser, e forma il principio della lunga serie di mari interni che si succedono sul pianeta per quasi 180° di longitudine. Esso è facile ad osservare anche nelle condizioni mediocri d'atmosfera, formando ivi il Mare delle Sirene un golfo assai profondo ed acuto, ch'è l'imboccatura del sottile e tortuoso canale detto Arasse. Quest'ultimo non si distingue che nell'aria buona.

20. *Primo punto di Thyle I.*ª Essendo quest'isola di forma grossolanamente rotonda, il suo primo punto sarà meglio definito in longitudine che in latitudine: tengasi qui conto dell'osservazione generale del § 31. Tutte le determinazioni relative alle isole di Thyle Iª e Thyle IIª furono molto difficili.

21. *Colonne d'Ercole, bocca interna.* Punto facile a vedere e a determinare. L'aver ommesso la misura della latitudine fu una dimenticanza.

22. *Centro di Thyle I.*ª Praticamente questo punto non lascia molta incertezza, quando si riesca a veder bene l'isola, che è quasi rotonda, e si projetta sul piano visuale come una ellisse oblunga. Sulla projezione di Mercator la posizione del punto 22 è molto eccentrica rispetto all'isola, ma ciò proviene dalla deformità che la detta projezione introduce, e che è molto sensibile nelle regioni prossime al polo.

23. *Base australe d'Atlantide I.*ª S'intende il punto di mezzo di questa base, preso lungo la linea ideale che congiunge le rive australi del Mare Cimmerio e del Mare delle Sirene. Punto di facile osservazione.

24. *Primo punto del Mare Cimmerio, bocca settentrionale del Simoe.* Assai ben definito e non difficile ad osservare. Il canale Simoe che vi sbocca non è però facile a distinguere.

25. *Golfo dei Titani.* È l'angolo settentrionale del Mare delle Sirene, molto distinto per la bocca del fiume o canale dei Titani che vi si trova. Punto facilmente osservabile anche in aria mediocre. Maedler lo ha abbastanza bene indicato sulla sua carta, dov'è distinto colla lettera (r).

26. *Ultimo punto del Mare delle Sirene.* Questo è il fondo d'un golfo formante un angolo quasi retto, e dovrebbe esser determinabile con esattezza. Tuttavia, se l'esistenza del golfo non è dubbia, il punto preciso del suo fondo non si è mai potuto vedere da me distintamente. In tutta la regione compresa fra questo golfo e quello dei Lestrigoni, la quale abbraccia anche l'istmo settentrionale della penisola Atlantide Iª, ho sempre trovato una certa confusione di tinte, e contorni poco precisi. Nuove osservazioni in aria ottima e con forti ingrandimenti sono richieste. Questo nostro punto 26 si trova sulla carta di Kaiser, dov'è indicato colla lettera (t).

27. *Stretto d'Ulisse, punto di mezzo.* Qui l'indeterminazione apparente è molto diminuita dalla forma press'a poco circolare delle due isole di Thyle. Forse la posizione assegnata nel catalogo dietro un'unica osservazione è troppo prossima al polo australe del pianeta. La difficoltà di misurar questo punto è pari a quella di vedere nettamente lo Stretto d'Ulisse, ciò che due sole volte mi è avvenuto.

28. *Punto della riva australe dell'Oceano.* Determinazioni di pochissima esattezza fatta sopra un punto non ben definito. Il limite dell'Oceano appena si poteva discernere con grande sforzo d'occhio.

29. *Fiume dei Lestrigoni, bocca sull'Oceano.* Osservazione assai poco sicura, fatta unicamente per non lasciar tutto all'arbitrio dell'occhio il tracciamento di questa regione.

30. *Golfo dei Lestrigoni, intimo seno.* Determinabile con qualche precisione, malgrado l'incertezza di forma e di tinte che ho trovato sempre sugli istmi boreali delle due Atlantidi.

31. *Bocca dello Scamandro nel Mare Cronio.* Punto preciso e facile a vedere anche in aria mediocre.

32. *Punto di mezzo dello Scamandro.* La forma quasi rettilinea di questo canale dà una certa sicurezza anche alla presente determinazione.

33. *Fiume dei Ciclopi, bocca sull'Oceano.* Appena traveduto e determinato alla meglio che si poteva. Più tardi divenne assai visibile, ma le misure eran divenute impossibili per la troppa piccolezza del disco apparente del pianeta.

34. *Base australe d'Esperia.* S'intende il mezzo dell'istmo, considerato sulla linea ideale che

unisce le rive australi del Mar Cimmerio e del Mar Tirreno. Malgrado la differenza di 20° nelle longitudini, questo è certamente il punto (m) di Maedler. Determinabile abbastanza bene in ambe le coordinate.

35. *Capo boreale di Thyle II.* Difficile a vedere: ma veduto, facile a determinare malgrado le forme rotondeggianti dell'isola. Questo capo forma, insieme colla sporgenza australe di Eridania, lo stretto di Tifi, che si può considerare come termine del Mare Cronio. Maedler ha in questo luogo il suo punto (q).

36. *Centro di Thyle II.* Valgono qui le osservazioni fatte al n. 22 sul centro di Thyle I.

37. *Golfo dei Ciclopi.* Uno dei punti più salienti di tutta questa regione, per la facile visibilità del fiume dei Ciclopi, che ivi mette foce nel Mare Cimmerio. La determinazione è precisa, e si può fare anche in aria mediocre.

38. *Primo punto del Mar Tirreno.* È il fondo ben pronunziato di un bel golfo, facile a vedere e a misurare. Qui, come in altri casi, l'incertezza cui si accenna nel § 31 non ha che un trascurabile effetto.

39. *Centro d'Esperia.* Punto mal definito, a cagione della forma irregolare e tortuosa di questa penisola. Sembra poi che l'unica determinazione fattane non si accordi molto colle posizioni dei punti circonvicini, e in causa di questa contraddizione il punto 39 della carta, invece che al centro d'Esperia, è venuto a collocarsi sulla costa orientale di essa.

40. *Bocca australe dello Xanto.* Punto preciso, facilmente visibile, e che sembra determinato anche accuratamente.

41. *Ultimo punto del Mare Cimmerio.* Valgono qui le osservazioni fatte pel n. 40. Il fiume Etiopico che qui ha foce non è sempre facile a distinguere; ma il punto stesso è sempre ben visibile, per poco che l'aria sia buona. Ed anche lo troviamo nelle carte di Maedler e di Kaiser, dov'è segnato colla lettera (n).

42. *Base settentrionale di Esperia* (punto di mezzo). In longitudine questo è uno dei luoghi meglio determinati, ed anche l'osservazione ne è facilissima. Ciò malgrado le due osservazioni che ne ho ottenuto si accordano piuttosto male fra loro e il luogo che ne risulta non concorda bene con quelli dei punti 41 e 43 fra i quali dovrebbe occupare in longitudine una posizione esattamente intermedia.

43. *Piccola Sirte.* Punto meglio determinato nell'aria mediocre, che nella buona: a cagione dell'ampia foce del fiume Lete, che vi forma un seno allargantesi a foggia di tromba, e nel quale è difficile additare il segno, che indica il vertice dell'ampio golfo formato dalle coste d'Esperia e di Libia. Quindi le differenze notabili fra le quattro osservazioni di latitudine. Questo è il punto (o) delle carte di Maedler e di Kaiser.

44. *Capo Circeo in Ausonia.* Promontorio notabilissimo, che occupa rispetto all'Ausonia di Marte precisamente la stessa posizione che il Capo Circeo dell'Ausonia terrestre. È situato proprio di fronte alla piccola Sirte e l'uno e l'altro segnano un angolo nelle rive parallele dell'ampio canale detto Mar Tirreno. Le due posizioni furono ottenute a 31 giorni d'intervallo, e si accordano bastantemente fra loro.

45. *Punto sulla costa Adriatica d'Ausonia.* Non bene definito: sembra inoltre che l'unica osservazione fattane non sia riuscita troppo felice, essendo impossibile far passare le coste d'Ausonia per la posizione del catalogo, senza far troppa violenza ai disegni ed alle posizioni dei punti fondamentali circonvicini.

46. *Lago Tritone.* Benissimo definibile in ambe le coordinate a cagione della poca ampiezza Questo è indubitatamente il punto segnato (g) sulla carta di Maedler, e si può osservare abbastanza facilmente.

47. *Primo punto dell'Ellade e bocca dell'Euripo nel Mare Adriatico.* Delle tre misure di questo punto due furono fatte in aria mediocre il 12 e il 13 settembre, e si trovano citate col nome d'*Istmo dell'Ellade,* parendomi allora, che questa regione fosse connessa con Ausonia. Soltanto più tardi venni a scoprire l'esistenza dell'Euripo in questo luogo. L'accordo delle 3 misure dunque non prova che il punto sia stato bene osservato. Esso deve coincidere press'a poco con (h) della carta di Maedler.

48. *Lago Meride.* Questo piccolissimo bacino costituisce un punto della massima precisione nel

suo centro, attesa la sua forma di un quadrato arrotondato: ma non si può vedere che nelle condizioni più perfette d'atmosfera.

49. *Biforcazione d'Ausonia.* Il vertice orientale del triangolo oscuro compreso fra i due rami in cui termina a nord-ovest la gran regione d'Ausonia si va affilando in modo, da offrire un punto nerissimo ed ottimamente definito.

50. *Congiunzione del Nepente col Nilo.* La punta d'Osiride che si trova in tal confluenza è ben distinguibile soltanto nell'aria buona. In longitudine è del resto benissimo osservata, ma per la latitudine bisogna aspettare un'altra opposizione di Marte, in cui si presenti alla vista meno obliquamente.

51. *Gran Sirte e bocca del Nilo.* È il vertice boreale di un gran golfo conosciuto fin dai tempi di Hooke e di Huygens. Benissimo definito in longitudine, ma non altrettanto bene in latitudine a cagione del progressivo allargarsi che qui fa la foce del Nilo. Secondo che la visione è più o meno distinta questo vertice appare più o meno innoltrato verso settentrione. Questo punto è designato colla lettera (f) nelle carte di Maedler e di Kaiser.

52. *Punto più australe dell'Ellade.* Per la forma rotondeggiante della vasta regione detta Ellade questo punto non è ben definibile in longitudine. L'espressione *australe* qui si deve riferire alla macchia nevosa presa come polo, secondo quanto fu avvertito al § 31.

53. *Centro dell'Ellade.* Ottimamente determinabile a cagione della forma quasi circolare dell'Ellade. Si noti che il *centro* è stato stimato rispetto alla projezione obliqua secondo cui l'Ellade si presentava all'osservatore. Quindi si spiega come questo punto non è esattamente intermedio fra 52 e 54, come dovrebbe essere: vi sono inoltre gli inevitabili errori di osservazione. Esso è certamente identico al punto (z) della carta di Maedler.

54. *Punto più boreale dell'Ellade.* Vedi l'osservazione relativa al n. 52.

55. *Ultimo punto del Mar Tirreno.* È costituito dal luogo, dove l'Enotria, cioè il ramo settentrionale della biforcata Ausonia, viene a morire quasi in contatto colla costa d'Aeria. Ben definibile in ambe le coordinate. Le osservazioni son del 12 e del 13 ottobre, ma il punto si è potuto riconoscere anche in novembre ed in dicembre, così che se qui han luogo variazioni, sono certamente lentissime. Veggasi del resto la descrizione d'Ausonia nella parte III di questa Memoria.

56. *Ultimo punto dell'Ellade.* Ben definito in longitudine, ma meno in latitudine, come del resto le misure stesse fanno vedere, assai più concordi nella prima, che nella seconda coordinata. Rammento l'osservazione del § 31.

57. *Corno d'Ammone.* Uno dei promontorî più belli del pianeta, importante anche per la sua posizione fra il Golfo Sabeo e la Gran Sirte. Esso non forma una punta molto acuta, ma è tuttavia sempre ben discernibile pel contrasto fra lo splendore del continente d'Aeria e l'oscurità del mare attiguo. Nei suoi studî sopra Marte il celebre geologo Phillips ha adottato questo punto per origine delle longitudini areografiche [1]. Maedler e Kaiser lo designano sulle loro carte colla lettera (e).

58. *Scilla e Cariddi.* Le estremità ombreggiate dell'Ausonia e della Terra di Deucalione formano, rivolgendosi l'una contro l'altra, una specie di passaggio o stretto, di cui questo sarebbe il punto di mezzo. A cagione della sfumatura in cui terminano le due terre e della conseguente indeterminazione dei loro contorni non può questa posizione riguardarsi nè come ben definita, nè come utile ad osservarsi ulteriormente, malgrado l'accordo delle misure che io ne ho fatte.

59. *Ellesponto, punto di mezzo.* Sebbene le 3 misure di questo punto si accordino in apparenza assai bene, tuttavia la posizione che ne deriva non merita alcuna fiducia. Infatti nei giorni 10, 12, 13 ottobre e per molto tempo prima e dopo la Noachide fu coperta di nebbia fortemente illuminata dal Sole: ciò che qui ho chiamato Ellesponto era il canale fra l'Ellade e quella massa di nebbia. Più tardi in dicembre la Noachide si scoperse ed apparve qual è realmente, cioè una lingua oscura di colore poco più chiaro che il mare circostante. Il pianeta allora era troppo lontano per tentare misure così difficili. Il nostro punto 59 deve dunque press'a poco giacer in mezzo al canale formato dalla terra brillante dell'Ellade e dalla terra oscura della Noachide, non tenendo conto dell'altra terra oscura che contorna l'Ellade dal lato di occidente.

(1) *Proceedings of the Royal Society.* Vol. XII (1863) p. 431.

60. *Primo punto della Noachide.* Queste misure furono prese su di una massa di nebbia illuminata che copriva allora la Noachide, imitandone probabilmente abbastanza male il vero contorno. Perciò la posizione non merita molto maggior fiducia che la precedente del punto n. 59.

61. *Bocca del Phison.* Ben definito, ma non facile ad osservare nel 1877.

62. *Primo corno del Golfo Sabeo.* Ottimamente determinato in ambe le coordinate. Veggasi quanto si è detto al n. 2 rispetto all' altro corno del Golfo Sabeo.

Sezione II.

Comparazione delle posizioni precedenti con quelle ottenute da Maedler e da Kaiser.

35. Nel volume VIII delle *Astronomische Nachrichten*, p. 448 il sig. Maedler ha pubblicato un catalogo di 14 posizioni areografiche da lui determinate durante l'opposizione del 1830, la quale avvenne in circostanze molto simili a quella del 1877, così in riguardo alla distanza del pianeta dalla Terra, come rispetto all' inclinazione del suo equatore sulla linea visuale. L' istrumento impiegato aveva meno di 4 pollici francesi d'apertura, e le posizioni furono dedotte da disegni fatti a semplice vista. La Memoria di Maedler è accompagnata da una carta, dove è indicata la relazione dei punti sopradetti colla figura delle macchie circostanti. L' esame di questa carta mi ha dato il modo di identificare senza alcuna dubbiezza 12 dei 14 punti con altrettanti del mio catalogo. Dei due rimanenti uno è troppo indeterminato sulla carta di Maedler, per poter cavarne una identificazione sicura : l'altro riguarda una macchia da me non misurata. Il risultato della comparazione è dato nella tavoletta seguente, ove con M sono indicate le posizioni di Maedler, le nostre con S.

Comparazione dei nostri risultati con quelli di Maedler.

N° di S.	Nome di S.	Lettera di M.	Longit. di M.	Longit. di S.	Differ. M—S semplice	Differ. M—S ridotta	Lat. M.	Lat. S.	Diff. M—S
1	Vertice d' Aryn	(*a*)	0°,0	0°,00	± 0°,00	+ 1°,20	+ 7°,0	+ 4°,56	+2°,44
5	Golfo delle Perle	(*c*)	13, 0	23, 59	—10, 59	— 9, 39	— 8, 0	— 4, 90	—3, 10
14	Lago del Sole	(*d*)	91, 0	90, 24	+ 0, 76	+ 1, 96	+26, 5	+25, 22	+1, 28
19	Primo punto del Mare delle Sirene	(*p*)	123, 5	131, 37	— 7, 87	— 6, 67	+40, 0	+31, 32	+8, 68
25	Golfo dei Titani	(*r*)	183, 0	174, 24	+ 8, 76	+ 9, 96	+23, 0	+18, 17	+4, 83
34	Base superiore d'Esperia . . .	(*m*)	234, 0	211, 10	+22, 90	+24, 10	+32, 0	+40, 00	—8, 00
35	Punto più boreale di Thyle II .	(*q*)	239, 0	221, 61	+17, 39	+18, 59	+62, 0	+62, 28	—0, 28
41	Primo punto del Mare Cimmerio	(*n*)	236, 6	238, 87	— 2, 27	— 1, 07	+ 5, 0	+ 9, 85	—4, 85
43	Piccola Sirte	(*o*)	263, 0	256, 94	+ 6, 06	+ 7, 26	+ 3, 7	+ 6, 24	—2, 54
47	Primo punto dell'Ellade . . .	(*h*)	262, 0	270, 74	— 8, 74	— 7, 54	+43, 0	+49, 49	—6, 49
51	Gran Sirte	(*f*)	284, 0	290, 45	— 6, 45	— 5, 25	—11, 0	—17, 09	+6, 09
57	Corno d' Ammone	(*e*)	326, 7	318, 32	+ 8, 38	+ 9, 58	+19, 4	+10, 40	+9, 00

36. Rispetto alla tavola qui annessa delle differenze sono da osservare queste cose. Maedler ha adottato per origine delle longitudini un punto, che, come già fu detto, si può considerare come identico al vertice d'Aryn: ma ha fatto crescere le longitudini da occidente verso oriente in senso contrario al nostro. Dette μ, σ le identiche longitudini del medesimo punto secondo le notazioni di Maedler e mia, si ha fra esse la relazione $\mu + \sigma = 360°$: e con questa formula ho ridotto le longitudini di Maedler ad esser comparabili colle mie. Le differenze M — S delle longitudini della 6ª colonna contengono ancora l'errore costante occorso nel determinare il principio di numerazione: per eliminarlo si è fatto la media delle differenze M — S (escluse due, di cui parlerò or ora) e questa media — 1°, 20 sottratta da tutte le differenze M — S ha dato le differenze *ridotte* della 7ª colonna, che debbonsi riguardare come espressione della vera discordanza fra Maedler e me.

37. In generale queste discordanze, come pur quelle della latitudine, non sorpassano molto quel limite, che si può aspettare da siffatte osservazioni e mostrano, che in 47 anni la superficie del pianeta ha conservati inalterati i suoi tratti principali. Vi sono però nelle longitudini due discordanze che superano l'aspettazione. L'uno concerne il termine occidentale del Mare Cronio, contiguo al nostro punto 35, che è il capo più boreale di Thyle IIª: e che mi sembra identico al punto (*q*) di Maedler. La discordanza apparente delle longitudini è di 18°, 59: ma siccome la latitudine è di 62 gradi secondo ambidue gli osservatori, la vera differenza in arco di circolo massimo arriva a soli 8°, 89, quantità che ancora si può ammettere come procedente dagli errori dell' osservazione. L'altra differenza riguarda l'istmo australe della gran penisola Esperia (n. 35 del mio catalogo = (*m*) di Maedler) che secondo l'autore tedesco sarebbe di 24°, 10 più avanzato in longitudine di quanto porta la mia determinazione. Non saprei quale spiegazione plausibile dare di questo fatto: ma non credo che esso basti a provare una mutazione avvenuta nell' intervallo. Forse una parte della differenza è dovuta al modo diverso di considerare l' istmo in questione. Se per esempio sulla mia carta si prenda per istmo il punto di massimo stringimento della penisola, la longitudine diventa di 228° circa, e la discordanza si riduce a 6 gradi.

38. Più soddisfacente ancora è il risultato della comparazione dei nostri numeri con quelli ottenuti (sempre dietro disegni fatti a vista) nel 1862 a Leyda dal prof. Kaiser, e pubblicati negli *Annali dell' Osservatorio di Leyda* Tomo III, pag. 54. Il catalogo di Kaiser comprende 11 punti, dei quali con tutta sicurezza si poterono identificare 8 coi nostri. Kaiser ha collocato l'origine delle sue longitudini nel centro del Lago del Sole, che secondo lui dista dal vertice d'Aryn 88°, 8 verso occidente: egli numera come Maedler le longitudini in senso contrario al nostro. Dette $\varkappa$ σ le longitudini del medesimo punto espresse nel modo di Kaiser e nel nostro, si ha la relazione $\varkappa + \sigma = 88°, 8$, ovvero $\varkappa + \sigma = 448°, 8$. Trasformate in tal modo le sue longitudini e ridottele al nostro modo di numerazione, si ebbe per la comparazione dei risultati la tavoletta seguente: dove le lettere di Kaiser nella terza colonna sono identiche a quelle che Maedler ha usato per gli identici punti.

Comparazione dei nostri risultati con quelli di Kaiser.

N° di S.	Nome di S.	Letter. di K.	Long. di K.	Long. di S.	Differ. K—S appar.	Differ. K—S ridotta	Lat. di K.	Lat. di S.	Differ. K—S
1	Vertice d'Aryn	(*a*)	0°,0	0°,00	±0,00	—2°,25	+ 5°,8	+ 4°,56	+1°,24
10	Bocca del Gange.	(*k*)	65, 0	55, 74	+9, 26	+7, 01	+ 7, 3	+ 2, 32	—4, 98
14	Lago del Sole	(*d*)	88, 8	90, 24	—1, 44	—3, 69	+26, 4	+25, 22	+1, 18
19	Primo .punto del Mar delle Sirene	(*p*)	132, 7	131, 37	+1, 33	—0, 88	+34, 3	+31, 32	+2, 98
26	Ultimo punto del Mar delle Sirene	(*t*)	172, 8	176, 52	—3, 72	—5, 97	+22, 0	+25, 34	—3, 34
41	Ultimo punto del Mare Cimmerio	(*n*)	245, 0	238, 87	+6, 13	+3, 88	+10, 0	+ 9, 85	+0, 15
51	Gran Sirte, bocca del Nilo . . .	(*f*)	294, 0	290, 45	+3, 55	+1, 30	—26, 3	—17, 09	—9, 21
57	Corno d'Ammone	(*e*)	321, 0	318, 32	+2, 88	+0, 63	+16, 9	+10, 40	+6, 50

39. Nella colonna sesta le differenze di longitudini K — S contengono ancora la parte costante o comune +2°, 25 la quale fu sottratta da tutte, dando così origine alla colonna settima delle differenze *ridotte*, che esprimono le vere discordanze fra Kaiser e me. Tanto queste come quelle delle latitudini sono molto minori ancora, che nel paragone con Maedler, e probabilmente l'accordo avrebbe guadagnato ancora, quando Kaiser avesse tenuto conto della non coincidenza della calotta polare col polo del pianeta. La differenza più importante è nella latitudine della Gran Sirte, latitudine che è difficile definire con precisione a causa della forma appuntata di questo golfo nella parte boreale, dove vi mette foce il Nilo (vedi sopra la descrizione dei punti fondamentali, § 34, n. 51).

Sezione III.

Costruzione della carta areografica.

40. Delineati sulla projezione i punti fondamentali secondo le coordinate del quadro § 33, il tracciamento delle linee e delle ombre che formano la carta propriamente detta fu compiuto usando dei disegni fatti a vista coll' occhio all' oculare. Questi furono di due specie: cioè dischi completi in numero di 31 e schizzi parziali di qualche particolar regione del disco in numero di circa 100. È avvenuto molte volte, che un istante di aria ottima permettesse di scoprire qualche nuova minutissima particolarità non indicata nel disegno generale: oppure dimostrasse qualche correzione da farsi a disegni anteriori. In tali casi non si perdettero i preziosi istanti a ripetere l' intero disco, ma si limitò lo schizzo a quelle parti, che nel dato momento importava di considerare. Molte volte uno schizzo fatto non essendo sembrato soddisfacente, ne fu fatto un altro od anche più altri di seguito fino a che la rassomiglianza fosse completa. In tutte queste pitture si cercò più l'accuratezza dei minuti particolari, che l'esatta proporzione delle grandi masse. Tale proporzione è dal catalogo dei punti fondamentali assicurata in modo assai più certo, che non

dalla stima dell' occhio, agevolmente turbato dal continuo cambiamento che la rotazione del pianeta induce nell' aspetto del disco visibile.

41. Nella seguente lista è indicata per ciascuno dei disegni completi la data, la longitudine ω del centro del disco corrispondente all' istante medio in cui il disegno fu fatto, la qualità dell' aria, e il diametro apparente del disco, secondo l' effemeride tante volte citata di Marth.

Numero d' ordine	Data 1877		ω	Qualità dell'aria	Diametro apparente di Marte
I	Agosto	23	100°	pessima	24″,3
II	»	28	75	id.	24, 6
III	Sett.	3	20	id.	24, 8
IV	»	10	280	buona	24, 5
V	»	10	294	id.	24, 5
IV	»	11	265	id.	24, 4
VII	»	12	249	id.	24, 3
VIII	»	13	254	id.	24, 2
IX	»	14	205	id.	24, 1
X	»	15	227	id.	24, 0
XI	Sett.	15	256	buona	24, 0
XII	»	16	230	id.	23, 9
XIII	»	18	181	mediocre	23, 6
XIV	»	20	152	buona	23, 3
XV	»	22	133	ottima	23, 0
XVI	»	24	107	id.	22, 7
XVII	»	26	84	id.	22, 3
XVIII	»	30	67	mediocre	22, 0
XIX	Ott.	1	98	cattiva	21, 4
XX	»	2	19	ottima	21, 2
XXI	Ott.	4	356	ottima	20, 8
XXII	»	10	307	buona	19, 7
XXIII	»	12	304	ottima	19, 2
XXIV	»	13	328	buona	19, 0
XXV	»	14	298	ottima	18, 8
XXVI	»	27	166	id.	16, 4
XXVII	»	28	138	mediocre	16, 2
XXVIII	Nov.	4	82	buona	15, 0
XXIX	Dic.	25	245	id.	9, 1
XXX	»	28	237	id.	8, 9
XXXI	»	30	210	ottima	8, 7

42. Secondo la colonna dei diametri il miglior tempo per l' esplorazione del pianeta avrebbe dovuto essere nei mesi di agosto e di settembre. Invece le vedute del mese di ottobre furono in generale le migliori, quando già il diametro più non prendeva che 16″ a 20″: e le esplorazioni più delicate appartengono tutte esclusivamente a questo mese, durante il quale in alcune serate veramente rare e stupende fu possibile profittare di tutto il potere definiente del nostro Refrattore di Merz. Nè affatto inutili furono le osservazioni fatte nei mesi seguenti sino al marzo 1878,

siccome la descrizione delle regioni di Marte nella parte III di questa Memoria farà vedere. Io posso dunque colla mia esperienza confermare quanto già fu asserito da altri astronomi: per le ricerche areografiche la qualità dell'aria essere un elemento di gran lunga più importante, che il diametro apparente del disco. Ne segue il corollario, che si può sperare di far buoni lavori sulla topografia di Marte anche in quelle opposizioni, che non cadono nei punti del massimo avvicinamento possibile fra Marte e la Terra.

43. Dopo questa enumerazione del materiale areografico da noi raccolto per l'interpolazione delle minute particolarità fra le posizioni fondamentali nessuno si aspetterà una pubblicazione integrale dei disegni originali. Non dei dischi completi: i quali non sempre furono presi nei momenti migliori, e spesso mancano di quei particolari più minuti e più difficili che furono oggetto di soli schizzi parziali nei momenti sempre brevissimi di ottime immagini. Neppure di questi schizzi: i quali non sono per lo più che frammenti mancanti d'ogni orientazione, e troppo numerosi, e talvolta intelligibili nella loro vera significazione soltanto a chi li ha fatti. Lo scopo loro era di fissare rapidamente la memoria su quanto s'era veduto negli intervalli in cui il cannocchiale sembrava operar meglio del consueto, intervalli preziosi, e che sarebbe stato follia consacrarne ad altro, che a minute e diligenti ispezioni degli oggetti più difficili a constatare e ad interpretare. Ciò che noi invece offriamo è quel risultato, che ci parve più certo o almeno più probabile dell'esame comparativo di tutti i disegni fatti così generali come parziali, esame aiutato dalle rapide note che continuamente si andavano scrivendo. Per lo più il conseguimento di questo risultato non ha offerto dubbî, i varî disegni della medesima regione confermandosi reciprocamente, o servendo taluno a correggerne altri fatti in meno buone condizioni di visione. Qualche volta ho trovato contraddizioni e dubbiezze: ed in questi casi le ho esposte fedelmente in quella sezione della parte III che riguarda la descrizione della regione o dell'oggetto su cui versa l'incertezza. Spero che in questa maniera avrò ad un tempo conciliato il dovere di rigorosa verità con l'obbligo di non presentare al lettore una massa indigesta e inordinata di rozzi materiali.

44. Per mostrar tuttavia il modo tenuto nelle delineazioni riproduco nella Tavola II copia esatta di quattro fra i dischi completi, cioè dei numeri XX, XVII, XIII e XXV, corrispondenti ad istanti, in cui la longitudine areografica del centro del disco era di gradi 19, 84, 181, 298. Fra tutti quattro essi comprendono press'a poco tutta la superficie del pianeta visibile nell'opposizione del 1877. Si vedrà che in essi mancano molti particolari notati sulla carta, particolari che non erano visibili quando quei disegni furono fatti. Il disegno XVII poi è colla carta in aperta contraddizione presentando un'appendice luminosa a sinistra della regione Thaumasia, dove la carta ha soltanto un'isoletta di colore oscuro, detta Terra di Proteo. Tale appendice luminosa era una massa di nubi illuminate, che in quel momento copriva la Terra di Proteo. Simile contraddizione in scala anche maggiore si vede nel disegno XX in riguardo della grande isola d'Argyre, che sta in alto: e la spiegazione è qui ancora la stessa, siccome si dirà a suo luogo.

45. Io devo ora aggiungere qualche parola sul modo tenuto nell'adattare le figure dei disegni alla rete dei punti fondamentali. Questi furono collocati sulla

carta (Tav. III) precisamente nelle posizioni indicate dal loro catalogo. L'operazione conseguente dell'interpolazione dei minuti particolari fra quei punti è riuscita nel più dei casi senza difficoltà. Ma tuttavia è accaduto qualche volta (specialmente nei luoghi dove si hanno più punti fondamentali molto vicini fra loro) che non fu possibile combinare le posizioni di alcuni punti meno bene determinati col tracciamento dei disegni, senza far troppa violenza a questi. Allora si è cercato di adattare il tracciamento ai numeri fondamentali non esattamente, ma entro i limiti dell'errore a cui si può supporre, che i punti refrattarî sian soggetti. I principali fra questi casi riguardano i punti 7, 16, 22, 27, 36, 39, 45, 59 e 60, sui quali già le riflessioni occorrenti sono state esposte nel § 34. Lavori ulteriori nelle prossime opposizioni di Marte, accrescendo l'esattezza del catalogo, potranno far sparire, almeno in parte, queste leggere contraddizioni.

46. La nostra carta principale sta nella Tavola III annessa a questa Memoria, ed è in projezione di Mercator. Perchè fosse manifesta dovunque la connessione delle varie regioni fra loro, una parte delle regioni di destra è ripetuta a sinistra del foglio. La parte boreale è stata troncata al 40° parallelo, al di là del quale non si potè far osservazioni sicure. Affinchè poi si abbia una idea esatta della disposizione delle regioni prossime al polo australe, si è aggiunta nella Tav. IV una projezione stereografica polare dell'emifero sud. Tanto questa projezione, come l'altra non danno che i contorni, sono cioè carte nel vero senso della parola, e non riproducono la varietà delle tinte e dei colori che nel pianeta realmente si osservano. Onde corrispondere almeno in parte al desiderio di colmare questa lacuna, nella Tav. V ho aggiunto quattro vedute del pianeta in projezione ortografica, le quali mostrano (ancora molto imperfettamente a dir il vero) quale si dovrebbe essere l'aspetto di Marte se non esistesse la sua atmosfera e se l'atmosfera della Terra fosse assolutamente tranquilla. Queste quattro projezioni suppongono rispettivamente che la longitudine del meridiano centrale sia di 0°, 90°, 180° e 270°, e che la latitudine del centro del disco sia di 25° australi. Corrispondono dunque tali vedute *teoriche* quasi esattamente alle configurazioni, in cui furono tracciate le quattro vedute *effettive* della Tav. II. Il paragone mostra più che qualsivoglia discorso, quanto poco si possa afferrare dei particolari del pianeta in una pittura generale, eseguita in fretta nello spazio di pochi minuti, e quanto preferibile sia l'esame paziente dei piccoli particolari fatto nei pochi momenti, che si possono ottenere, di visione veramente buona.

Circa le denominazioni usate nelle nostre carte avrò occasione di dar fra poco i necessarî schiarimenti.

Capitolo III.

Descrizione dell' emisfero australe del pianeta e di una parte dell'emisfero boreale, secondo le osservazioni fatte a Milano nel 1877 comparate con quelle di Astronomi anteriori.

Sezione I.

Generalità.

47. La parola *descrizione* premessa come titolo a questa parte non deve prendersi nel senso che si adopera parlando della superficie terrestre. Areografia completa nel vero significato della parola non esiste e non esisterà ancora per lungo tempo. Sotto quel nome io ho inteso di raccogliere e di classificare per regioni le osservazioni che ho potuto fare ricorrendo l'opposizione del 1877: di indicare il grado di certezza delle medesime, di discutere, quando occorrono, le loro incoerenze. Inoltre mi propongo di comparare i risultati ottenuti con quanto di più certo si ha per tradizione di Astronomi anteriori, constatando i punti dove reciprocamente si confermano, e indagando, dov'è possibile, le cause delle differenze numerose e spesso gravissime, che in questa comparazione s'incontrano. Premetterò alcune parole sopra le supposizioni da me adottate nell' interpretare le osservazioni fatte e sopra la nomenclatura della carta.

48. L'interpretazione dei fenomeni osservati su Marte è cosa ancora in gran parte ipotetica; essa può differire secondo i diversi osservatori, anche quando i risultati delle loro osservazioni constatano le medesime apparenze. Alcuno potrebbe anzi desiderare che si esponesse semplicemente quando si è veduto, senza far uso di interpretazione alcuna. Questo è assai difficile, per la complicazione che introduce nell' enunciato stesso delle osservazioni. Com' ebbi principiato a scrivere in presenza del cannocchiale il ricordo delle cose vedute, tosto mi avvidi della necessità di dar un nome qualunque a ciascuno degli spazî diversamente colorati, delle linee e dei punti che si osservano sul pianeta. L'insieme delle configurazioni vedute presentava tale stretta analogia con una carta delle regioni terrestri, da non lasciar dubbio alcuno sulla classe di nomi che dovevasi preferire. Qual brevità e chiarezza non induce nello scrivere l' uso delle parole *isola, istmo, stretto, canale, penisola, promontorio* ecc.? Ciascuna delle quali include per sè una descrizione e un insieme di notizie non altrimenti esprimibile che con lunghe perifrasi, da ripetersi ogni volta che si vuol parlare del corrispondente oggetto. La nostra carta dunque, come alcune altre già pubblicate, include un sistema intero di denominazioni geografiche. Le quali possono, da chi nulla voglia pregiudicare sulla natura delle macchie del pianeta, considerarsi come un semplice artifizio per aiutare la memoria e render più breve il discorso. Noi parliamo in simile modo dei *mari* della Luna, che sappiamo benissimo

non esistere come masse liquide. Intendendo la cosa in questo modo è chiaro, che i nomi da me adottati nulla nuoceranno alla fedele e rigorosa espressione dei fatti. Circa le nozioni positive che si possono ottenere sulla natura delle macchie di Marte si discorrerà nella parte IV di questo scritto, esclusivamente destinata alla trattazione di simili questioni.

49. Questo sia detto per la parte generale della nomenclatura, nella quale del resto altro non faccio, che seguire l'uso già da altri praticato senza inconvenienti. Assai men facile è giustificare la novità dei nomi di geografia poetica e di archeologia mitica impiegati a distinguere l' una dall'altra le formazioni della stessa specie. A questa fui obbligato dalla necessità. Gli astronomi, che fino ad oggi si occuparono di costruire e di perfezionare le carte areografiche seguirono nella nomenclatura sistemi diversi. Primo fu Maedler nel 1830 a distinguere alcuni punti più salienti della superficie di Marte con lettere dell'alfabeto: nel che fu seguìto ed imitato da Kaiser. Proctor invece, nella carta da lui costrutta sulle osservazioni dell'astronomo Dawes, rivestì Marte di un completo sistema di denominazioni geografiche simili a quelle da me adottate, e i nomi ricavò dai più celebri astronomi, che si occuparono del pianeta. Si trova dunque su questa carta il *Mare di Kaiser*, l'*Isola di Jacob*, lo *Stretto di Dawes*, l' *Oceano di De la Rue* ecc. Nelle mie osservazioni io credeva da principio di usare i nomi di Proctor. Ma ben presto nacque la necessità di abolirne alcuni, di sostituirvene altri e di crearne un gran numero di nuovi. Quella nomenclatura era affatto insufficiente per la quantità di nuovi oggetti che era indispensabile nominare in qualche modo, e per le modificazioni profonde che doveva subire. I quattro gran continenti di Proctor sono sminuzzati ora in una moltitudine d'isole, ed è a credere che questo lavoro di sminuzzamento progredirà ancora. Alcuni di quei mari sono eliminati dalla nostra carta, o ridotti a proporzioni insignificanti (*Mare di Main* e *Mare di Dawes*): nuovi e veri mari furono introdotti (*Mare delle Sirene, Mare Cronio*). Vi è un Oceano intiero (*Oceano di Dawes*) per cui sulla nostra carta non si trova posto. Grandi isole sono sprofondate al fondo del mare (*Isole di Phillips e di Jacob*) o ad ogni modo non sono più isole. Dunque per evitare equivoci ed abbagli ho dovuto provvisoriamente creare una nomenclatura speciale per mio proprio uso; e nello stabilirla non ho potuto indurmi a seguire il sistema di nomi personali adottato dal Proctor. Questa mia nomenclatura, fatta mentre stava lavorando al cannocchiale, e quindi probabilmente soggetta a molte imperfezioni, si conserva nella presente Memoria soltanto per poter descrivere in qualche modo quello che si è veduto. *Non intendo sollecitare per essa l'approvazione degli Astronomi, nè l'onore di passare nell' uso generale*; anzi dichiaro, esser pronto ad adottare più tardi quella, che da sufficienti autorità sarà riconosciuta come definitiva. Fin allora mi si conceda di chiamare con questi eufonici nomi, il cui suono desta nell'animo tante belle rimembranze, un insieme di cose, di cui male la memoria potrebbe ritenere la connessione e la relazione sia per mezzo di numeri o di lettere dell'alfabeto, sia torcendo ad inesatti significati i nomi esistenti sulle carte anteriori.

50. Lo studio comparativo dei rilevamenti ottenuti della superficie di Marte anteriormente al 1873 è stato già fatto con tutta la cura possibile dal dott. F. Terby di Lovanio, nella sua eruditissima *Areografia* pubblicata dall'Accademia Reale del

Belgio ([1]): il ripeterlo qui sarebbe stato opera press' a poco inutile. Anche trattando delle mie proprie osservazioni ho creduto di dover passare rapidamente su quei punti, che dalle discussioni del Terby si possono considerare come per sempre messi in chiaro. Invece ho impiegato tutta la possibile diligenza nell' esame delle cose, che al sig. Terby parvero ancora oggetto di dubbio, e di quelle altre, che ora per la prima volta si possono con qualche frutto proporre. Di molti particolari dei disegni anteriori, che prima erano stati poche volte od imperfettamente veduti, qui credo aver recato confermazione: ed anche qualche volta credo di aver dato di certe osservazioni un' interpretazione esatta, che forse prima non era possibile. Molte cose mi è avvenuto di correggere e di rettificare presso gli osservatori anteriori; e attendo che il presente lavoro, di cui nessuno meglio di me conosce i difetti, a sua volta debba esser oggetto di rettificazioni e di critiche, tale essendo la legge del progresso scientifico.

51. Le principali serie di disegni da me impiegati nella comparazione e nell'esame delle varie questioni sono (oltre a quelli, che vanno annessi alla già citata *Areografia* di Terby) le seguenti:

Per l'opposizione del 1830: Maedler, *Astronomische Nachrichten*. Vol. VIII, p.447.

Per le opposizioni del 1832 e del 1837: Maedler, *Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper*. Weimar, 1841.

Per l'opposizione del 1858: Secchi, *Memorie dell'Osservatorio del Collegio romano*. Vol. I, n. 3.

Per l'opposizione del 1862: Secchi, *Memorie dell' Osservatorio del Collegio romano*. Vol. II, n. 10. Lockyer, Rosse, Lassell nel tomo XXXII delle *Memorie della Società astronomica di Londra*. Kaiser nel tomo III degli *Annali dell' Osservatorio di Leyda*. Phillips, *Proceedings of the Royal Society*, 1863. Feb. 12.

Per l' opposizione del 1864: Kaiser nel tomo III degli *Annali dell'Osservatorio di Leyda*: Dawes, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, tom. XXV, p. 225. Franzenau, *Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien*. LI. Bd. 2e Abtheilung, p. 509.

Per l'opposizione del 1873: Knobel, *Monthly Notices of the R. Astronomical Society*. Vol. XXXIII, p. 476.

Altre minori serie di disegni fatte da Schmidt, Green, Harkness ecc. saranno citate di mano in mano che occorrerà prenderle in considerazione. Inoltre continuamente si farà riferenza alle carte del pianeta pubblicate da Maedler, da Kaiser, e da Proctor. La prima è fondata sulle osservazioni fatte nel 1830 e trovasi annessa al tomo VIII delle *Astronomische Nachrichten*. Nella seconda Kaiser ha coordinato le sue osservazioni del 1862 e del 1864; essa è pubblicata nel tomo III degli *Annali dell'Osservatorio di Leyda*. La terza è stata composta da Proctor sopra disegni di Dawes fatti in diverse epoche, particolarmente nel 1864: io ho avuto fra le mani l' edizione che va annessa all' opera di Proctor intitolata: *The Orbs around us*. Londra 1872. Di tutte queste carte si darà più esatto cenno in seguito.

([1]) *Aréographie ou étude comparative des observations faites sur l'aspect physique de la planète Mars depuis* Fontana (1636) *jusqu' à nos jours* (1873) par M. F. Terby. Mém. des Savants étrangers de l'Académie Royale de Belgique. Tome XXXIX.

SEZIONE II.

Il grande diaframma e il Corno d' Ammone.

52. Al nascere della Geografia matematica presso i Greci l'antico Dicearco pose per base della descrizione della Terra conosciuta il suo celebre *diaframma,* cioè una linea fondamentale, che correva dalle Colonne d'Ercole alle estremità orientali dell'Asia allora conosciuta, stringendosi alle rive settentrionali del Mediterraneo, al Monte Tauro, ed alle sue continuazioni verso Oriente. Una simile guida per procedere ordinatamente nella descrizione di Marte ci offre la linea sinuosa, che dal fondo della Gran Sirte va pel Corno d'Ammone a costeggiare le rive settentrionali del Mare Eritreo, e di là girando intorno alla Terra delle Meraviglie (*Thaumasia*) per le Colonne d' Ercole segue la lunga serie dei mari interni dell'emisfero australe, cioè il Mare delle Sirene, il Mare Cimmerio, il Mar Tirreno, per metter di nuovo capo alla Gran Sirte. Questa linea divide la superficie del pianeta in due parti alquanto disuguali, ed è anche obliqua al suo equatore, stendendosi dal 45° parallelo di latitudine australe al 20° di latitudine boreale. Il suo corso è alquanto irregolare, ma non meno bene servirà al presente scopo. Il grande diaframma si presenta colla massima evidenza anche al primo sguardo superficiale che si dia al pianeta, come le quattro projezioni ortografiche della Tavola V a sufficienza dimostrano; dove in generale si vedrà che al disotto di esso diaframma la superficie del pianeta è assai più luminosa e meno rosseggiante che al di sopra di esso. L'importanza di questa linea nello studio della superficie di Marte fu già riconosciuta dal geologo Phillips nel 1862 [1]. Noi la seguiremo nel senso delle longitudini incominciando dal punto chiamato *Corno d'Ammone* (long. 318°,3 lat. australe 10°,4).

53. Sebbene non formato da una punta molto acuta, il Corno d'Ammone occupa nella topografia di Marte una posizione importante e prominentissima in certe vedute del pianeta (Tav. II, disegno XXV). Il mare che lambe questa parte delle terre equatoriali di Marte è assai scuro dalla parte occidentale: ad oriente la linea delle coste è ben netta, ma a piccola distanza incominciano sul fondo oscuro chiazze più chiare formanti prolungamento della regione detta Ausonia. La terra contigua al Corno d'Ammone ed alla riva occidentale della Gran Sirte è detta Aeria (nome antico dell'Egitto) ed è il *più grande spazio luminoso continuo* che finora io abbia potuto trovare sul pianeta Marte. Durante tutto il tempo delle mie osservazioni (settembre 1877 - marzo 1878) questa regione fu sempre molto splendente, e non è stato possibile notare in esso alcuna ombra o macchia qualsiasi. Forse in parte lo

[1] *Proceed. of the R. Soc.* Vol. XII, p. 434. « A great part of the northern area appeared bright, and often reddish, as it were land, while a great part of the southern area was of the grey hue which is considered to indicate water, but relieved by various tracts of a tint more or less approaching to that of the brighter spaces of the northern hemisphere. The *principal boundary of light and shade*, for the most part very well defined, ran obliquely across the equator of Mars, so as to reach latitudes from 20° to 30° north and south of that line ».

splendore di questa terra è effetto di contrasto per la grande oscurità del mare lungo i suoi confini. La linea delle coste così verso la Gran Sirte, come verso il Golfo Sabeo è priva di dentellature di qualche momento, sebbene negli istanti d'aria buona si abbia l'impressione di un gran numero di minutissime sinuosità non distinguibili l'una dall'altra.

54. Le mie osservazioni del Corno d'Ammone comprendono molti giorni dal 10 di settembre al 9 di marzo, nel quale intervallo l'ho disegnato ben 12 o 15 volte. In tutte queste occasioni io l'ho sempre veduto in forma di un angolo ottuso come si trova figurato per es. nel disegno XXV della Tavola II. Così pure l'hanno disegnato molti altri osservatori, Maedler, Secchi, Rosse, Lassell, Phillips, Dawes ecc. Nei disegni di alcuni Astronomi invece il Corno d'Ammone ha una figura più aguzza e più protesa verso il polo australe: veggansi presso Kaiser i disegni del 31 ottobre 1862, 10 dicembre 1862, 19 novembre 1864 e 28 dicembre 1864. Una simile forma è data da Lockyer nei suoi disegni del 1862, 23 settembre, 25 settembre, 3 ottobre. Caratteristica al tutto nei disegni di Kaiser è una specie di lingua o filamento luminoso, che dal Corno d'Ammone si protende molto innanzi verso il sud in quasi tutti i suoi disegni così del 1862, come del 1864 e che Kaiser trasportò anche sulla carta di Marte da lui costruita nella regione ch'egli indica colla lettera *e*. Non trovo di questa particolarità che rari indizî presso altri osservatori. Lockyer ne ha un debole accenno sotto la data del 3 ottobre 1862: Rosse sotto il 22 luglio del medesimo anno indica tale filamento con molta chiarezza, meno chiaramente sotto il 6 ottobre: il suo disegno del 6 novembre poi ha *due* filamenti luminosi che divergono dal Corno d'Ammone, l'uno quasi perpendicolarmente all'altro. Lassell in settembre 1862 ha visto come noi; il 4 e il 5 novembre ha figurato la costa d'Aeria con parecchie indentazioni a sinistra del Corno d'Ammone.

55. Di queste apparenze io mi rendo ragione nel modo seguente. Supponendo (ciò di cui si han tanti esempî) che le macchie variabili di Marte siano nubi, sotto l'illuminazione del Sole esse dovranno presentarsi come molto luminose. Se dunque in una data regione a vicenda si osservò una tinta cupa e un colore luminoso, deve ritenersi che nel primo caso si vedesse la superficie del pianeta, nel secondo invece uno strato di nuvole o di nebbia. Dato questo principio [1], la cui applicazione si è mostrata possibile e coerente in tutti i casi, dovremo giudicare che le projezioni del Corno d'Ammone e la sua forma acuminata non sono che apparenze transitorie, e che la vera forma di questo promontorio è quella, sotto la quale invariabilmente si presentò nel 1877. Quest'anno fu notevole per la purezza dell'atmosfera del pianeta, ciò che non si può dire di altri e specialmente nel 1862, in cui il Mare Eritreo sembra fosse quasi costantemente coperto da strati di nuvole. Noi vedremo più tardi, esser questa fra le regioni di Marte una di quelle dove più frequenti sono le perturbazioni atmosferiche, e queste perturbazioni troveremo connesse colla presenza delle terre ombreggiate ed oscure, di cui il Corno d'Ammone è circondato quasi da ogni parte.

[1] Enunziato già nel 1862 da Lockyer (*Mem. of the R. Astr. Society*. Vol. XXXII, p. 183).

Sezione III.

Golfo Sabeo: Phison, Hiddekel e Gehon.

56. A partir dal Corno d'Ammone si stende verso occidente il Golfo Sabeo per quasi cinquanta gradi di longitudine fra l'Aeria e l'Arabia da una parte, e la gran penisola di Deucalione dall'altra. Se, come noi crediamo, questa penisola è una terra sommersa, il nome di *golfo* si conviene solo imperfettamente a questa formazione, e più esattamente si dovrebbe considerarla come un profondo solco nella parte boreale del Mare Eritreo. Il colore del Golfo Sabeo non è uniforme, ma dal lato boreale, dove è più oscuro che qualunque altra parte del pianeta, va digradando e sfumandosi poco a poco sino al limite boreale poco preciso della Terra di Deucalione. Per questa ragione il Golfo Sabeo, esaminato con potere ottico troppo debole, si presenta a prima vista come una semplice linea nera sinuosa; il doppio corno che ne forma l'estremità occidentale appare allora indistinto, come un gruppo d'ombre scure mal definite. Il suo lato boreale, che colla tinta cupa forma un contrasto fortissimo colla brillante zona continentale contigua è molto accidentato, e considerato in buone condizioni atmosferiche con ingrandimento sufficiente (non meno di 300) mostra varî seni e promontorî, fra i quali però sono ben distinguibili soltanto quelli, che occupano la metà occidentale a partir dal 340° meridiano. Sotto questa longitudine un piccolo golfo (*Baja di Schmidt* secondo Terby) raccoglie il canale Phison, che viene dall'emisfero boreale, e divide l'Aeria dall'Arabia. Il Phison sotto il 40° parallelo boreale si connette col Nilo, come indica la carta. Dopo la bocca del Phison il Golfo Sabeo è molto ristretto dal protendersi che fa la costa d'Arabia verso il sud con una protuberanza quasi semicircolare, fin quasi a contatto colla Terra di Deucalione. Questo passo è così angusto, che quando l'aria è cattiva l'ondulazione delle immagini e la diffusione possono farlo sembrare come intieramente chiuso per momenti. Nell'aria calma il filetto interposto è però sempre molto nero. Più oltre il golfo si allarga, e nello stesso tempo gira per un angolo retto, formando colla sua estremità due acuti seni, da noi denominati corno I e corno II del Golfo Sabeo. Nel corno I credo abbia foce l'Hiddekel, ramo del Nilo quasi uguale e parallelo al Phison: nel corno II ha foce il Gehon, che viene anche esso dal Nilo come diramazione dell'Indo.

57. Tutte queste particolarità non ho potuto scoprire che parte per parte. Il 1° ottobre vidi per la prima volta il Golfo Sabeo in aria non buona, così che non mi riuscì neppure di sdoppiare i due corni. Il 2 ottobre, essendo al centro il meridiano 19° [1] non solo mi riuscì di sdoppiare i corni e di riconoscere distintamente il vertice d'Aryn, ma vidi ancora la foce del Gehon, il quale mi parve

[1] D'or innanzi, invece d'indicare l'ora e il minuto di ciascuna osservazione, si darà il valore di ω, cioè la longitudine areografica del meridiano, che in quell'istante passava pel centro del disco. Tale dato permetterà di giudicar subito della posizione che allora tenevano rispetto al centro o rispetto al lembo gli oggetti osservati. Per brevità questo valore di ω sarà scritto subito dopo la data e fra parentesi: così 4 ottobre (356°) indicherà il giorno 4 ottobre, nel momento in cui passava al centro del disco il meridiano 356° della nostra carta.

allargarsi un poco entro terra, come se procedesse da un lago interno. Le nuvole, che allora occupavano quasi tutta questa parte delle terre equatoriali, non mi permisero di vedere del Gehon altro che un brevissimo tratto. Il 4 ottobre rividi il Gehon e scoprii la bocca del Phison, la quale allora mi parve come « un ramo molto pallido e dubbioso procedente entro terra dal Golfo Sabeo ». Il 10 ottobre il Phison era visibile nell'interno del continente fin verso il 15° parallelo boreale, ma con molta difficoltà. Trovasi anche indicato nei disegni del 12, 13 e 14 ottobre, senza alcuna pretensione ad esattezza. Io credeva chiusi per molto tempo gli atti relativi ai canali di questa regione, quando verso la fine di febbraio e il principio di marzo essendosi diradati i vapori che coprivano questa parte della zona equatoriale, potei seguire il corso del Nilo fra la Gran Sirte e l'Oceano, e tracciare una parte dei canali che lo fanno comunicare col Mare Eritreo. Veramente il diametro del pianeta essendo in quell'epoca ridotto a meno di 6″, soltanto col profittare di ottimi momenti, e coll'impiegare la massima amplificazione negativa (468) del nostro refrattore si potè riuscire a constatar qualche cosa di certo. Il 26 febbraio (25°) scoprii che l'Indo si diramava nel Gehon; quest'ultimo tanto era appariscente, che lo giudicai più visibile dell'Indo. Il 28 febbraio fu confermata quell'osservazione, e scoperto l'Hiddekel, senza però poter precisare la sua relazione col Gehon. Il 3, il 4 e il 5 marzo rividi l'Hiddekel, che mi parve diretto dal nord al sud, ma sempre fui dubbioso nell'assegnare la sua foce australe. Essendo infatti il pianeta così piccolo, riusciva impossibile di distinguere i due corni del Golfo Sabeo l'uno dall'altro, e assegnare a ciascun canale la giusta foce. Tuttavia il modo di separarsi dell'Hiddekel e del Gehon presso il fondo del Golfo Sabeo mi fece credere come più probabile, che l'Hiddekel sboccasse nel primo corno: e questa *opinione*, che ha bisogno di conferma, servì di base al tracciamento della carta. Nella quale però, come segno d'incertezza, tutti questi canali sono disegnati a punti nelle parti ancora imperfettamente conosciute. Quanto al Phison, ho potuto vederne abbastanza bene l'intiero corso nei giorni 3, 4 e 5 marzo, e credo che il suo tracciamento indichi con bastante approssimazione il luogo dov'esso si separa dal Nilo.

58. Il Golfo Sabeo è qualificato col nome di *stretto* nella carta di Proctor (*Herschel II Straits*); ivi la penisola di Deucalione, accogliendo a traverso del suo istmo un prolungamento del golfo anzidetto, è ridotta ad un'isola. In tale sistema, i due corni del Golfo Sabeo non formano più che una doppia baja nel continente sottoposto (*Dawes' forked Bay*). Ciò è in contraddizione aperta con quanto io ho osservato e con quanto molti altri hanno osservato prima di me. Autorità egualmente rispettabili stanno per l'una e per l'altra versione, e la difficoltà è una di quelle, di cui Terby ha proposto agli Astronomi la risoluzione [1]. Noi pure ce ne occuperemo discorrendo della Terra di Deucalione e delle altre simili che sono sparse pel Mare Eritreo. Intanto è certo che la penisola di Deucalione è qualche cosa di ben diverso dal sottoposto continente: non solo a cagione della sua tinta molto più oscura, ma ancora perchè queste diverse tinte si toccano sull'istmo in un modo crudo e netto, formante un limite ben definito, siccome ebbi occasione di notare il 2 e il

[1] *Aréographie* p. 63 e 77.

4 ottobre: tanto ben definito, che potei tentare di determinare in esso la posizione di un punto, che è il n. 4 del nostro catalogo. Questo limite forma una linea leggermente convessa verso l'alto e va dal Golfo Sabeo al Golfo delle Perle, tagliando netto per traverso l'istmo interposto. Per ora considereremo tale linea come formante la spiaggia del Mare Eritreo in questa parte. L'istmo luminoso così troncato forma una prominenza ottusa quasi rettangolare, che è stata benissimo veduta e figurata da Kaiser l'11 novembre 1864. Noto per incidenza, che questo Astronomo ha veduto il Phison, e lo ha indicato al lembo destro del suo disegno del 22 novembre 1864. È l'unica osservazione che abbia potuto rinvenire di questo canale. Nè dell'Hiddekel, nè del Gehon ho potuto trovare indizio presso alcuno degli osservatori anteriori.

Sezione IV.

Golfo delle Perle: Indo ed Idaspe: Chryse.

59. Dopo la troncatura dell'istmo e la sottoposta Regione degli Incensi *(Thymiamata)* segue il vasto e profondo Golfo delle Perle, il quale è di color cupo forse quanto il Golfo Sabeo, e quando questo è passato a sinistra in una regione meno visibile del disco, sembra formare il punto più prominente del Mare Eritreo verso il basso. Quando l'aria è cattiva, da chi non è ben orientato si può facilmente scambiare il Golfo delle Perle colla Gran Sirte [1]. Il Golfo delle Perle è una specie di vasto triangolo di cui un lato forma il limite occidentale della Terra di Deucalione, l'altro va dritto al promontorio degli Aromi *(Aromata)*. Dal vertice inferiore parte il largo canale detto Indo, prima nella direzione di nord-est, poi dopo la diramazione del Gehon, nella direzione di nord-ovest, fino al Nilo, col quale si connette formandone un braccio molto considerabile. La costa, che dalla bocca dell'Indo si stende al Capo degli Aromi è generalmente rettilinea, ma verso la metà è rotta da una profonda indentatura anch'essa molto nera, che forma la bocca dell'Idaspe. Questo canale non ho potuto seguire entro terra che 5 o 6 gradi al più: al suo termine appariva subitamente troncato senza che fosse possibile congetturarne alcun prolungamento attraverso al continente luminosissimo di Chryse, neppure quando l'Indo e il Gange si mostravano visibilissimi in tutta la loro estensione fra l'Eritreo ed il Nilo.

60. La descrizione del Golfo delle Perle sulla nostra carta è dedotta da due sole sere d'osservazione, 2 e 4 ottobre, nelle quali però le circostanze atmosferiche erano stupende e permettevano di profittare di tutta la forza dello strumento. Una confermazione generale del tutto ebbi la sera del 7 novembre, in aria ottima, quando il diametro apparente del disco era ridotto a 15″. Ma in nessuna di queste occasioni mi era stato possibile seguire l'Indo al di là del 10° parallelo nord, per la causa già accennata, delle masse di nubi, che occupavano allora Aeria, Arabia, Eden e Chryse. Il corso dell'Indo non si scoperse prima del 24 febbraio, e potei esaminarlo fino al 1° marzo consecutivo, essendo il diametro del pianeta di soli 5″, 7. La migliore osservazione fu del 26 febbraio, quando scoprii la diramazione dell'Indo e del Gehon.

[1] Questo mi avvenne il 4 di settembre: vedi su ciò Terby, *Aréographie* p. 78.

Tutta questa parte della carta ciò malgrado non è che uno schizzo grossolano, il quale soltanto da accurate osservazioni nelle prossime opposizioni potrà ricevere il necessario grado di esattezza.

61. Il Golfo delle Perle è stato veduto da molti osservatori [1] e si trova anche sulla carta di Proctor, dov'è designato col nome di Baja di Beer *(Beer's Bay)*, sotto una forma simile alla nostra, ma senza indizio del canale che noi chiamiamo Indo. A pochi invece è stato dato di constatare la foce dell'Idaspe. Capitale mi sembra per questa parte il disegno di Kaiser, 11 novembre 1864, dove dopo l'istmo troncato della Terra di Deucalione, si trovano il Golfo delle Perle, la foce dell'Idaspe e il Capo degli Aromi in una forma che collima col nostro disegno in modo sorprendente. Ma neppure Kaiser ha potuto seguitare il corso dell'Idaspe entro terra. Dawes invece, i cui disegni sono quasi esattamente contemporanei a quello di Kaiser (10, 12, 14 novembre 1864) disegna attraverso il continente equatoriale un largo canale diritto nella direzione del meridiano, il quale si versa nel Mare Eritreo con larghissima foce, sopprimendo intieramente il Capo degli Aromi, e dando a tutta questa costa una forma inconciliabile colle osservazioni di altri areografi. Nè il 9, nè l'11 novembre dello stesso anno Kaiser non ha visto nulla di tuttociò. Contraddizione fra sommi osservatori, che io non oso spiegare: mi limito a ripetere che io ho visto esattamente come Kaiser. Questi dubbî naturalmente pesano anche sulla carta di Proctor, che è fatta esclusivamente sulle osservazioni di Dawes. Il suo *Stretto di Dawes* per me non esiste.

62. Il sig. Terby ha pubblicato nella sua *Aréographie* un disegno fatto nel 1871 dal sig. Lehardelay (vedi il n. 32 dei disegni annessi a quell'opera), nel quale un lungo e tortuoso canale sembra dirigersi dal Golfo delle Perle verso il nord. La posizione della foce australe renderebbe probabile l'idea, che Lehardelay abbia veduto tutto l'Idaspe. Ma nel suo disegno non vi è traccia nè dell'Indo, nè del Gange. In nessun caso poi il suo tracciamento presenta punti di contatto con quello di Dawes. È necessario sospendere ancora il nostro giudizio.

63. Le due ovali scure che Kaiser colloca sulla sua carta nelle longitudini 70° e 54° (18°, 8 e 34°, 8 secondo il nostro modo di contare) sono evidentemente le bocche dell'Indo e dell'Idaspe, da lui interpretate in modo affatto suo proprio.

64. La regione di Chryse, che è una delle più luminose del pianeta, forma un poligono irregolare compreso fra il Mare Eritreo, il Nilo, l'Indo ed il Gange. La sua estremità più australe è costituita dal promontorio degli Aromi, angolo ottuso formato dalla convergenza di due coste quasi rettilinee: è questo un punto prominentissimo, visibile anche nelle mediocri circostanze atmosferiche. Lungo tutta questa riva il Mare Eritreo è oscuro molto, ma più presso la riva, che nelle maggiori distanze. Dal Capo degli Aromi la linea della costa corre direttamente alla bocca del Gange senza alcun accidente degno di nota, formando il lato orientale del gran Golfo dell'Aurora. Notabilissimo invece è, che sul meridiano stesso del Capo degli Aromi come asse si stende l'istmo di un'altra penisola di colore oscuro, la quale nel parallelismo delle direzioni e delle forme imita perfettamente la Terra di Deucalione,

[1] Terby, *Aréographie* p. 72-77.

rimanendo però alquanto inferiore in grandezza e alquanto più scura nella tinta. Nella carta è segnata col nome di terra di Pirra. A chi la considera superficialmente essa appare come un'isola a contorni sfumati di color poco più chiaro che il rimanente del Mare Eritreo: ma in ottime circostanze (ottobre 2 e 4) io ho distinto con piena certezza l'istmo, per cui si attacca al continente di Chryse. Il colore della penisola si va facendo talmente cupo verso la radice, e lungo tutta la costa anche nelle vicinanze del Capo degli Aromi il Mare Eritreo è talmente nero, che riesce difficile vedere l'istmo: esso esiste però indubitatamente e sta come a cavalcioni su quel promontorio metà per parte.

65. Il Capo degli Aromi è soppresso nei disegni di Dawes, e manca quindi anche nella carta di Proctor: ma diversi osservatori l'han rappresentato più o meno distintamente, anche quando non han veduto la penisola di Pirra. Esso è benissimo indicato nei dischi disegnati da Maedler nel 1830 il 14 settembre, il 13 e 14 ottobre. Presso Secchi esso costituisce una prominenza rotondeggiante. Veggansi inoltre i dischi di Lockyer (17 e 23 settembre 1862), il disegno di Knobel segnato n. 31 nell'*Areografia* di Terby, ma sopratutto quelli di Kaiser (9, 11 novembre e 18 dicembre 1864), i quali più di tutti rassomigliano ai nostri. Nel disegno del 18 dicembre 1864 Kaiser ha indicato nel modo più evidente anche la radice della penisola di Pirra, della quale tratteremo particolarmente più innanzi.

Sezione V.

Gange e Golfo dell'Aurora. Ophir, Aurea Cherso.

66. Succede al Capo degli Aromi l'altro dei due grandi golfi, che il Mare Eritreo spinge verso il nord, cioè il Golfo dell'Aurora. Esso è visibile in condizioni anche inferiori d'atmosfera a cagione della sua ampiezza e della sua tinta oscura; e si trova delineato da molti osservatori, che è inutile riferire qui per minuto. Nel suo fondo sbocca con foce imbutiforme il Gange, uno dei canali più larghi e più visibili che esistano sulla superficie di Marte, il quale si è presentato con molta evidenza in tutte le occasioni d'aria buona e cattiva, la prima volta il 28 agosto, l'ultima il 25 febbraio. La congiunzione del Gange col Nilo forma un vasto estuario triangolare, di cui vidi le prime tracce il 4 novembre, e che alla fine di febbraio era interamente libero da ostacoli e molto visibile malgrado il diametro assai ridotto del pianeta. La direzione generale del Gange è rettilinea da sud-est a nord-ovest: la sua larghezza è certamente di parecchi gradi di circolo massimo, ma non oserei definirla, le sponde essendomi sembrate sempre piuttosto sfumate. Forse il canale non è di larghezza uniforme, e forse anche contiene diramazioni e divisioni non discernibili col potere ottico impiegato.

67. Malgrado la sua facile visibilità, non ho potuto trovare di questo canale un tracciamento soddisfacente nelle osservazioni anteriori, che presso Secchi: il quale nei quattro primi disegni del 1858 lo presenta esattamente come fu da noi veduto, e lo chiama *Canale di Franklin*. Secchi fa terminare inferiormente il Gange in uno spazio oscuro, che è certamente l'estuario triangolare da me osservato: presso Secchi però la

forma è alquanto diversa. Tutta questa regione era nell'opposizione del 1877 troppo prossima al lembo inferiore per esser delineata con molta esattezza: e quindi potrebbe anche darsi che il tracciamento di Secchi, in quelle poche cose, in cui discorda dal mio, fosse più conforme al vero. Il sig. Terby crede che il canale qui citato di Secchi sia identico allo Stretto di Dawes della carta di Proctor. Abbiamo già indicato i nostri dubbî sulla esistenza di tale stretto nella forma indicata da Dawes. La direzione e la positura sono affatto diverse pel canale di Secchi e per quello di Dawes: il primo è, come il nostro Gange, molto obliquo rispetto al meridiano, mentre il secondo lo segue quasi esattamente. Nel disegno di Secchi la foce si trova nell'angolo nord-ovest del Mare Eritreo, e subito dopo viene la costa di Thaumasia, che si eleva dritta verso il polo australe. Dawes al contrario mette la foce del suo canale in contatto immediato con quello che Proctor chiama Baja di Beer. Le tre indentazioni che la costa del Mare Eritreo offre nel disegno di Secchi sono: 1° il fondo del Golfo Sabeo; 2° il Golfo delle Perle; 3° il Golfo dell'Aurora. E non vi è posto alcuno pel Canale di Dawes.

68. Kaiser ha traveduto il Gange la sera del 18 dicembre 1864. Egli lo ha figurato sotto forma di nube oscura indistinta, che dal Golfo dell'Aurora (molto ben indicato in questo disegno e anche nella carta di Kaiser) pende in giù verso il basso del disco. La coincidenza della posizione e della direzione non lascia nulla a desiderare. Anche nel disco disegnato da Kaiser il 24 ottobre 1862 il Gange sembra indicato con una certa probabilità.

69. Sotto la latitudine boreale di 20° circa, dal Nilo che percorre tutte le terre equatoriali finora descritte in direzione poco diversa dal parallelo, si distacca dopo il Gange un altro canale molto visibile in determinate circostanze, detto sulla carta Chrysorrhoas, che si dirige quasi esattamente al sud. Ivi incontra un altro canale, ad esso perpendicolare, segnato col nome di Agatodemone; il loro punto di concorso dà luogo ad una espansione sotto forma di ombra sfumata, che nel 1877 sembra esser stata meno distinta di altre volte. L'Agatodemone, dopo un giro molto singolare sbocca nella parte più occidentale del Mare Eritreo, dove termina il Golfo dell'Aurora. Le rive di questo Golfo, l'Agatodemone, il Gange, il Nilo, e il Chrysorrhoas chiudono come isola un poligono mistilineo molto irregolare, che durante le osservazioni mi sembrò alquanto meno luminoso di Chryse, e a cui ho dato il nome di Ophir. La parte australe forma un'acuta e sottile penisola, detta Aurea Cherso: la quale forse è tagliata alla base da un ramo dell'Agatodemone, ma la cosa è molto dubbia.

70. Lungo le coste d'Ophir il Mare Eritreo comincia a perdere alquanto della nerezza, che aveva serbato nel Golfo Sabeo, in quello delle Perle, e nella parte più interna di quello dell'Aurora. Fra la bocca del Gange e la base dell'Aurea Cherso la riva forma una piccola prominenza, la quale circonda un piccolissimo lago interno rotondo, detto sulla carta Fonte di Gioventù. Questo delicatissimo oggetto fu da me veduto nella memorabile sera del 2 ottobre 1877, in cui ebbi i momenti di visione telescopica più perfetta, che ancora mi sia avvenuto di godere. Mi è sembrato per qualche momento che avesse un emissario nel Mare Eritreo verso mezzodì, ma questo non è sicuro, l'aria essendo già corrotta, quando tentai di accertare questo punto. Io non saprei indicare altrimenti le dimensioni di questo lago, se non col dire ch'esso m'apparve

come un punto nerissimo. Certamente, fatta ragione delle sue proporzioni cogli oggetti circostanti, il suo diametro non poteva eccedere 3 gradi, che importavano allora 0″5 del micrometro. Ciò fa ancora quasi 100 miglia italiane nelle dimensioni lineari effettive.

71. Nella sera medesima potei disegnare l'Aurea Cherso. Il filetto scuro, che la limita ad occidente, è abbastanza difficile a vedere: lo aveva già riconosciuto distintamente il 30 settembre e il 1° ottobre in alcuni buoni momenti: lo riconfermai fuori d'ogni dubbio il 2 ottobre, e il 4 novembre potei distinguerlo ancora per l'ultima volta. Il 2 ottobre scopersi, nel medesimo tempo che il Fonte di Gioventù, anche quello del Nettare, che forma una specie di rigonfiamento dell'Agatodemone poco lontano dalla punta dell'Aurea Cherso. Questo rigonfiamento ha al centro un punto intieramente nero, press'a poco rotondo, che in apparenza e misura giudicai perfettamente uguale al Fonte di Gioventù. Quanto alla foce dell'Agatodemone presso la punta dell'Aurea Cherso, mi è sembrata sempre poco evidente. Invece il 2 ottobre per qualche momento sospettai un'altra foce dell'Agatodemone presso la radice dell'Aurea Cherso; foce la cui esistenza ridurrebbe l'Aurea Cherso ad un'isola. Ma l'aria poco dopo si corruppe, e non fu più possibile un giudizio sicuro.

72. La maggior parte di questi particolari è nuova agli osservatori di Marte, e li registro sperando che col tempo se ne otterrà confermazione. Il Chrysorrhoas però è stato veduto distintamente da Kaiser, come si può verificare sulla sua carta e sul suo disegno del 18 dicembre 1864. Soltanto egli non lo fa arrivare sino alla congiunzione coll'Agatodemone, ma lo interrompe alquanto più in basso. Per parte mia devo avvertire, che del Chrysorrhoas nelle osservazioni dell'ottobre non potei congetturare che la parte più australe formante la giunzione coll'Agatodemone, ed anche in modo piuttosto dubbioso, come si può vedere nella Tav. II, disco XVII. Ma con mia grande sorpresa il 4 novembre vidi tutto intiero il Chrysorrhoas com'è delineato sulla carta, molto largo e molto scuro, sebbene sfumato: esso era allora assai più visibile che l'Agatodemone, e poco meno che il Gange. Di nuovo un mese dopo, ricercata la stessa regione il 10 di dicembre, vidi egregiamente il Gange, ma nulla del Chrysorrhoas, il quale anche sempre rimase invisibile in altre posteriori ricerche da me fatte. Questa variabilità credo che sia soltanto apparente e che sia dovuta a movimenti di nuvole sulle terre di Ophir e di Tharsis.

73. Per quanto concerne l'Agatodemone, non mi è riuscito di trovare nelle osservazioni anteriori alcun indizio di quella parte del suo corso che costeggia l'Aurea Cherso lungo il 65° meridiano. Invece il tronco occidentale, che segue il parallelo della radice dell'Aurea Cherso al concorso col Chrysorrhoas, e l'espansione già notata presso questo concorso sono stati veduti da molti osservatori. Talvolta l'Agatodemone è stato figurato come una larga e visibile striscia oscura, abbastanza grande per meritargli, dove concorre col Chrysorrhoas, il titolo di mare (*Dawes Sea* sulla carta di Proctor). Nel 1877 non vidi nulla in quei luoghi che meritasse simile titolo; l'Agatodemone fu sempre molto meno visibile del Gange ed anche del Chrysorrhoas, quando quest'ultimo si lasciò vedere. Allo studio di questa diversità e di altre, che s'incontrano nella stessa regione consacreremo un articolo apposito.

Sezione VI.

Thaumasia, Lago del Sole.

74. Dall'intimo recesso del Golfo dell'Aurora il limite delle terre equatoriali di Marte seguendo il grande diaframma corre prima verso il sud, poi verso l'ovest formando un grandioso e visibilissimo arco, il quale include nella sua concavità la vasta Regione delle Meraviglie (*Thaumasia Foelix*). Il mare contiguo, che è molto scuro nel Golfo dell'Aurora, va rischiarandosi alquanto a misura che si avanza lungo il detto arco; rimane tuttavia sempre un forte contrasto colla vicina spiaggia. Nella parte concava di quell'arco, quasi al centro di Thaumasia sta una forte macchia nera di circa 10 gradi (poco meno di 350 miglia) di diametro, quasi esattamente rotonda, detta il Lago del Sole nella nostra carta e *Lockyer's Sea* in quella di Proctor. Il lato settentrionale e l'occidentale di Thaumasia sono limitati dal già detto Agatodemone, e dal Fasi, procedenti in direzioni opposte dall'oblungo Lago della Fenice, men grande e meno scuro di quello del Sole. In tal guisa la regione Thaumasia costituisce un grande spazio ovale circondato per ogni parte da mari e da canali, nell'interno del quale sta in posizione alquanto eccentrica il Lago del Sole. Tutto quest'insieme produce l'apparenza, notissima agli osservatori, d'un occhio umano, del quale l'Agatodemone e il Fasi sembra costituire il ciglio inferiore, il Lago del Sole forma l'iride e la pupilla, e il grande ed oscuro arco sopradescritto forma un ampio e folto sopracciglio. Il corso verticale dell'Agatodemone fra Thaumasia e l'Aurea Cherso è troppo poco visibile per turbare queste generali apparenze.

75. Il Lago del Sole è stato più volte da me attentamente esaminato in buone condizioni d'atmosfera. Il 30 settembre, essendo il diametro apparente di Marte 21″,79 il diametro di esso fu da me stimato esser press'a poco 2″ per mezzo della comparazione colla grossezza dei fili. Ciò darebbe per diametro di questo lago in gradi 10°,5. Esso è grossolanamente circolare, e forse anche un poco allungato dal sud al nord: ma questo allungamento non mi è sembrato evidente. Il suo orlo non è del tutto regolare, e probabilmente contiene molte piccolissime dentature, che a me è stato lecito soltanto di congetturare. La tinta poi certamente non è uniforme: l'oscurità è massima e forte al centro, con decremento irregolare verso gli orli non per gradi continui, ma a quanto pare per salti qui più forti, là meno sentiti. Malgrado tutto ciò esso rimane sempre uno degli oggetti più belli della superficie di Marte. Un canale od emissario sottile e meno oscuro se ne parte nella direzione di nord-ovest, col nome di Eosforo, e va all'Oceano attraversando il Lago della Fenice. Un altro emissario, o per lo meno un'altra striscia, pochissimo oscura, molto larga, e malissimo terminata pare si diriga al sud, declinando un poco verso l'est: la massima oscurità è alla radice in basso dov'esce dal Lago del Sole. All'altra estremità pare raggiunga i limiti australi di Thaumasia, ma di questa congiunzione non tutte le osservazioni mi hanno ugualmente soddisfatto. Non ha alcuna denominazione sulla carta, non potendosi considerare come un oggetto determinato, ma solo come una lieve variazione nella tinta generale abbastanza splendida di quella regione. Fuori di questi due emissarî, dal Lago del Sole non ne escono altri, o almeno nel 1877 non ne vidi

uscire altri in altre direzioni. Tutti questi particolari circa il Lago del Sole e la Regione delle Meraviglie furono da me esplorati ripetutamente in molte sere diverse, cioè il 20, 22, 24, 25, 26 settembre, 27 e 28 ottobre, 4 novembre: osservazioni confermative si ebbero il 9 dicembre, fino alla qual data nessun cambiamento mi è avvenuto di constatare. Il 21 febbraio mi riuscì di scorgere ancora l'Agatodemone: in questo e nei giorni procedenti eran visibilissimi l'Eosforo ed il Lago del Sole, i quali furono veduti ancora il 21 marzo, il diametro apparente del pianeta essendo ridotto a 5'',16.

76. Riguardo al contorno marittimo di Thaumasia la mia carta presenta enormi discordanze con quella di Proctor, il quale, seguendo i tracciati di Dawes, non fa di Thaumasia un ovale, ma la estende indefinitamente verso sud-ovest col nome di Terra di Kepler (*Kepler's Land*). Molto meglio invece si accorda il nostro disegno con quelli fatti da Kaiser e da Lockyer nel 1862 e da Kaiser nel 1864. Il grosso arco o sopracciglio di Kaiser si trova perfettamente riprodotto nella tinta scura dei mari che circondano presso di noi Thaumasia e l'Aurea Cherso. Ma vi son pure differenze molto notabili. Il Lago del Sole non occupa presso Kaiser e Lockyer nell'ovale di Thaumasia quella posizione eccentrica, che io gli assegno. L'orlo luminoso che circonda quel lago è presso Kaiser quasi altrettanto largo, che presso di me: ma presso Lockyer è strettissimo, molto più stretto che il diametro del lago: così che questo sembra proporzionalmente molto più grande. V'ha di più. Nel 1862 e nel 1864 Kaiser e Lockyer e Dawes figurano il Lago del Sole allungato orizzontalmente, cioè nel senso del parallelo: Dawes e Lockyer gli assegnano una forma alquanto irregolare, Kaiser ne fa una perfetta ellisse col rapporto dei diametri 2 : 3. Io ho esaminato diligentemente questo punto, e ripeto, che se avessi dovuto assegnare un allungamento, l'avrei assegnato nel senso del meridiano, anzichè del parallelo.

77. Gravi discordanze regnano parimente sugli emissarî del Lago del Sole. Quello da me segnato quasi nella direzione del polo australe non si trova accennato da nessun osservatore, salvo forse da Kaiser, il quale lo indica con qualche probabilità nel suo disco del 10 dicembre 1864. Sotto il 23 novembre 1862 ei dà pure un lievissimo indizio dell'altro mio emissario, detto Eosforo, che va al Lago della Fenice. L'Eosforo sembra anche vagamente indicato da Lockyer sotto il 18 ottobre 1862. Ma mentre questi emissarî sono da loro appena oscuramente accennati, Kaiser e Lockyer e Dawes sono concordi nell'assegnare al Lago del Sole un grande e cospicuo sfogo ad oriente diretto verso il Mare Eritreo. Lockyer ne trae anzi motivo per chiamare il Lago del Sole col nome di *Baltico*, del quale lo sfogo in discorso sarebbe il Kattegat. Esso è indicato, sebbene meno chiaramente, anche nei disegni di Rosse (16 settembre e 29 ottobre 1862). Lassell sembra averlo notato il 13 settembre dello stesso anno, ma non lo segna nè il 21, nè il 23, nè il 25 ottobre. Maedler lo indica con tutta evidenza nel suo 20° disegno del 1830, omettendolo poi nel 6° e nel 19°: sulla carta di questo Astronomo si trova pure decisamente indicato. Ora io devo dire che nel 1877 ho ricercato questa parte della regione Thaumasia con tutta la possibile diligenza, specialmente nelle sere in cui studiava l'Aurea Cherso, e scopriva il Fonte del Nettare precisamente nel luogo dove avrebbe dovuto stare la foce dell'emissario anzidetto. Non ho mai potuto scorgere di questo la minima traccia, sebbene la soluzione di

questa difficoltà fosse uno degli scopi del mio osservare. Nell'intervallo dal 20 settembre al 9 dicembre 1877 la regione Thaumasia si mostrò sempre in quella parte ugualmente splendida che nelle parti contermini: ed anche le ricerche fatte nel febbraio e nel marzo consecutivo (meno decisive per la piccolezza del diametro apparente del pianeta) non diedero alcun motivo di sospettare una mutazione qualsiasi. Io non oso esprimere alcuna supposizione atta a spiegare queste discordanze. Se si volesse attribuirle a diversa distribuzione di nubi, converrebbe supporre in queste un grado straordinario di persistenza in determinate e molto ristrette località. O forse si tratta d'immense inondazioni, che ostacoli locali possono deviare ora in una parte, ora in un'altra ?

Sezione VII.

Lago della Fenice. Eosforo, e Fasi.

78. Dal Lago del Sole il breve e sottile, ma tuttavia abbastanza visibile emissario Eosforo conduce per un tratto di circa 15° di distanza nella direzione di nord-ovest al Lago della Fenice, che esso emissario attraversa, continuando nella stessa direzione verso regioni che più tardi si descriveranno. Il Lago della Fenice ha un diametro massimo circa uguale a quello del Lago del Sole, ma la sua forma è assai allungata nel senso da nord-est a sud-ovest: in estensione non arriva forse alla metà dell'altro: ed inoltre il suo colore è assai meno cupo anche nelle parti centrali. Ciò lo rende molto meno visibile, ed anzi la presenza del Lago del Sole concorre a distrarre da esso l'attenzione dell'osservatore. Nondimeno il 20 settembre, quando vidi per la prima volta il Lago del Sole, scopersi pure subito quello della Fenice, e sempre lo ritrovai anche in mediocri circostanze di visione fino al 4 novembre. Più tardi le dimensioni apparenti eran troppo ridotte e la vicinanza del Lago del Sole troppo grande,

79. Il Lago della Fenice forma una specie di quadrivio: mentre in traverso è tagliato dall'Eosforo, partono dalle estremità della sua lunghezza l'Agatodemone verso oriente al Mare Eritreo, il Fasi verso mezzodì al Mare Australe. Il Fasi vidi per la prima volta il 20 settembre (152°) quando era già lontano dal meridiano centrale: i due tronchi dell'Eosforo scoprii il 22 settembre (133°): l'Agatodemone dal Lago della Fenice alla radice dell'Aurea Cherso, il 24 settembre (104°). Tutti questi oggetti non cessarono di esser visibili anche nell'aria mediocre finchè il pianeta fu abbastanza vicino: l'ultima volta li delineai il 4 novembre. Ma la parte inferiore dell'Eosforo verso l'Oceano crebbe più tardi tanto in larghezza ed in visibilità, che potei ancora vederla più volte nel 1878, e da ultimo ancora il 21 marzo.

80. Di questi canali l'Agatodemone divide Thaumasia dalle regioni di Tharsis e di Ophir, riceve dal nord il Chrysorrhoas, e piega subitamente al sud per formare l'Aurea Cherso. Forse ha due foci, una alla radice, l'altra alla punta di questa penisola od isola che voglia essere (cf. § 69 e 71). Alla divisione col Chrysorrhoas sta l'espansione di cui si è già detto, che potrebbe considerarsi come un piccolo lago anch'essa, molto inferiore in grandezza ed in visibilità al Lago della Fenice. Il Fasi è

più breve dell'Agatodemone: nel 1877 era molto più facile ad esplorare di questo. Esso va quasi dritto al sud e termina nel Mare Australe con amplissima foce in forma di tromba dopo di aver spinto un ramo laterale (l'Arasse) nel Mare delle Sirene, come si dirà più tardi. Il golfo formato dalla foce del Fasi è detto Aonio.

81. L'Agatodemone e il Fasi furono senza dubbio veduti da Maedler nel 1830, e insieme formano quell'arco oscuro molto visibile, che sulla carta del citato Astronomo circonda il Lago del Sole dalla parte del nord. Ostacoli di natura probabilmente meteorica gl'impedirono di riconoscere il restante perimetro di Thaumasia e il grande sopracciglio. Qualche indizio del Golfo Aonio trovo però nel suo disco n. 20. Anche l'allargamento del Fasi verso la foce sembra indicato sulla carta, la quale non è interamente d'accordo coi dischi, e forse in questa parte si appoggia a disegni non pubblicati. La continuità che Maedler pone fra l'Agatodemone ed il Fasi lascia pure congetturare ch'egli abbia visto qualche cosa del Lago della Fenice, senza riconoscerne la maggior larghezza in confronto di quei due canali.

82. Durante l'opposizione del 1862 l'Agatodemone ed il Fasi furono pure visibili: Kaiser li ha ambidue, ma sembra aver del Fasi veduto meglio il ramo occidentale, cioè l'Arasse, la comunicazione del Fasi propriamente detto col Mare Australe essendo imperfettamente da lui indicata (1862, ott. 24 e nov. 23). Lockyer ha veduto distintamente l'Agatodemone entro terra, più dubbiosamente la foce del medesimo dove per me sta l'istmo dell'Aurea Cherso. Non ha traccia nè del Lago della Fenice, nè del Fasi. Lassell rappresenta il Fasi, il Lago della Fenice e l'Agatodemone al modo di Maedler, come una cintura continua: ma chiude l'Agatodemone dalla parte dell'Aurea Cherso (1862, ottobre 21, 23, 25) togliendogli ogni comunicazione col Mare Eritreo.

83. Nell'opposizione del 1864 Kaiser ha riveduto l'Agatodemone: nel suo disegno del 10 dicembre accenna leggermente ad una comunicazione diretta di questo col Mare delle Sirene, ciò che prova aver egli anche questa volta traveduto il Lago della Fenice, e l'Arasse, ma non il Fasi propriamente detto, appunto come gli era avvenuto nel 1862. I disegni fatti in questa opposizione da Dawes sembrano in contraddizione con tutti gli altri. Egli fa dell'espansione dell'Agatodemone al luogo, dove noi abbiamo visto il suo incontro col Chrysorrhoas, un lago press'a poco uguale a quello del Sole, con uno sbocco molto visibile nel Mare Eritreo, che Proctor ha trasportato sulla sua carta, e chiamato Mare di Dawes (*Dawes' Sea*). Ma i disegni contemporanei di Kaiser non permettono di credere, che la macchia così formata fosse emula del Lago del Sole in visibilità ed in forza (cf. qui sopra § 73). La sfumatura che Dawes pone a questa macchia dalla parte di ponente nei suoi disegni sembra indicare presso il loro autore qualche incertezza sulla forma e sulla estensione di quest'oggetto, a cui nel 1877 certamente non si poteva pensare di dar il nome di *Mare*.

84. Niuno dei precedenti osservatori sembra aver veduto il Lago della Fenice come qualche cosa di distinto. Kaiser sulla sua carta mette anzi in questo luogo una specie d'istmo, che separa intieramente l'Agatodemone dal Fasi, o piuttosto dall'Arasse, congiungendo così Thaumasia ad Ophir. Il Lago della Fenice poi certamente non si può confondere col così detto Mare di Dawes della carta di Proctor, la quale occupa rispetto al Lago del Sole una posizione affatto differente.

Sezione VIII.

Isola d'Argyre: Terra di Noé.

85. L'elegante arco ellittico che include Thaumasia comincia al Golfo dell'Aurora e termina al Golfo Aonio, che è una semplice espansione della bocca del Fasi. Questo golfo appartiene al Mar Polare Australe, e non più all' Eritreo. Infatti di fronte a Thaumasia dalla parte di sud-est brilla di viva luce l' Isola d' Argyre, una delle poche isole di Marte, che da ogni lato sian circondate da vasti mari e non da stretti angusti. Il largo canale che la separa da Thaumasia è detto Bosforo gemmato: i cui termini, dal lato d'Argyre, sono i due promontorî molto ben distinti detti Capo delle Ore e Capo delle Grazie. Quando Argyre mi si presentò per la prima volta al lembo sinistro del disco il 24 settembre (95°) la sua luce era talmente viva, che determinò la sua denominazione di Argyre, cioè argentea. Dopo d'allora la rividi molte volte, ed ultimamente ancora il 26 febbraio 1878 con tutta certezza, e sempre molto brillante nel lembo occidentale che guarda Thaumasia. Il lembo orientale invece non mi si presentò mai distintamente, e quasi sempre fu coperto da un denso velo di vapori comuni a quella parte d' Argyre ed alla vicina terra detta di Noé o Noachide.

86. Credo mio stretto dovere di riferire qui per minuto tutte le osservazioni che possono servire a determinare la relazione (per me non ancora ben chiara) fra l'Isola d'Argyre e questa Terra Noachide. Come ho detto, il 24 settembre vidi comparire al lembo destro le prime tracce assai luminose del lato occidentale d'Argyre. Nei giorni seguenti in grazia del ritardo diurno che la rotazione di Marte ha rispetto a quella della Terra, Argyre si venne svelando poco a poco: il 30 settembre (68°) era tutta in vista, ma non riuscii a discernerne il lato orientale, come è segnato sulla carta: mi parve anzi, che l'isola si prolungasse verso est sino ai confini del lembo visibile, restringendosi però alquanto in larghezza. Il 1° ottobre vidi la stessa cosa: ma avendo cominciato le osservazioni più presto, potei scoprire il limite orientale dalla lunga macchia luminosa, che mi parve stare verso il 350° meridiano e sul 45° parallelo. Il 2 ottobre ebbi del tutto una vista assai migliore; sebbene la parte orientale si mostrasse poco ben terminata, cominciai a credere all' esistenza di una immensa ed unica isola, chiudente quasi tutto il Mare Eritreo dalla parte del sud. Lo schizzo XX della Tav. II mostra assai bene quello che allora si vedeva. Il 2 ottobre niente era cambiato. Il 4 ottobre trovo scritto, che la grande isola in alto appariva più larga, ma più pallida e meno ben terminata, soprattutto a sinistra, dove mi parve esservi gran confusione di tinte. Dal 10 al 14 ottobre prestai all' estremità orientale della supposta isola tutta l'attenzione di cui era capace: trovai sempre l'istessa sfumatura e l'istessa indeterminazione di tinte e di contorni, che invano cercava riprodur bene nei disegni. Finalmente il 4 novembre essendosi ripresentata la vera Argyre col suo termine occidentale al lembo sinistro, rividi questo termine così ben netto e luminoso, come un mese prima. Fu allora, che passando al centro il meridiano 82°, potei distinguere e delineare con qualche probabilità il vero confine orientale dell'isola come sta sulla carta, e convincermi che la sua lunghezza non arrivava alla metà di quanto fin allora aveva creduto. Che cosa era avvenuto dell'altra metà? Il 7 novembre scrissi «Argyre

pare divisa in due press' a poco nel mezzo: è un po' pallida, ma tuttavia ben definita da ogni parte ». Ma il 10 e l' 11 dicembre tutto era di nuovo come prima, e non si vedeva che una sola e lunga nube.

87. Finalmente il 14 dicembre l' estremità sinistra di quella nube essendosi diradata, in quel giorno e nei due che lo seguirono apparve ciò che sulla carta è segnato col nome di Noachide, cioè una lunga penisola di color fosco, di contorni mal decisi, simile in tutto alle penisole di Deucalione e di Pirra, ma alquanto più grande di queste. Tali osservazioni furono confermate da altre fatte nel febbraio 1878. Il 24 febbraio Argyre comparve all'orlo superiore del disco come una macchia brillante press' a poco ellittica (in conseguenza dell' obliquità della projezione) e che si sarebbe potuta facilmente scambiare con una calotta di neve. La sua estensione non sorpassava 20° di circolo massimo. Il 25 febbraio vidi la parte di Noachide attigua ad Argyre, molto men chiara di questa. Finalmente il 26 febbraio potei disegnare l' una e l'altra di queste terre in quello che adesso io ritengo essere il loro vero aspetto, e che è riprodotto nelle carte annesse a questa Memoria. Essendo il diametro apparente del pianeta in questa circostanza ridotto a 5″,8 non si possono aspettare nè misure, nè rilevamenti esatti, tanto più che ambedue le regioni già si presentavano alla vista sotto una notevole obliquità. Per questa parte dunque il tracciamento della carta non può essere che una grossolana approssimazione. Così pure è ancora molto incerta la natura del limite che separa Argyre dalla Noachide; nè sono in grado di dire se questo limite sia ben preciso, oppure se dallo splendore d'Argyre si passi alla oscurità della Noachide per gradazioni. Anche sarebbe possibile fra l' una e l' altra l' esistenza di un canale più scuro. Sopra tutte queste cose non resta che invocare maggior luce da ulteriori osservazioni.

88. L' Isola d'Argyre sembra confusamente indicata in un disco di Lockyer, 23 settembre 1862: in alcuni altri disegni dello stesso Astronomo è rappresentata colla Noachide sotto una comune coperta di nubi, formante una lunga striscia bianca che sembra chiudere al sud il Mare Eritreo, nella forma da me veduta in ottobre ed in novembre, e che sembra esser l' aspetto normale. La stessa apparenza infatti si trova presso Secchi (1862, 25 ottobre), Lassell (1862, 25 ottobre), Kaiser (1864, 18 dicembre) e specialmente presso Maedler nei suoi dischi del 1830, n. 6, 7, 19 e 21. Secchi nei disegni del 1858 ha lo stesso tracciamento: egli identifica quella grande massa di nubi luminose con una parte della calotta polare australe, attribuendo a questa una grandissima estensione.

89. Le sola osservazione che a mio sapere offra distintamente l'Isola d'Argyre separata dalla Noachide e nel suo vero aspetto non velato da nubi, è quella di Dawes del 21 gennaio 1865, dove è descritta come una macchia isolata chiara di grandezza press' a poco uguale al Lago del Sole, coll' annotazione *glistening white,* cioè bianco brillante. La posizione è esattamente quella che si conviene alla nostra Argyre: la grandezza è un po' minore: la forma è rotondeggiante. Malgrado alcune piccole differenze, appena vi può esser dubbio sull' identità. Dawes nel volume XXV delle notizie mensili della Società astronomica di Londra, p. 226 scrive di aver osservato quella macchia luminosa il 20, 21, 22 gennaio 1865, e che rassomigliava perfettamente ad una gran massa di neve, essendo altrettanto bianca che la calotta polare. Alla

pag. 228 indica d'aver veduto già una macchia molto bianca nel medesimo luogo il 13 marzo 1852. Per conto mio debbo notare, che sebbene Argyre mi sia sempre parsa molto brillante, non mai ho osato paragonarla alla calotta polare. Il 30 settembre ho notato: « Il suo splendore è veramente fuori dell'ordinario, forse anche superiore a quello di Memnonia (vedi più sotto § 122 la descrizione di questa regione), sebbene molto inferiore a quello della neve polare ». Osservazioni analoghe a questa di Dawes, da me fatte sopra altre regioni, saranno citate in progresso, quando sarà discorso dei fenomeni meteorologici del pianeta. Sulla carta di Proctor Argyre è denominata isola nevosa (*Dawes' snow island*). Se talvolta vi è neve, questa non è certamente perpetua.

Sezione IX.

Mare Eritreo, Terra di Deucalione.

90. Chiamo Mare Eritreo quella grande estensione quasi quadrilaterale della superficie di Marte, che giace fra i meridiani 60° e 310°, allargandosi dall'Equatore fino al 60° parallelo australe, di colore sommamente vario, sebbene generalmente molto più scuro che quello della zona dei continenti equatoriali. Il suo fondo generale, oscurissimo lungo tutta la costa boreale che segue il grande diaframma lungo l'Equatore, va digradando poco a poco la sua tinta verso il sud: su questo fondo si dipingono con colore più chiaro diverse strisce e macchie, portanti relazioni notevoli così fra loro, come coi continenti vicini. A quanto pare, la loro configurazione è altrettanto stabile che quella di essi continenti. Considerate con mezzi ottici insufficienti, o in aria tormentata, queste macchie o sono invisibili affatto, o appaiono come indistinti fantasmi: per distinguerne la forma è necessario combinare un ingrandimento notevole con uno stato molto tranquillo d'atmosfera.

91. Di tutte queste regioni di mezza tinta la più notabile e la più cospicua è la Terra di Deucalione [1], sebbene forse in ampiezza superata dalla Noachide, che già abbiam descritto. Essa separa dal resto del Mar Eritreo quella parte, che più sopra fu descritta col nome di Golfo Sabeo (§§ 56-58). Ha la forma di penisola piegata ad angolo retto: l'istmo che l'attacca alla Terra degli Incensi è luminoso, e forma parte integrante di quel continente. Ma questo istmo è troncato nettamente da una linea trasversale, al di là della quale il resto della penisola appare di colore molto più cupo. Malgrado questo, non si può dubitare che e l'istmo brillante, e la penisola oscura non costituiscano una sola ed identica formazione; la diversità del colore è dunque il prodotto di qualche circostanza accidentale; e probabilmente da ciò, che al confine dell'ombra la penisola si sommerge sotto il livello del Mar Eritreo. Vedremo più tardi a quali argomenti si può appoggiare questa ipotesi, che la Terra di Deucalione e tutte le altre simili siano continenti sottomarini. Mentre le spiagge dell'istmo sono nettamente terminate tanto verso il Golfo Sabeo, quanto verso il Golfo delle Perle, i due lati della parte oscura della penisola perdono di precisione a misura che si

[1] Nell'idea che tutte queste regioni siano continenti sommersi ho dato ad alcune di esse i nomi di eroi diluviani, Noé, Deucalione, Pirra, Ogige.

avanza verso la punta; la quale è talmente sfumata, da render impossibile di precisarne in qualunque modo il contorno. Perciò sulla carta questo, come altri contorni analoghi, è punteggiato. È dunque impossibile dire altro, se non che la penisola è diretta, dopo la sua piegatura, quasi esattamente secondo il parallelo: che procedendo verso la punta diventa sempre più scura di colore, e meno discernibile dal fondo marino circostante; e che finisce per perdersi affatto dirimpetto al Corno d'Ammone, presso il 320° meridiano.

92. Tale sembra il vero aspetto della Terra di Deucalione, considerata per uno stato favorevole delle atmosfere della Terra e di Marte. Ma queste apparenze non sembrano intieramente costanti. Io medesimo ho veduto il 10 dicembre quella parte che si allunga secondo il parallelo splendere alquanto più che la parte contigua all'istmo luminoso. Ma questo è nulla in confronto della varietà di aspetto che la penisola di Deucalione ha offerto ad altri osservatori. Maedler nei suoi disegni del 1830 invariabilmente fa della penisola di Deucalione una parte del continente luminoso, senza indicare alcuna traccia d'ombra neppure di fronte al Corno d'Ammone, dove è troncata. — Nei disegni di Secchi del 1858 si trova espressa molte volte la Terra di Deucalione sotto forma d'un isola che costeggia il continente dal Corno d'Ammone fin quasi al Capo degli Aromi: il Golfo Sabeo è per lui uno stretto lunghissimo, che corre dall'uno all'altro di questi due punti: dell'istmo non vi ha presso di lui alcuna traccia. — Gli osservatori del 1862 sono in gran parte d'accordo per affermare l'esistenza dell'istmo della Terra di Deucalione. I disegni di Kaiser e di Lockyer portano testimonianze irrefutabili a questo riguardo. Anche Lassell lo indica, sebbene meno chiaramente, nei suoi dischi del 24, 25, 27 settembre. Secchi medesimo (25 novembre) chiude il Golfo delle Perle dalla parte di levante con una spiaggia luminosa, ciò che dimostra aver egli benissimo veduta la sponda occidentale dell'istmo.

93. Nel 1864 le testimonianze si dividono maggiormente. Kaiser non ha alcuna deviazione sensibile dai suoi tracciati del 1862: per lui l'istmo è sempre evidente (11 e 19 novembre, 18 e 23 dicembre). Lo stesso dicasi dei disegni di Franzenau (8 e 10 novembre). Solo Dawes, le cui osservazioni di questo luogo mostrano una particolare accuratezza, non sembra neppur sospettare l'esistenza dell'istmo (12, 14, 20 novembre). Conseguentemente la carta di Proctor pone, invece del Golfo Sabeo un lungo stretto come quello delineato da Secchi nel 1858 (*Herschel II Straits*) e fa al medesimo attraversare il luogo, dove noi poniamo l'istmo luminoso: i due corni del Golfo Sabeo si riducono a due piccole indentazioni del continente equatoriale (*Dawes' forked Bay*): la Terra di Deucalione diventa un'isola, come presso Secchi (*Phillips Island*). Tutte queste testimonianze sono di alto valore, sebbene si contraddicano reciprocamente. Non allungherò la discussione col citarne altre, tanto più che questo punto è stato con particolarissima diligenza trattato dal sig. Terby, pp. 64-68 della sua *Areografia*. Terby sembra inclinato a concludere, che la vera configurazione sia rappresentata dai disegni di Secchi e di Dawes, onde verrebbe per conseguenza, l'istmo della Terra di Deucalione veduto da Maedler, da Lockyer, da Kaiser, da Franzenau, e da me per più mesi osservato, esser un'illusione prodotta da nuvole.

94. A mio avviso le due versioni si possono conciliare facilmente tenendo conto della facilità particolare, con cui vedremo formarsi strati di nebbia su tutte le terre

oscure in generale. Qualunque sia la spiegazione che si voglia dare di questa tendenza, essa è un fatto constatato da varie osservazioni, e già abbiamo veduto aver essa luogo in modo notevole ed incontrastabile per la Noachide. Tale tendenza allo stato nebbioso è tanto maggiore, quanto più obliqua è l'irradiazione solare sulle regioni in questione. Noi osserveremo ora, che quella parte della Terra di Deucalione, la quale si estende lungo il parallelo alla latitudine australe di circa 20°, nelle opposizioni del 1830, del 1862, e del 1877 per lungo tempo ricevette i raggi solari sotto incidenza quasi perpendicolare. All'incontro nelle opposizioni del 1858 e del 1864 quella regione si presentò obliquamente, sotto un'incidenza di 32° circa nel primo caso e di 14° nel secondo. Da queste premesse segue, che la Terra di Deucalione ha potuto in questi ultimi casi esser coperta di nebbia più densa, e brillare di luce più viva: l'istmo apparire comparativamente oscuro (non tanto però da illudere Kaiser e Franzenau). Negli anni 1830, 1862, 1877 invece l'istmo ha dovuto brillare più, che la parte protesa della penisola: sia perchè realmente esso pare più chiaro, sia anche perchè l'irradiazione più obliqua del Sole ha potuto permettere su di esso la formazione di nebbia più densa. E così è avvenuto che gli osservatori di quegli anni tutti han potuto constatarne la presenza in modo concorde. Non vi è qui dunque uno *stretto*, ma bensì una penisola ed un istmo.

Sezione X.

Terra di Pirra.

95. La Terra di Pirra è quasi una copia, in dimensioni alquanto ridotte, di quella di Deucalione. Si distacca dal Capo degli Aromi, il quale giace esattamente sull'asse del suo istmo: procede verso sud, declinando alquanto verso levante fino a raggiungere press'a poco il parallelo 24°: indi si piega ad angolo di circa 120° e va ad occupare il mezzo del vuoto, che il Mare Eritreo lascia fra la Terra di Deucalione e l'Isola d'Argyre. Essa ha contorni precisi soltanto in vicinanza del continente, dal quale si diparte; i suoi lati diventano sempre più sfumati e sembrano anche convergere un poco, finchè per gradi insensibili si perdono nel fondo generale dell'Eritreo. È impossibile stabilire con esattezza il luogo ove termina: non mi è mai riuscito di scoprirne traccia ad oriente del meridiano d'Aryn, sebbene certe apparenze inducano a credere che si prolunghi anche un poco di più verso levante. Essa è generalmente assai più scura che la Terra di Deucalione, e non è facile rilevarla in mezzo alla tinta più cupa dell'Eritreo. Il massimo della sua luce è poco dopo la piegatura: l'istmo è alquanto più scuro, anzi nelle vicinanze del Capo degli Aromi è difficile osservarlo, perchè partecipa in gran parte della tinta forte che distingue il Golfo delle Perle e il Golfo dell'Aurora. Quindi è facile scambiare la Terra di Pirra per un'isola, sebbene certamente non lo sia (cf. § 64).

96. Questa disposizione della Terra di Pirra è degna di molta considerazione. Infatti, dato che la tinta scura dell'Eritreo provenga dall'esistenza di un vero mare, chi considera la sua costa settentrionale dal Golfo delle Perle a quello dell'Aurora e nota il contrasto di luce e d'ombra, che ha luogo lungo questa costa così splendente, non potrà indursi a credere, che intorno al Capo degli Aromi vi possa essere

altro che lo stesso mare, che riempie quei due golfi. Quindi nasce spontanea l'idea, che quella lingua di spazio un po' men oscuro, che li divide sia una terra sottomarina, più luminosa in alto, perchè posta a minore profondità, quasi invisibile presso la riva del continente, perchè ivi molto più bassa. Altri fatti che appoggiano questo modo di vedere, si produrranno in seguito.

97. La Terra di Pirra è stata benissimo delineata da Lockyer nel 1862 (sett. 23. 11^h. 55^m.) in un disegno, che con molta evidenza mostra anche il Capo degli Aromi e la bocca dell'Idaspe. Un altro disegno fatto un'ora dopo mostra soltanto l'istmo di quella penisola. Lord Rosse (29 ottobre 1862) la figura tutta intiera, ma ne connette la punta col ginocchio formato dalla Terra di Deucalione. Kaiser ha veduto la parte protesa della penisola, ma non l'istmo, il 9 e l'11 novembre 1864: l'istmo invece, ma non la parte protesa, il 18 dicembre dello stesso anno. Il disegno da lui fatto in questo giorno indicherebbe anzi l'esistenza di una terza penisola submarina compresa fra il Golfo delle Perle e la foce dell'Idaspe, la quale dunque starebbe in mezzo a quelle di Deucalione e di Pirra, e sarebbe molto più breve. Confesso di non averne visto traccia: e credo che questa apparenza sia un semplice effetto del modo, con cui Kaiser ha interpretato il Golfo delle Perle e la bocca dell'Idaspe.

Sezione XI.

Osservazioni generali sulle terre oscure del Mare Eritreo.

98. Queste terre, per la tendenza prevalente che sembrano avere a coprirsi con strati di nebbia fortemente illuminata dal Sole, nell'inverno dell'emisfero australe di Marte sogliono apparire come isole e continenti luminosi, e come tali si trovano figurati sulla carta di Proctor. Ma siccome il velo luminoso, per la sua natura meteorica, è soggetto a continue variazioni, non troviamo altro luogo della superficie di Marte, dove le delineazioni degli autori siano fra loro in maggior contraddizione. Io ho già tentato d'indicare, come si può render conto delle discordanze, che si manifestano a proposito della Terra di Deucalione, del suo istmo, e del Golfo Sabeo. Gli stessi principî serviranno a render conto di altre contraddizioni in apparenza ancora più inesplicabili.

99. Proctor nella sua carta, fondata (come si disse) principalmente sui disegni di Dawes, al sud del suo Stretto di Herschel II pone l'una dopo l'altra tre grandi terre allungate nel senso del parallelo, e disposte in fila dal sud al nord: sono per ordine l'Isola di Phillips, l'Isola di Jacob, e la Terra di Kunowski (*Phillips Island, Jacob's Island, Kunowski's Land*). Fra il continente e l'Isola di Phillips mette il già citato Stretto di Herschel II: fra l'Isola di Phillips e quella di Jacob, lo Stretto d'Arago (*Arago's Straits*): fra l'Isola di Jacob e la Terra di Kunowski lo Stretto di Newton (*Newton's Straits*). La Terra di Kunowski sarebbe poi connessa con un continente polare che secondo me non esiste.

100. Tutte queste non sono per noi che trasformazioni atmosferiche della vera carta dell'Eritreo. Gl'istmi delle penisole di Pirra e di Deucalione essendo collocati nella zona torrida di Marte e rimanendo per lo più oscuri, brillanti strati di nuvole formandosi più facilmente nelle parti di latitudine più elevata, noi avremo un'isola

nuvolosa di Phillips, rappresentante la parte più australe della Terra di Deucalione, un' altra isola nuvolosa di Jacob, che rappresenta l'estremità della Terra di Pirra, e da ultimo una terza isola maggiore, formata dalle nebbie coprenti la Noachide e la vera Isola d'Argyre: la quale terza isola di nuvole mi diede tanto fastidio (§§ 85-87), e m'impedì di completare la descrizione di Argyre e di Noachide secondo il mio desiderio. Si confrontino le carte annesse alla presente Memoria con quella di Proctor. Queste isole di vapori, saranno spesso, vere Simplegadi, portate di qua e di là dall'azione delle correnti atmosferiche, attaccate insieme due a due, od anche tutte e tre, talvolta invece sminuzzate e divise, o cangiate anche di forma. Queste formazioni meteoriche, imitanti i contorni delle terre oscure del Mar Eritreo, saranno altrettante *immagini meteoriche* di quelle terre.

101. Esempî della riunione di due fra i banchi di nuvole sopraccennati sono abbastanza frequenti presso gli osservatori. La grande isola accennata nei disegni di Secchi (1858) sopra il Golfo Sabeo si può con molta probabilità credere risultata dalla coalizione dei banchi corrispondenti alle penisole di Pirra e di Deucalione. Il grande spazio chiaro, che sulla carta di Maedler (1830) occupa la medesima regione protendendosi più avanti fin quasi al polo australe, ci mostra una massa nebulosa, che in quell'anno ha servito di comune involucro alle parti più avanzate delle Terre di Deucalione e di Pirra, e alla Noachide. Nella sua carta la gran nube in questione è anzi tripartita verso oriente, ed indica così chiaramente la sua origine. Non moltiplico gli esempî, che si posson facilmente riscontrare presso gli osservatori, e di cui varî furono raccolti da Terby nella sua tante volte citata *Areografia*.

102. Un esempio notevole di un banco di nube formata sopra una delle terre oscure e poi spostato da qualche altra forza (vento senza dubbio), si trova nei tre disegni fatti da Lockyer la sera del 23 settembre 1862. Nel primo di essi ($10^h. 25^m$ Greenwich) la Terra di Deucalione ha la stessa forma che presso di noi fino alla piegatura: dopo di questa si biforca in due lingue affatto uguali. Di queste l'una, cioè l'inferiore, è la vera penisola: l'altra non ne è che l'immagine meteorica spinta dai venti alquanto verso sud-ovest, ma con maggior forza all'estremo orientale, che all'estremo occidentale. Nel secondo disegno ($11^h. 55^m$ Greenwich) si riproduce esattamente lo stesso fatto, e si vede l' immagine meteorica della Terra di Deucalione toccare già colla sua punta orientale la Terra di Pirra, e confondersi con altra nebbia coprente la Noachide. Nel terzo disegno ($12^h. 55^m$ Greenwich) quell'immagine meteorica è molto diminuita d' intensità, forse per l'azione continuata del Sole, il quale circa tre ore prima è passato al suo meridiano, e l'ha di nuovo in parte ridotta a vapori trasparenti. Non si scorge di essa altro che l'estremità orientale, ed anche questa molto affievolita.

103. Un fatto simile, sebben meno chiaro, sembra mostrarsi nei disegni di Lockyer del 23 e del 25 settembre 1862, dove strisce di nubi prendono origine sopra la Terra di Deucalione, e si spingono nella direzione di sud-ovest in molte lingue e filamenti paralleli. La stessa stessissima cosa appare nel disco di Kaiser del 23 dicembre 1864. Ivi una corrente di nubi che sembra uscire dal Corno d'Ammone (corrente che in varia forma si trova in tutti i disegni che ha fatto Kaiser di questa regione) vien trascinata in direzione parallela a quella che domina i vapori coprenti

di comune velo le Terre di Deucalione e di Pirra, cioè verso sud-ovest. Questo fatto si ripete il 31 ottobre e il 10 dicembre 1862. Invece il 19 novembre 1864 Kaiser ha veduto due correnti di nubi tendere direttamente al polo australe partendo l'una dal Corno d'Ammone, l'altra dal ginocchio della Terra di Deucalione.

104. Non adduco discussioni consimili, che si potrebbero fare sopra altre delineazioni. M' incresce moltissimo di non aver potuto constatare simili fenomeni colla propria esperienza. Durante tutto l' intervallo delle osservazioni utili del 1877 l'emisfero australe di Marte fra il polo e il grande diaframma fu totalmente libero da vapori: così che ad eccezione di quelli che per lungo tempo velarono la Noachide, e di un altro caso che riferirò nell'articolo seguente, nessuna variazione ho potuto constatare con sicurezza nell'accennato spazio, che si potesse attribuire a nuvole vaganti sulla superficie del pianeta. Questa circostanza ha facilitato grandemente il rilievo topografico, ma lasciò molto imperfette le mie nozioni sulla meteorologia di Marte.

Sezione XII.

Terre d' Ogige e di Proteo.

105. Il Bosforo Gemmato, che sta fra Thaumasia ed Argyre, non è di tinta uniforme: lungo il suo mezzo corre in forma di striscia meno oscura la Terra d'Ogige, che ho potuto osservare con distinzione soltanto la sera del 2 ottobre (4°2), confermandone l'esistenza il 4 novembre (86°). La vidi girare in forma lievemente arcuata intorno a Thaumasia, ma a causa dell'obliqua posizione non ho potuto seguirla sino al termine occidentale, il quale però sembra non dover oltrepassare di molto il Capo delle Grazie, se si deve giudicare dal colore che altre volte ho visto prendere in quei luoghi il Mare Australe. Invece il termine orientale nel Mar Eritreo si potè stabilire abbastanza bene all' incirca sul parallelo che passa per la punta dell'Aurea Cherso. Ivi la Terra d'Ogige sembra accennare colla sua estremità verso est: però l'osservazione, anche nell' ottima aria del 2 ottobre, fu alquanto dubbia. La sua tinta stimai press' a poco uguale a quella della parte più chiara della Terra di Pirra. Ed altro non posso aggiungere su questo delicatissimo e difficilissimo oggetto, di cui non trovo indizio presso altri osservatori, ad eccezione di Lockyer, il quale sembra averlo veduto la sera del 23 novembre 1862 a $12^h.55^m$: il suo tracciamento corrisponde quasi a capello col nostro. Forse Dawes ne ebbe un' idea il 28 gennaio 1865: ma le molte striscie che nei suoi disegni occupano queste regioni mi paiono per lo più d' origine meteorica. Anche la mia propria osservazione, sebbene confermata ad un mese d' intervallo, potrebbe forse esser interpretata nello stesso modo, se non fosse in qualche modo appoggiata dal citato disegno di Lockyer, e dalla relazione, che la Terra d' Ogige sembra avere con quella di Proteo.

106. Quest'altra piccolissima, ma notabilissima fra le terre oscure del Mare Eritreo, fu da me trovata anche il 2 ottobre e figurata come una macchia assai poco più chiara di quel mare di contro alla Terra d'Ogige e a levante della punta dell'Aurea Cherso, come sulla carta è indicata. Io non ho potuto giudicare a mia piena soddisfazione se si connetta o no coll'Aurea Cherso: il disegno che ritengo migliore, la

dà distaccata, e così pure l' ho figurata sulle carte. La sua terminazione orientale mi parve abbastanza definita: essa formava una punta parallela e quasi simmetrica a quella della Terra d' Ogige. La tinta era uguale a quella della parte più chiara della penisola di Pirra. L' esistenza della Terra di Proteo fu anche confermata il 4 novembre.

107. Due altre volte ho veduto, non già la Terra di Proteo, ma la sua immagine meteorica (§ 100), cioè uno strato di nuvole illuminate che la copriva, imitandone la forma. La prima volta fu il 26 settembre (84°): nel qual giorno vidi projettarsi fuori dell'estremo orientale di Thaumasia (o meglio dell'Aurea Cherso, che io allora non aveva ancora imparato a distinguere da Thaumasia) una striscia bianca orizzontale. Questa interrompeva netto il grande arco scuro, o il gran sopracciglio che incombe sopra l'occhio formato da Thaumasia. In questa occasione fu fatto il disegno XVII, riprodotto nella Tavola II annessa a questa Memoria, dove il fenomeno è accuratamente rappresentato. Il non aver disegnato questa striscia luminosa nel giorno 24 mi fece allora sospettare che si trattasse qui di qualche apparenza variabile: ciò che fu confermato dalle osservazioni posteriori. Infatti il 2 ottobre trovai in quel luogo la Terra di Proteo, tanto più scura: i due oggetti, quasi uguali in estensione ed in forma, ma così diversi riguardo allo splendore mi fecero desiderare ulteriori schiarimenti. I quali non si fecero aspettare. Infatti il giorno 4 ottobre (18°) si ripresentò la striscia luminosa del 26 settembre. Il 4 novembre invece si riprodusse l'apparenza più oscura del 2 ottobre. Tutte queste mutazioni m' indussero a dar all'oggetto in discorso il nome di *Terra di Proteo.*

108. Qui non vi può esser dubbio. La Terra di Proteo si è coperta due volte di un velo luminoso, il 26 settembre e il 4 ottobre; e due volte si è discoperta. Essa ha mostrato dunque due volte di seguito e con rapida vicenda le medesime variazioni, che in un periodo più lungo ed una sola volta ho potuto constatare nella Noachide. Queste sono le osservazioni, le quali mi condussero a supporre che su questa specie di terre oscure (o bassi fondi come io li credo) si producano strati di nebbie, che ne imitano la forma. E abbiamo già veduto che tale supposizione giova a spiegare le variabili apparenze, che le Terre di Deucalione, di Pirra e di Noé hanno offerto a tanti osservatori degni di fede. Sulla causa, che può facilitare la produzione di nebbia in quelle regioni non è questo il luogo di esporre congetture.

Sezione XIII.

Arasse, Icaria, Colonne d' Ercole.

109. Dopo questa escursione fra le terre oscure del Mare Eritreo, ritorniamo al grande diaframma, e ripigliamo la descrizione delle regioni continentali, che avevamo abbandonata al Golfo Aonio ed al Fasi. Già ho indicato, che questo canale, uscendo dal Lago della Fenice si biforca e manda verso occidente un braccio tortuoso detto Arasse, il quale sbocca nell'estremità più orientale del Mare delle Sirene. L'Arasse vidi io per la prima volta il 24 settembre (98°) e molte volte dopo. Alla sua curvatura, che è molto evidente, e costituisce un caso piuttosto raro nei canali onde è sparso il pianeta, ho posto particolare attenzione, e ne feci parecchi disegni

il 24 e il 25. L'Arasse è più largo al principio e alla fine, che nel mezzo, dov'è estremamente sottile: ma non vi è difficoltà a seguirlo in qualunque parte del suo corso. Il 26 settembre (91°) mi sembrò anzi l'Arasse più visibile che la parte inferiore del Fasi.

110. Tra l'Arasse ed il Fasi giace la regione grossolanamente poligona, detta Icaria: sulla quale ho notato un colore alquanto meno luminoso, che nelle regioni confinanti di Thaumasia, di Dedalea, e d'Elettride. Specialmente notevole mi è sembrato il contrasto di luce fra Icaria e Dedalea lungo l'Arasse, che le divide. Al di là della bocca del Fasi l'Icaria è contornata dal Golfo Aonio, e al di là della bocca dell'Arasse, da breve tratto del Mare delle Sirene. L'angolo tra il Fasi e l'Arasse è chiuso dalle Colonne d'Ercole, canale di larghezza considerevole ed uniforme, uno dei più visibili del pianeta, il quale fa comunicare il Mare delle Sirene col gran Mare Australe. Le Colonne d'Ercole ho veduto per la prima volta il 20 settembre, o d'allora in poi sempre, anche il 3 gennaio 1878, quando il diametro del disco era ridotto a 8",4, e con qualche fatica ancora il 21 marzo, quando il diametro non era più di 5",2.

111. L'Arasse e le Colonne d'Ercole e il principio del Mar delle Sirene furono benissimo veduti da Kaiser il 10 dicembre 1864, e figurano anche sulla sua carta, sebbene interpretati in un modo particolare. Avendo infatti Kaiser ignorato del tutto la larga foce del Fasi, questa foce e il poligono d'Icaria fanno parte, presso di lui, della grande ovale di Thaumasia: le Colonne d'Ercole figurano come estremità destra del grande sopracciglio o arco che copre quella regione: l'Arasse, confuso col principio del Mare delle Sirene, forma un lungo raggio rettilineo uniforme. La Thaumasia di Kaiser, arricchita così dell'Aurea Cherso da una parte, e dell'Icaria dall'altra, occupa sulla sua carta 64° di longitudine, mentre sulla nostra carta senza quelle due appendici ne tiene soli 45°. Con questo si spiega perchè la Thaumasia di Kaiser, invece che da un grazioso contorno ellittico, è terminata in alto da un arco circolare, ed è appuntata in forma di mandorla alle sue due estremità. Ed ancor s'intende, perchè il Lago del Sole, il quale sulla mia carta occupa una posizione così eccentrica nell'ovale di Thaumasia, presso Kaiser sta quasi nel mezzo. Infatti anche presso di noi il Lago del Sole giace quasi esattamente nel mezzo fra la radice dell'Aurea Cherso e la foce delle Colonne nel Mar delle Sirene, che sono i due punti corrispondenti alle due estremità della Thaumasia di Kaiser. Così tutto s'accorda, e le differenze fra me e l'eccellente osservatore di Leyda non sono che apparenti (1).

112. Le Colonne d'Ercole sono chiaramente indicate anche da Lockyer (1862, 18 ottobre), Lord Rosse (1862, 14 settembre), Lassell (1862, 17 novembre). Maedler pure le disegnò benissimo nel suo 20° disco del 1830 colle porzioni attigue del Golfo Aonio e del Mare delle Sirene.

(1) Confesso che nel principio il trovare il Lago del Sole così eccentricamente collocato nell'ellisse di Thaumasia, in contraddizione flagrante con Kaiser, mi aveva fatto nascere il sospetto di cambiamenti, sospetto, che dietro le cose esposte, è certamente insussistente. Questo è un bell'esempio della necessità d'interpretare esattamente i disegni degli osservatori, prima di trarne conseguenze circa mutazioni possibili della superficie del pianeta.

Sezione XIV.

Dedalea, Canale delle Sirene, Oceano.

113. Al nord d'Icaria dall'altra parte dell'Arasse giace un altro tratto circondato da canali, segnato col nome di Dedalea. Il suo colore è press'a poco come quello di Thaumasia ed appartiene ai tratti chiari, se non chiarissimi, del pianeta. La dividono da Thaumasia e da Tharsis la parte più australe del Fasi, il Lago della Fenice ed il canale o fiume Eosforo. Quest' ultimo, uscito dal Lago del Sole, traversa quello della Fenice, e continua verso nord-ovest direttamente, ma giunto nelle vicinanze dell'Equatore sbocca nel gran canale detto Oceano. Tale sbocco dell'Eosforo è stato veduto da me molte volte, ma non mai molto distintamente, sebbene l'Eosforo stesso nei primi mesi del 1878 sia divenuto assai largo e visibile: talchè l'ho potuto ancora benissimo distinguere il 21 marzo, essendo il diametro apparente del pianeta 5″, 2.

114. Il limite occidentale di Dedalea è formato dal canale o fiume delle Sirene, il quale corre in direzione press'a poco meridiana ed ha la sua foce australe nel Mare delle Sirene vicinissima alla bocca dell'Arasse; la foce boreale è nell'Oceano, non lungi dall' Equatore. La parte australe del fiume delle Sirene è stretta, e precisamente delimitata: la foce boreale invece è larga in foggia di tromba. Questo canale l'ho veduto molte volte a partir dal 18 settembre, e si è mostrato abbastanza facile anche presso gli orli del disco: però durante il 1877 la parte inferiore più larga si è sempre mostrata pallida e senza limiti decisi. Certo questo in parte ha dovuto provenire da turbamenti dell' atmosfera di Marte; perchè infatti il 6 gennaio 1878 essendo il diametro di Marte ridotto a 8″, 2 contro ogni aspettazione mi comparve il canale delle Sirene largo, oscuro, e visibile più che prima non fosse mai stato; e questa appariscenza durava ancora il 21 di marzo, nel qual giorno potei discernere nettamente non solo la foce boreale di esso, ma anche una parte notabile della riva attigua dell'Oceano, prima veduta sempre in modo confusissimo. Credo che accostandosi il Sole all'equatore del pianeta (esso vi pervenne il 22 di febbraio 1878) si diradò la nebbia, e malgrado la maggiore distanza, divenne manifesto ciò che prima si vedeva dubbiosamente.

115. Questo fenomeno offerto dal canale Eosforo e dal canale delle Sirene di una bocca ampia e non sempre ben terminata si è presentato in varî altri luoghi di Marte, siccome accennerò. Della imperfetta visibilità può essere causa un velo di nebbia, che offuschi quella regione, come certamente è il caso del fiume delle Sirene: ma altre osservazioni mi lasciano pensare, che almeno in parte l'effetto si possa ripetere da una vera *deltazione* in quelle imboccature, cioè dalla divisione del canale maggiore in due o più altri canali, troppo sottili per essere discernibili. Allora deve nascere una sfumatura o una nebulosità scura su fondo chiaro nello stesso modo che dall' insieme di più stelle, invisibili una ad una, si formano piccoli cumuli aventi l'aspetto di nebulose. Citerò più sotto un esempio notabile di questa illusione.

116. L'Oceano, nel quale si versano l'Eosforo e il fiume delle Sirene quasi congiunti alla loro foce, egli stesso è un grandioso canale, forse il più notabile di quanti esistono nella superficie di Marte, tanto per la sua larghezza, che gli darebbe quasi diritto al nome di mare, quanto per la sua enorme lunghezza, che nell'opposizione del 1877 potei tracciare per 140° gradi circa, ma che probabilmente è ancora maggiore, non avendone potuto io vedere nè il principio, nè la fine. Prima a cagione delle nebbie che in settembre, ottobre, novembre e decembre occuparono costantemente la regione da esso percorsa, poi per effetto della soverchia distanza del pianeta in gennaio, febbraio e marzo, non mi è stato possibile vederlo che come un'ombra o serie continua di ombre in forma di nastro, di tinta poco scura e mal determinato nei suoi confini; così che sono da aspettarsi nel suo tracciamento molte e notevoli rettificazioni. La sua sezione orientale dal punto ove in esso si versa il Nilo (punto di cui avrei desiderato fare un esame più accurato) sino al meridiano 180° è quello di cui è stato possibile definire meno imperfettamente la giacitura, grazie specialmente alle vedute che potei ottenere in gennaio e marzo 1878. Molte dilucidazioni sull'Oceano e specialmente sulla sua riva boreale (che posso dire intieramente sconosciuta) si potranno ottenere nell'opposizione del 1879.

117. Non mi è stato possibile trovare traccia evidente dell'Eosforo e del canale delle Sirene presso alcuno degli osservatori da me consultati, se forse come rappresentante di quest'ultimo canale non si voglia considerar l'ombra che è a destra del disegno di Kaiser, 24 ottobre 1862. La presenza dell'Oceano in contiguità della regione da noi chiamata Dedalea è però testificata da Kaiser in modo indubitabile col suo disco del 23 novembre del medesimo anno. I disegni di Kaiser del 1864 sono contro ogni aspettazione ancor più poveri in questo luogo, che quelli del 1862, in cui il pianeta si presentava meno favorevolmente. La sua carta qui è affatto vuota. Il solo Dawes nell'opposizione del 1864 ha qui, come quasi per tutto, gran ricchezza di particolari, i quali però per la massima parte furono irreconoscibili nel 1877. Il suo disco del 3 novembre 1864 contiene appunto questa regione al centro, piena di strisce scure, la maggior parte delle quali tende dal nord-est al sud-ovest. Vi si distingue il Lago del Sole e il Mare delle Sirene. La lunga stria, che dall'estremo orientale di questo mare scende fin sotto a ciò che noi chiamiamo Tharsis, è stata da Proctor decorata del titolo di canale di Bessel (*Bessel's Inlet*). Sulla sua carta questo si estende lungo il 240° meridiano, che è il nostro 120°. Considerando attentamente quel disegno di Dawes si comprende però, che il canale di Bessel meglio starebbe sotto il 125° meridiano. Allora sulla nostra carta noi lo riscontriamo immediatamente ed esattamente, quanto a posizione e a forma, nel complesso formato 1° colle rive dell'Oceano contigue a Tharsis e a Dedalea; 2° col canale delle Sirene tutt'intero; 3° colla prima sezione del Mare delle Sirene, dalla bocca del detto canale fino rimpetto alle Colonne d'Ercole. Questa piccola porzione del Mare delle Sirene costituisce quella specie di lago, nel quale Dawes e Proctor terminano in alto il canale di Bessel. Tutto coincide dunque benissimo, ammettendo che a Dawes l'ultima sezione del Mare delle Sirene sia apparsa separata dal resto, probabilmente da strisce di nuvole. Il canale delle Sirene, e l'esistenza del nostro Oceano nelle parti contigue a Tharsis e a Dedalea si trovano così confermati dalle osservazioni di Dawes.

118. Con questo si rende anche ragione del perchè nella carta di Proctor il suo *Mare di Maraldi* (presso noi Mare delle Sirene e Mare Cimmerio) sia tanto più breve del vero. Fra i nostri punti fondamentali n. 19 e 41, che ne segnano le estremita vi sono gradi 107°, 5 di longitudine. Secondo Kaiser anzi vi sono 112°, 3 (vedi il catalogo dei suoi punti da noi riferito § 38). Invece Proctor mette soltanto 80°, al più 85°. Ma se consideriamo il lago, che forma il capo della *Bessel's Inlet* come parte del suo Mare di Maraldi, si ha per lunghezza totale 102°, ciò che si accosta molto più alla verità. Nei suoi bei dischi del 1858 Secchi non ha avuto occasione di presentare questa parte del pianeta con sufficiente evidenza.

Sezione XV.

Mare delle Sirene, Memnonia, Amazonide. Canali dei Giganti e dei Titani.

119. Siamo giunti al principio di quella lunga serie di mari interni, divisi da sottili diaframmi, che circondano, in direzione alquanto inclinata al parallelo l'emisfero australe di Marte per ben 165° di longitudine. Questa serie può considerarsi come un largo canale della superficie del pianeta, rotto in due punti da interruzioni di poco conto: è una formazione analoga a quella del gran canale detto Oceano, ma incomparabilmente meglio conosciuta di quello. Le due interruzioni accennate lo dividono in tre tronchi principali, cui ho applicato i nomi di Mare delle Sirene, Mare Cimmerio e Mare Tirreno. Una schiera di canaletti minori, per lo più giacenti nella direzione del meridiano, congiunge i tre mari suddetti da una parte coll'Oceano, che corre loro prossimo al nord con rimarchevole e costante parallelismo, dalla parte del sud col Mare Cronio, che può riguardarsi come una terza formazione analoga alle due prime e poco meno che loro parallela. Il Mare Cronio però non è chiuso fra continenti, ma per tre aditi principali comunica col gran bacino marittimo australe.

120. Esaminiamo da prima il Mare delle Sirene. Dalle bocche quasi congiunte dell'Arasse e del fiume delle Sirene questo mare corre a ponente declinando da prima circa 30° verso il sud e poco dopo riceve la foce interna delle Colonne d'Ercole (§ 110). Sotto il meridiano 145° cambia di direzione, e declina ora 30° verso il nord: tale direzione conserva costantemente sino al termine, ove è troncato subitamente in senso quasi perpendicolare alla sua lunghezza. Forma qui tre golfi: dei quali il primo e minore dà sbocco al fiume dei Giganti, il secondo e massimo forma la foce australe del fiume dei Titani: l'ultimo indica nello stesso tempo il termine della sua lunghezza, e l'istmo boreale della penisola Atlantide, che lo divide dal Mare Cimmerio. Il Mare delle Sirene è uno dei più oscuri del pianeta, e di tinta in circa uguale a quella del Lago del Sole: ma credo che sia meno oscuro del Golfo Sabeo e del Golfo delle Perle. La sua tinta mi parve sempre dovunque uniforme: le sue rive tagliate nettissimamente, formano collo splendore delle terre vicine un vivo contrasto, specialmente dal lato boreale.

121. Nel Mare delle Sirene entrano per l'estremo orientale l'Arasse, le Colonne, e il fiume delle Sirene, già descritti: per l'estremo occidentale il fiume dei Giganti e quello dei Titani. Le foci di questi due sono molto vicine, ma pur ben divise, e vanno

in direzioni fra loro divergenti. Procedendo però più al nord nelle vicinanze dell'Oceano ambidue diventano talmente sfumati, che non è possibile tracciarli con esattezza. Nel giorno 16 settembre e nei seguenti io li vidi confusi in una corrente unica allargantesi verso nord in forma di ventaglio. Soltanto il 27 ottobre mi riuscì di constatare che si trattava di due canali distinti e riuscii a separarne le due foci nel Mare delle Sirene. La terra compresa fra i due, di cui l'estensione, a causa delle sfumature accennate, è lungi dall'essere ben determinata, è chiamata Amazonide. Il 3 gennaio 1878, essendosi alquanto diradate le nebbie che prima coprivano questa regione, ho potuto ancora vedere e distinguere l'uno dall'altro il fiume dei Giganti e quello dei Titani, i quali mi parvero molto più larghi ed oscuri, che prima non fossero. Il fiume dei Titani era ancora visibilissimo il 10 febbraio, e il 18 marzo: in quest'ultimo giorno scrissi: « il fiume dei Titani è bellissimo, e mi pare molto dentato e tortuoso ». Il diametro apparente del pianeta era in quel momento di 5″,2.

122. Il fiume dei Giganti e quello delle Sirene coll'Oceano formano un ampio circuito, che parte dall'una estremità del Mare delle Sirene, e vi rientra all'altra estremità. La terra quasi circolare, che così è isolata dal resto, è detta Memnonia: in essa, e specialmente nella sua parte confinante col Mare delle Sirene è notevole un grado di splendore veramente straordinario, di cui l'uguale non ho trovato che sulla sponda occidentale d'Argyre e in un altro luogo di cui dirò più sotto. Questo splendore, che tuttavia rimane molto inferiore alla neve polare, è specialmente sensibile quando la Memnonia si trova presso quell'orlo del disco che non è affetto da fase. Ho potuto constatare questa cosa molte volte, ed ancora ultimamente il 18 marzo 1878. La stessa osservazione è stata fatta da Dawes, il quale nel suo disco del 3 novembre 1864 pone in questo luogo la nota: *White, almost glistening.*

123. Fino a questi ultimi tempi si è creduto, che il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio non facessero che un mare solo, al quale fu dato da Proctor il nome di *Mare di Maraldi*. Così considerato, questo mare è una delle macchie più rimarchevoli e più estese della superficie di Marte e fu notato anche dai primi osservatori, come si può vedere nell'*Areografia* di Terby. Qui accennerò soltanto che la figura del Mare delle Sirene colla piegatura in forma di collo d'uccello dalla maggior parte degli osservatori o non è indicata, o è debolmente indicata. Che questa però esistesse già nel 1864 nella forma assegnata sulla nostra carta è provato dal disegno che ne fece Kaiser il 10 dicembre di quell'anno: dove per ciò che riguarda il Mare delle Sirene e le Colonne d'Ercole l'accordo fra lui e me è tanto grande, quanto si può desiderare. Ma nel fare la sua carta pare che Kaiser non abbia tenuto conto di quel disegno: onde su di essa la figura del Mare delle Sirene è riuscita poco fedele. Quella piegatura dell'estremo orientale del Mare delle Sirene si trova anche abbastanza indicata nei due disegni fatti da Lockyer il 15 ottobre 1862. Nella carta di Proctor essa manca affatto, in conseguenza dell'esser stato troncato quel mare per separarne il capo della *Bessel's Inlet* (vedi qui sopra § 117). Non trovo presso nessun osservatore alcun cenno dei fiumi dei Giganti e dei Titani. Qualche indizio si può, volendo, vederne presso Dawes nel già citato disco del 3 novembre 1864.

Sezione XVI.

Atlantide I e II, Golfo e canale dei Lestrigoni.

124. Atlantide I chiamo quella lunga e sottile lingua di terra, che divide il Mare delle Sirene dal Mare Cimmerio. La sua larghezza è quasi uniforme, di circa 3° o 4° di circolo massimo (100 miglia o poco più): sembra un po' maggiore nella parte boreale, dove si attacca alla Zefiria. È facilmente discernibile, anche nell'aria mediocre, ed io ho potuto ancora distinguerla con tutta sicurezza la sera del 30 dicembre 1877, il diametro apparente del disco essendo ridotto a 8″,75 e il 7 febbraio 1878, il diametro apparente essendo di non più che 6″,54. In quest'ultima sera trovo scritto «Atlantide I di una strana evidenza». Il 18 marzo però, essendo l'aria discretamente buona, non si poteva più discernere nettamente: il diametro del disco era allora di 5″,2. Nella prima osservazione che feci dell'Atlantide I il 14 settembre 1877 (205°), credetti che il colore della penisola nell'istmo inferiore o boreale fosse alquanto più scuro che il resto, e rimasi dubbioso, se vi fosse una connessione decisa col continente di Zefiria. Questo dubbio non mi si presentò mai più altre volte, in condizioni atmosferiche anche molto più felici. Debbo però ad ogni modo notare, che la parte orientale di quell'istmo e il golfo attiguo, formato dal Mare delle Sirene nel nostro 26° punto fondamentale, non mi apparvero mai con distinzione completa e in modo da soddisfarmi pienamente. Vi è certamente in questo luogo qualche particolarità riservata ad osservatori avvenire.

125. Fin dallo stesso giorno 14 settembre notai, essendo l'atmosfera molto tremolante, che la parte del Mare Cimmerio costeggiante l'Atlantide I pareva molto meno oscura che il rimanente del medesimo mare: la stessa osservazione feci il 20 ottobre consecutivo. Finalmente il 21 ottobre (199°) venni in chiaro della causa reale di quest'apparenza, e scoprii quella lunga e dritta penisola quasi parallela ed uguale all'Atlantide I, ma un po' più sottile, che sulla carta è segnata Atlantide II. Lo stesso giorno, essendo 218° la longitudine del meridiano centrale, notai che essa era affatto diritta, un po' più stretta in alto che in basso, e terminata in alto con una punta ottusa e sfumata. Vidi inoltre, che aveva una tinta alquanto più chiara del Mare Cimmerio, ma più scura dell'Atlantide I: onde anche questa penisola è da mettere insieme a quelle di Deucalione e di Pirra. L'Atlantide II è un oggetto molto difficile: il 30 dicembre, essendo il disco ridotto a 8″,75 di diametro non si poteva più riconoscere, mentre era tuttavia visibilissima l'Atlantide I.

126. Lo spazio di Mare Cimmerio, che è compreso fra le due Atlantidi, il 21 ottobre sembrava sufficientemente oscuro, e l'ho chiamato Golfo dei Lestrigoni. Nel suo intimo recesso fra gl' istmi boreali di Atlantide I e di Atlantide II ha la sua foce il fiume dei Lestrigoni, il quale limita ad occidente la Zefiria. Esso corre press'a poco nella direzione del meridiano, e l'altra sua foce che per le nebbie soltanto con grave difficoltà e penosa incertezza ho potuto travedere nei giorni 20, 21, 27 ottobre e 30 dicembre, sta sul gran fiume Oceano. Il fiume dei Lestrigoni è assai

meno visibile che quelli delle Sirene, dei Titani e dei Ciclopi; tuttavia l'ho ancora potuto riconoscere il 7 febbraio 1878, il diametro apparente del disco essendo allora di 6",54.

127. L'Atlantide I come diaframma dividente il Mare Cimmerio dal Mare delle Sirene si può già riconoscere nei disegni fatti da Maedler nel 1837 (vedi specialmente i dischi 7, 14, 15, 16, 17 nella Tavola V dei *Beiträge*), in una forma però, a dir vero, molto rudimentare. Dopo di lui varî osservatori la videro e la disegnarono, specialmente Lockyer e Kaiser nel 1862, i cui dischi sufficientemente s'accordano col nostro tracciamento. Il 9 e l'11 ottobre 1862 riuscì anzi a Lockyer di constatare tracce della nostra Atlantide II, la quale però secondo lui aderirebbe alla riva australe del Mare Cimmerio, anzichè alla settentrionale. Per altre descrizioni dell'Atlantide I si può consultare l'*Areografia* di Terby, pag. 90. Il sig. Terby, che ha avuto il merito di chiamare l'attenzione degli osservatori su questa penisola, propone per essa il nome di *Terra di Webb*.

128. Quanto al fiume dei Lestrigoni, sembra ch'esso appaia sulla nostra carta per la prima volta: a meno che non si voglia ravvisarlo nella leggera nube, che sul disegno di Kaiser del 3 gennaio 1865 occupa la parte sinistra inferiore del disco. La bocca del fiume dei Lestrigoni nel Mare Cimmerio è poi certamente indicata da Phillips nel suo disegno del 15,16 ottobre 1862; io la ravviso almeno nella piccola indentazione che segue a destra l'istmo inferiore di Atlantide I, abbastanza chiaramente, se non esattamente, indicato sul medesimo disegno.

Sezione XVII.

Mare Cimmerio: Fiume dei Ciclopi.

129. Ciò che resta dell'antico Mare di Maraldi dopo tagliatone il Mare delle Sirene e le due Atlantidi, designo col nome di Mare Cimmerio. La sua tinta è discretamente uniforme, il colore uguale a quello del Mare delle Sirene e del Lago del Sole; ma le sue rive non son da per tutto ben decise, specialmente le australi, che io ho rappresentato con una semplice linea diretta lungo il parallelo, senza poter discernervi indentazioni notevoli altre che le bocche dei canali Simoe e Scamandro. Invece molto ben definita è la riva occidentale lungo la penisola detta Esperia.

130. Il Mare Cimmerio ha comunicazione col gran fiume Oceano per mezzo di due aditi: cioè pel fiume dei Lestrigoni, e per il fiume dei Ciclopi. Il primo è già stato descritto. Molto più importante di questo sembra però il fiume dei Ciclopi, che ho sempre potuto vedere tutte le volte che questa parte del pianeta si è presentata alla vista. In settembre, ottobre e novembre veramente esso appariva più come ombra sfumata e indistinta, che come linea continua, a cagione senza dubbio delle nebbie, che ingombravano in quel tempo questa parte delle terre equatoriali. Ma queste essendosi diradate più tardi col scendere del Sole verso l'Equatore, nei giorni 25, 28 e 30 dicembre, non arrivando il diametro del disco a 9" lo vidi come lunga striscia apparentissima ed oscura scendere prima per forse 18° o 20° nella direzione del meridiano, per volgersi poi a nord-est e raggiungere anch'esso il fiume Oceano, confermando così i tracciamenti anteriormente da me ottenuti con molta fatica. Questa

visibilità poi si mantenne sempre durante le osservazioni del 1878, e ancora si manteneva il 17 marzo, sebbene il diametro del disco allora fosse poco più di 5″. Io non posso credere che la larghezza del fiume dei Ciclopi sia meno di 3° o 4° di circolo massimo (100 miglia almeno) anche nelle parti più anguste. La regione giacente fra il fiume dei Ciclopi e quello dei Lestrigoni ho chiamato Eolide.

131. Per quanto concerne le osservazioni anteriori del Mare Cimmerio, rimando all'*Areografia* di Terby. Qui noterò solo, che l'ampio e visibile fiume dei Ciclopi non può esser altro che l'ingresso del vasto mare interno segnato sulla carta di Proctor col nome di *Huggins Inlet*: mare interno che forse in qualche parte è identico al nostro Oceano. In quella carta Proctor ha avuto per fonte un disegno di Dawes del 1° dicembre 1864. La curvatura e la direzione del corso non coincidono che mediocremente, ma considerate le molte minute discordanze che quello stesso disegno presenta con altri osservatori in mezzo ad una concordanza approssimativa generale, l'identità non mi pare dubbia. La posizione della imboccatura nel Mare Cimmerio coincide a capello. Nelle osservazioni del 28 e 30 dicembre 1877 io ho posto molta attenzione per verificare se si poteva ridurre il tracciato del fiume dei Ciclopi a riprodurre esattamente il principio dell'*Huggins Inlet*; ma mi son convinto ciò non esser possibile. Il fiume dei Ciclopi esce dal Mare Cimmerio seguendo per circa 20° la direzione del meridiano, e soltanto più basso piega ad oriente: mentre secondo Dawes e Proctor la direzione dell'*Huggins Inlet* fa col meridiano angolo di 45° circa appena uscendo dal Mare Cimmerio e più sotto fa un angolo anche maggiore.

132. Il sig. Terby ha raccolto tutte le testimonianze degli osservatori, che si possono riferire all'*Huggins Inlet* (*Aréographie*, p. 93-96). Ve ne sono parecchi che confermano il mio modo di tracciarne l'ingresso nel mare Cimmerio. Il disegno di Secchi del 20 giugno 1858 mostra a manca due canali in direzione del meridiano, uno dei quali sembra non possa esser che il fiume dei Ciclopi. Le testimonianze di due altri disegni del 17 e 18 giugno non possono esser chiamate in esame, trovandosi allora quella regione troppo prossima ai limiti del disco. Il disegno del 24 giugno sarebbe decisivo, se non fosse fatto in aria cattiva. Kaiser nel disco dell'11 ottobre 1862 ha a destra una striscia nel senso del meridiano, che indica una vaga percezione del fiume dei Ciclopi. Come poi la medesima striscia nella carta di Kaiser si presenti obliquamente al meridiano proprio nella direzione dell'*Huggins Inlet* di Proctor, è quanto per ora non intendo. Forse Kaiser ebbe qui in maggior conto il disegno del 7 gennaio 1865, contenente in questo luogo un'ombra indistinta, che potrebbe anche sembrare un ampio mare. Il disegno 41° dell'*Areografia* di Terby fatto dal sig. Gledhill il 6 aprile 1871 dà una direzione meridiana, esattamente come Secchi ed io. Franzenau nel suo disco VI (22 nov. 1864) ha la stessa cosa. Anche il 16° disegno di Knobel (31 maggio 1873), se si attende all'obliquità della projezione ortografica, sembra accostarsi abbastanza al nostro modo di vedere, almeno nella parte prossima al Mare Cimmerio. Speriamo che nell'opposizione del 1879 si riesca a dileguare almeno una parte di queste incertezze.

Sezione XVIII.

Fetontide, Elettride, Eridania.

133. Queste tre regioni formano una zona luminosa limitata al nord dal Mare delle Sirene e dal Mare Cimmerio; al sud dal Mare Cronio, che si stende in direzione del parallelo con larghezza presso a poco uniforme dalle Colonne di Ercole alla gran penisola Ausonia, e aderisce alle terre equatoriali per mezzo dell'Atlantide I e dell'Esperia. Lo splendore di questa zona in sè è alquanto minore che quello delle terre poste sotto il grande diaframma, ma spicca tuttavia abbastanza in mezzo all'oscurità dei mari che la limitano dalle due parti. In generale sembra più luminosa nella parte occidentale presso Ausonia, che nella parte orientale attigua alle Colonne.

134. A partir dalle Colonne è il tratto detto Fetontide, a cui si attacca con perfetta continuità l'istmo australe di Atlantide I: subito dopo viene il canale detto Simoe, il quale gira descrivendo un arco molto pronunziato, ed è uno dei pochi che siano così curvati. Il Simoe è certamente una delle cose più difficili di Marte: esso mi sfuggì del tutto nella prima serie di osservazioni da me fatte su questa regione nei giorni 16-22 settembre e non lo vidi prima del 21 ottobre (197°), nel qual giorno potei delinearne con sicurezza la forma. Ne verificai ancora l'esistenza il 27 ottobre consecutivo (147°).

135. Vien dopo la terra detta Elettride di forma trapezoide, su cui nulla ho a dire: poi lo stretto o canale detto Scamandro. Questo va dritto dal sud al nord, ed è molto più facile a scoprire, che il Simoe. Lo vidi il 16 settembre per la prima volta, e molte altre volte dopo fino al 30 dicembre, in cui era ancora discernibile, essendo il diametro del disco di soli 9″. Il 7 di febbraio non si riconosceva più, anche in buono stato di atmosfera.

136. L'Eridania propriamente non è che la testa australe della gran penisola Esperia. Essa mi parve sempre assai luminosa in confronto delle regioni vicine, specialmente in prossimità dell'orlo del disco; e questa osservazione trovo ripetuta ancora sotto il 24 dicembre. La divide dall'Ausonia il canale Xanto, facilmente visibile anch'esso, del quale la prima osservazione è del 13 settembre, l'ultima del 1° febbraio. Questo ha una foce nel fondo del Mar Tirreno, e l'altra in un ampio golfo del Mare Australe, detto Golfo di Prometeo. Tanto lo Xanto come lo Scamandro mi parvero visibili più per la larghezza, che per la nerezza: ho creduto anche di vedere, che fossero mal terminati alle due sponde.

137. I limiti boreali delle terre qui descritte sono stati osservati necessariamente da tutti quelli, che han veduto il Mare Cimmerio e il Mare delle Sirene. I limiti australi soltanto da quelli che hanno osservato con certezza il Mare Cronio. Vedi la sezione XIX. I canali Scamandro e Simoe compajono qui per la prima volta. Ma lo Xanto è chiaramente indicato da Lockyer (1862, 3 e 9 ottobre), e un po'più confusamente da Kaiser. Anche la linea punteggiata, che termina la parte australe d'Ausonia presso Maedler nella sua carta del 1830 sembra accennare a qualche osservazione fuggitiva od incerta dello Xanto. Il secondo disco del 1832, pubblicato da Maedler nei *Beiträge*, contiene dello Xanto una indicazione anche meno incerta.

Sezione XIX.

Mare Cronio, Thyle I e II.

138. Dal Golfo Aonio e dalla bocca del Fasi la riva del Mare Australe si estende dritta ad occidente per circa 180° di longitudine, salendo poco a poco dal 45° al 58° parallelo sud, e formando varî seni poco evidenti ad eccezione di quello che corrisponde alla foce australe del Simoe, e dell' altro che corrisponde alla foce dello Xanto. Quest'ultimo seno si presentò il 14 ottobre (275°) in ottima condizione d'atmosfera con molta determinazione ed evidenza; mentre il primo è reso sensibile soltanto da uno stringimento che la zona luminosa delle terre descritte nella sezione precedente sembra subire in quel luogo. Le due isole Thyle I e Thyle II formano qui, colle terre ora accennate, una specie di lungo mare mediterraneo a più sbocchi, al quale ho dato il nome di Mare Cronio. Esso si è presentato generalmente come una striscia poco meno scura che il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio, attraversante, quando il 190° meridiano passava al centro, tutto il disco visibile da destra a sinistra secondo il parallelo; sembrava una corda oscura tesa nel circolo che contornava il disco. Nell'aria ottima invece si è potuto riconoscere che la larghezza del Mare Cronio non è affatto uniforme, sia a cagione delle indentature del lato boreale, sia anche per causa dello stretto d'Ulisse, che passa fra le due isole di Thyle, e per causa del contorno rotondeggiante di queste. Simili ineguaglianze, come pure la larghezza stessa del Mare Cronio si presentano alquanto ridotte, a cagione dell'obliquità secondo cui si projettano: durante le osservazioni il raggio visuale in media fu inclinato di 55° sulla superficie esaminata. Il Mare Cronio è visibilissimo, sempre che non sia occupato da nebbie: io lo vidi ancora con tutta facilità il 3 gennaio e il 10 febbraio, essendo il disco apparente ridotto a 8″,5 e a 6″,4 di diametro.

139. Della vera condizione delle due isole di Thyle non fui informato che per successivi gradi. Nel giorno 13 settembre e nei consecutivi riconobbi che il Mare Cronio nella parte occidentale era separato per un intervallo più chiaro dal mare che circondava la calotta nevosa. Questo intervallo mi parve arrotondarsi verso il suo termine occidentale presso il meridiano del fiume Xanto. Più tardi il 20 settembre (152°), essendo la Fetontide al meridiano centrale, vidi un promontorio splendente e rotondo al sud delle Colonne d'Ercole. Supposi che quelle due estremità rotondeggianti appartenessero ad una unica isola allungata secondo il parallelo, che chiamai Thyle. Fui però disingannato il 20 ottobre (219°), per la scoperta di uno stretto, che tagliava questa supposta isola in due altre minori. Tale stretto, che sulla carta porta il nome d'Ulisse, era evidentissimo, malgrado che avesse già passato il meridiano da lungo tempo e fosse già molto vicino all'orlo sinistro del disco. Vidi allora nettamente anche i termini australi delle due isole, che mi parvero ovali allungate nel senso del parallelo, a cagione dell'obliquità della projezione: in realtà esse sono press'a poco rotonde. Il 21 ottobre riuscii ad osservare il passaggio dello stretto d'Ulisse al meridiano centrale: dirò più esattamente del suo asse, che corre quasi esattamente nella direzione nord-sud. In questa circostanza notai che la più occidentale delle due isole (Thyle II) sembra essere

alcun poco più grande e più australe dell'altra, o di Thyle I. Altre osservazioni di posizione rispetto alle due isole feci il 27 ottobre, confermando le annotazioni precedenti.

140. È singolare la splendidezza e la visibilità di queste isole, quando sono prossime all'orlo del disco. Molte volte ho veduto presentarsi Thyle II col suo estremo occidentale sull'orlo sinistro, quando al centro passava il 280° meridiano, o qualche altro ad esso vicino. L'ultima osservazione di tal genere fu fatta il 16 novembre, essendo il diametro del disco ridotto a 13″,3. Ho già avvertito, che la stessa loro esistenza mi risultò dal loro presentarsi all'orlo del disco in forma di macchie luminose poco distanti dalla macchia nevosa polare; ed ho anche avvertito, che lo stretto d'Ulisse fu scoperto quando già era molto lontano dal meridiano centrale. Sono apparenze analoghe a quelle che ho già narrato a proposito d'Argyre.

141. Il Mare Cronio già si trova disegnato con molta esattezza da Maedler nel 1830. È anche benissimo indicato sul disco di Secchi del 18 giugno 1858. Lockyer pure l'ha veduto il 3, 9, 11 ottobre 1862. Taccio di altri osservatori. Kaiser non solo indica sulla sua carta il Mare Cronio nel suo stile indeterminato e nebuloso; ma ha perfino sopra di esso una macchia abbastanza luminosa, che non dubito d'identificare con l'isola di Thyle I. Le longitudini assegnate ai termini di questa sono 258° e 305°, o secondo il nostro modo di contare, 143° e 190°, mentre noi abbiamo 134° e 180°; la differenza in parte è dovuto a ciò, che Kaiser ha preso come polo della sua carta la macchia nevosa; in parte si spiega coll'imperfezione dell'immagine da lui avuta. La latitudine collima benissimo colla nostra. Thyle II sembra invece sia stata confusa coll'Eridania da Kaiser, il quale non ha veduto lo stretto denominato sulla nostra carta stretto di Tifi. Qualche traccia di Thyle si ha egualmente presso Lockyer nei già citati disegni, sebbene la troppa estensione che vi si assegna possa dar fondamento a giusti dubbî. Il disegno che la carta di Proctor dà di queste regioni è affatto insufficiente, il Mare Cronio non potendo certamente esser confuso con ciò ch'egli chiama *Mare di Phillips.* Anche la viziosa disposizione dei suoi *Mari di Maraldi e di Hooke* ha contribuito a rendere i suoi tracciamenti affatto difformi dal vero.

Sezione XX.

Esperia, fiume degli Etiopi.

142. Fra il Mare Cimmerio e il Mar Tirreno si allunga nella direzione generale da nord-ovest a sud-est la grande penisola Esperia, congiungendo la zona delle terre equatoriali con la zona delle terre descritte nella sezione XVIII. Il suo asse è alquanto curvato, e la larghezza non è costante, ma nella parte boreale almeno due volte maggiore che nell'australe, dove sotto la latitudine di circa 30° sud si restringe a meno di 8° di circolo massimo.

143. Ciò che rende per noi importantissima questa penisola è l'ombra forte che si stende attraverso alla sua parte più angusta sopra un terzo circa della lunghezza. Il termine australe di quest'ombra è piuttosto ben definito, e dall'intimo seno del Mar Tirreno si stende a nord-est attraverso alla penisola fino al Mare Cimmerio: presso questo termine l'ombra ha il suo massimo grado d'oscurità, il quale però

ancora non giunge alla nerezza del Mar Cimmerio, e meno ancora a quella del Tirreno. A partir da esso limite l'ombra viene digradando e facendosi sempre meno densa, così che verso il mezzo della penisola non se ne scopre più traccia. Non sono mai riuscito ad afferrarne con precisione il vero limite boreale, e pare che qui dall'ombra si passi alla luce per gradi insensibili. Questi fenomeni mi sembrano permanenti, ed ogni volta che ho potuto veder bene Esperia al centro del disco, sempre l'ombra era visibile allo stesso modo: l'ultima volta potei distinguerla con certezza il 4 febbraio 1878, essendo il diametro apparente di Marte 6″,67.

144. Ho pure fatto l'osservazione costante, che quando Esperia era portata dalla rotazione del pianeta presso l'orlo del disco, invariabilmente quell'ombra appariva più scura, simulando allora un'estensione dei mari fra cui è posta. Allora Esperia appariva troncata nella parte superiore e si presentava come una semplice prominenza obliqua e peninsulare del continente equatoriale. La prima vista di questo genere ebbi il 10 settembre (280°), essendo l'ombra distante già 55° di longitudine dal meridiano centrale. Da principio anche credetti che fosse questa l'apparenza normale, e segnai in luogo dell'ombra un canale comunicante fra il Mar Tirreno e il Mar Cimmerio. Alcuni giorni dopo però dovetti rettificare le idee. Infatti già il 12 settembre dovetti avvedermi, che quando Esperia è al meridiano centrale, malgrado la presenza dell'ombra i due lati destro e sinistro della penisola continuano visibilissimi per tutta la sua lunghezza ed attestano così una unità di formazione geografica, della quale è necessario tener conto. Addurrò più tardi gli argomenti che mi fanno credere probabile, che Esperia verso il suo mezzo abbassi tanto il suo livello, da esser inondata dal Mar Cimmerio e dal Mar Tirreno, stabilendo così fra i due bacini una comunicazione accidentale. Il fatto, che l'ombra sta appunto nel luogo più stretto della penisola, accresce per me questa probabilità, o per lo meno riceve, nella precedente ipotesi, una spiegazione molto naturale.

145. Dalla parte d'Eridania i confini d'Esperia non sono nettamente determinati: io li segno lungo il 40° parallelo australe. Non così all'estremità boreale. L'ultimo e più occidentale seno formato dal Mare Cimmerio riceve la bocca del fiume degli Etiopi, canale che vien dritto dal nord ad sud, e stabilisce un'altra comunicazione a traverso del continente equatoriale. La foce del canale degli Etiopi nel Mare Cimmerio fu da me scoperta per la lunghezza di 5 o 6 gradi il 14 settembre (219°): più oltre le nuvole non concessero di vedere in quello e nei giorni seguenti. Il 20 ottobre mi fu possibile seguirlo per circa 10° sempre nella stessa direzione. La sera del 21 ottobre vidi il prolungamento ulteriore, fino all'incontro coll'Eunosto, e scoprii il canale Lete, che unisce il fiume degli Etiopi alla Piccola Sirte ed al Mar Tirreno, delimitando così completamente Esperia da quella parte. Sulla rete di canali che solcano questa regione dirò sotto più accuratamente.

146. L'Esperia fu osservata molto bene da Maedler nel 1830; il disegno ch'egli ne dà coincide quasi esattamente col nostro. Veramente nella carta da lui pubblicata non appare l'ombra di cui ho parlato: ma se si considerano bene i suoi dischi n. 11, 13, 14 e 17 la si troverà proprio nel luogo che le si conviene. Non si poteva far di meglio! Anche Lassell nel disco del 5 novembre 1862 s'accorda bene. Invece Kaiser e Lockyer nel 1862 e Dawes nel 1864 figurano Esperia come una striscia

di larghezza e di chiarezza quasi uniforme, anzi Dawes dà all'istmo boreale o inferiore uno stringimento affatto singolare e contrario a tutte le altre osservazioni; e questa configurazione è passata nella carta di Proctor, dove la penisola ha il nome di *Terra di Burckhardt*. Nessuno di questi ha indizio dell'ombra che copre la parte più angusta di Esperia.

147. Altri osservatori invece videro benissimo quell'ombra, e la sezione da essa occupata attribuirono al mare, disegnando Esperia come una penisola molto più breve, attaccata soltanto in basso al continente equatoriale. Simile interpretazione si trova presso Secchi (17 e 18 giugno 1858): Franzenau (20 novembre 1864): Green (n. 43 e 49 dell'*Areografia* di Terby, 16 e 28 maggio 1873): osservatori tutti, pei quali l'ombra allora appariva alta presso l'orlo del disco. Questo dunque è un effetto simile a quello da me notato qui sopra § 144, e certamente è dovuto alla medesima causa, l'obliquità della linea visuale rispetto alla superficie di quella regione. Sulla natura probabile del modo con cui opera questa causa esporrò più tardi una congettura.

Sezione XXI.

Mare Tirreno. Piccola Sirte. Fiume Lete.

148. Nella grande zona dei mari interni che siam finora venuti descrivendo, il Tirreno forma l'ultima e la più grande sezione. Esso si stende sopra una larghezza pressochè uniforme di 8 a 10 gradi in direzione obliqua da nord-ovest a sud-est per una lunghezza non minore di 80°: comunica col Mare Cronio per mezzo dello Xanto: coll'Oceano e coll'Eunosto per mezzo del fiume Lete, e forse, per mezzo del Nilo, col Mar Polare boreale. Sembra poi, che coll'inondazione di certi bassi fondi esso si mescoli anche col Mare Cimmerio e col Mare Eritreo. Nelle parti australi il suo colore è simile a quello del Mare delle Sirene, ma nelle parti boreali è anche più cupo e non inferiore in nerezza al Golfo delle Perle. Ad occidente limita la gran terra d'Ausonia, che gli si stende parallela: ad oriente e settentrione spinge nella zona delle terre equatoriali due profondi golfi, detti sulla carta Grande e Piccola Sirte.

149. La Piccola Sirte limita verso occidente la parte inferiore di Esperia, e si spinge come punta acuta entro terra nella direzione di nord-est. Nel suo intimo recesso confluiscono due canali, il fiume Lete e il fiume Tritone. Di quest'ultimo, che è il principale diremo più sotto. Quanto al fiume Lete, esso è un breve tronco di 12 o 15 gradi di lunghezza, che continua lungo l'asse primitivo della Piccola Sirte fino ad incontrare sotto angolo acuto il fiume degli Etiopi, ed isolando così Esperia dal resto delle terre equatoriali. Il fiume Lete è uno degli oggetti più difficili da me incontrati nell'esplorazione di Marte. Molte e molte volte io aveva esaminato la Piccola Sirte e la foce del fiume Tritone, e mi era maravigliato della maniera poco naturale con cui si congiungono insieme. Un simile gomito ad angolo retto era senza esempio nei canali fin allora da me veduti in Marte. Il 20 ottobre (234°) per aria assai buona, dopo aver scoperto in quei luoghi varie novità esaminai attentamente l'intervallo fra la Piccola Sirte e il fiume degli Etiopi. Non vidi nulla: onde fui convinto, non essere Esperia in alcun modo divisa dalle terre equatoriali. Ma il

21 ottobre (216°) ebbi un intervallo veramente magnifico, durante il quale constatai e l'esistenza del Lete, e la sua connessione col fiume degli Etiopi, e la connessione, quasi egualmente delicata, di questo coll' Eunosto. Lo schizzo fatto rapidamente in quel momento servì di base alla carta.

150. Il Mar Tirreno è chiamato *Hooke's Sea* nella carta di Proctor, ed è un oggetto dei più noti sulla superficie di Marte. Anche il golfo detto Piccola Sirte si trova indicato con maggiore o minor evidenza presso quasi tutti gli osservatori. Veggansi principalmente Maedler, Secchi, Kaiser, Lockyer e Dawes.

Sezione XXII.

Ulteriori osservazioni sul fiume Oceano. Eunosto, Campi Elisi.

151. Lo stato veramente sfavorevole dell'atmosfera di Marte, che dominò negli ultimi mesi del 1877 lungo tutta la regione che si estende al nord del Grande Diaframma fra i meridiani 90° e 200° ha impedito di fare sul grandioso Canale Oceano osservazioni molto esatte. Tutte le foci che in esso hanno i numerosi canali che vengono dal sud, dall' Eosforo al fiume dei Ciclopi, furono, durante la maggior appariscenza del pianeta, appena travedute e disegnate su impressioni più o meno fuggitive. Alcune osservazioni fatte in dicembre, gennaio, febbraio e marzo manifestarono in tutte quelle linee una colorazione più interna, e un corso più deciso: ma le dimensioni del disco erano allora troppo ridotte, perchè fosse possibile trarre da quelle osservazioni delineamenti molto sicuri.

152. Come ho detto, il principio e la fine dell' Oceano non si poterono da me osservare: la sua presenza mi constò indubitatamente nei confini di Tharsis e di Dedalea, e di là fino al canale delle Sirene è confermata anche dalle osservazioni di Dawes (§ 117). Senza troppa difficoltà, ma come ombra sfumata e non definibile con esattezza fu veduta la parte compresa fra il fiume delle Sirene e quello dei Titani: la miglior osservazione qui fu fatta il 27 ottobre, e confermata a più riprese, ultimamente ancora il 21 marzo, ma in distanza troppo grande del pianeta. Dalla foce del fiume dei Titani a quella del fiume dei Ciclopi si hanno molte osservazioni, ed anche tentativi di determinar posizioni (come quelle dei nostri punti 28, 29, 33) ma nulla di ben preciso. A partir dalla foce del fiume dei Ciclopi l'Oceano si volge al nord seguendo il 200° meridiano. Questa parte è stata disegnata il 27 e il 28 ottobre e riveduta piuttosto bene il 30 dicembre. La sua esistenza è sicura, non così la forma del suo corso, che si presentava in troppo grande scorcio. Invece incerta anche riguardo all' esistenza è l'altra diramazione verso il nord, segnata di contro al fiume dei Titani. Credo poi sicura l'esistenza di altro canale o mare al nord dell'Oceano, segnato fra i meridiani 130° e 150°: forse è una circonvoluzione o diramazione dell' Oceano stesso: ma la posizione è molto dubbiosa. Tutte queste sono osservazioni del 27 e 28 ottobre, fatte in molta prossimità del lembo inferiore e impedite dall'atmosfera poco trasparente del pianeta. Le osservazioni posteriori da me fatte su questa parte non giovarono molto alla sicurezza dei tracciamenti.

153. Per quanto concerne la larghezza dell' Oceano, essa probabilmente non è così uniforme come indica la carta. Era impossibile assegnar misure di cose, la cui

esistenza appena si poteva metter fuori di dubbio. Lo stesso dico delle gradazioni delle tinte, dove le tinte eran sì poco discernibili. Delle terre poste a settentrione dell'Oceano non è possibile affermar altro che la loro esistenza, e tutto deve rimettersi all'esame da farsi nelle prossime opposizioni.

154. Dall'Oceano entrando nel fiume dei Ciclopi per la larga sua foce boreale si incontra una diramazione di esso verso nord-ovest detta Eunosto, la quale raccoglie il fiume degli Etiopi ed il Lete ad esso congiunto, facendo così comunicare l'Oceano col Mar Tirreno: da questa parte l'Eunosto non pare molto ampio, ma più oltre verso nord-ovest si allarga forse quanto l'Oceano, ed il suo corso va dritto a congiungersi col Nilo nella gran piegatura che questo fa verso Occidente: nell'intervallo raccoglie dal sud la foce del fiume Thot, che viene dal Lago Tritone. L'Eunosto fu da me scoperto il 20 ottobre nella sua parte più orientale: il suo prolungamento fino al Nilo, e la sua congiunzione col Lago Tritone per mezzo del Thot furono constatati, non senza qualche dubbiezza residua, il 9, 10 e 12 marzo, nei quali giorni pure fu veduto di nuovo tutto il fiume degli Etiopi. In queste ultime osservazioni l'Eunosto era molto nero e visibile, malgrado che il diametro apparente del disco del pianeta non fosse più che 5″,45. La parte occidentale dell'Oceano, il fiume dei Ciclopi, e l'Eunosto formano un grande arco; alla terra compresa nel suo interno si è dato il nome di Campi Elisi.

155. Osservazioni così incerte, come sono le precedenti, non possono dare un paragone molto istruttivo coi risultati dei disegni anteriori. Già si è veduto, che l'esistenza dell'Oceano sotto Tharsis e Dedalea ha per sè anche la testimonianza di Dawes. La parte seguente fra il fiume delle Sirene e quello dei Titani sembra in qualche modo indicata nei disegni di Maedler (vedi *Beiträge*, 1832 n. 1 e 2: 1837, n. 6, 7, 15, 16, 17), ma con poca sicurezza. La carta pubblicata nei *Beiträge* non darebbe a dir vero una concordanza molto soddisfacente col nostro tracciamento. Certamente però tutto l'Oceano dal fiume delle Sirene a quello dei Ciclopi è stato veduto a Washington da Harkness il 6 settembre 1862 (1). Anche Secchi ha la medesima parte dell'Oceano nel suo disco del 16 novembre 1862. Kaiser qui non mette che ombre diffuse: Lockyer ha niente affatto. Quel tronco dell'Oceano invece che si dirige verso settentrione sotto il 200° meridiano è molto bene indicato da Maedler nella sua carta dei *Beiträge*. La coincidenza di posizione, direzione e curvatura è qui completa quanto si può desiderare. Indicato pure sembra questo giro dell'Oceano nel 49° disegno dell'*Areografia* di Terby, eseguito dal sig. Green il 13 maggio 1873: e sarebbe la macchia curva, che occupa il centro del disco.

156. Lo stesso tronco settentrionale-occidentale dell'Oceano, insieme col fiume dei Ciclopi e coll'Eunosto formano un ampio arco, nel quale mi pare di ravvisare parte dell'*Oudemans' Inlet* della carta di Proctor. L'accordo è abbastanza soddisfacente tanto per la forma, quanto per la posizione. L'*Oudemans' Inlet* s'incontra pure in varî disegni del signor Knobel (1873) stando ai quali essa formerebbe un circuito chiuso, e i Campi Elisi (*Fontana's Land*) ne occuperebbero il centro in forma d'isola.

(1) *Washington observations*, 1862 pag. 512.

157. L' Eunosto è certamente indicato da Secchi nel disco del 20 giugno 1858 e vi è tracciata anche la sua connessione col fiume dei Ciclopi, il tutto però in forma alquanto diversa dalla nostra. Kaiser ha tracce indubitabili, sebbene indeterminatissime, dell' Eunosto nei suoi dischi del 29 novembre e del 28 dicembre 1864. Da quest' ultimo anzi sarebbe indicato il fiume degli Etiopi, come pure nel disegno 43° dei pubblicati da Terby nell'*Areografia*. Anche Franzenau sembra darne indizio nei suoi dischi del 20 e del 22 novembre 1864: che poi il fiume degli Etiopi sia stato delineato da Secchi nel disco del 20 giugno 1858 mi pare indubitabile, malgrado alcune difficoltà che quest' ipotesi sembra sollevare.

158. Ciò che non si può trovare in alcun modo nel nostro disegno è la parte orientale dell'*Huggins Inlet* di Dawes e di Proctor. Già ho detto che la parte occidentale non può rintracciarsi, se non identificandola col nostro fiume dei Ciclopi (§ 131). Se questa supposizione fosse vera, sarebbe necessario congiungere l' *Huggins Inlet* coll' *Oudemans Inlet,* che sulla carta di Proctor appaiono distinte. Ma anche dopo esser arrivati, con questa identificazione violenta, alla bocca del fiume dei Ciclopi nell' Oceano, quale dei due tronchi di quest' ultimo canale dovremo prendere come continuazione dell' *Huggins Inlet?* Qui la discordanza è tale, che si è obbligati ad abbandonare qualunque discussione. Speriamo che le prossime opposizioni gioveranno a dar qualche maggior lume su tutte queste regioni ora così imperfettamente conosciute.

Sezione XXIII.

Libia: Gran Sirte e Nilo: fiume e Lago Tritone: fiumi Nepente e Thot: Lago Meride.

159. Alla Gran Sirte, che nella carta di Proctor è appellata *Mare di Kaiser,* si giunge dalla Piccola Sirte costeggiando l'elegante e regolarissima curva che formano le spiagge della Libia. Vi sbocca il Nilo, che viene in direzione nord-sud dall' emisfero boreale e di tutti i canali che solcano la superficie di Marte è il più notabile e conosciuto da maggior tempo. Intorno al 45° parallelo il Nilo si divide in due rami, uno dei quali è il già descritto Eunosto: l' altro si volge ad occidente per quasi mezza circonferenza del pianeta, limitando a settentrione le terre di Aeria, Arabia, Eden, Chryse, Ophir e Tharsis, e spingendo verso il sud una quantità di canali, di cui già si è data la descrizione, fino a congiungersi coll' Oceano. Questa parte del Nilo non si potè da me esaminare che assai tardi, nell' intervallo fra il 18 febbraio e il 7 marzo 1878, e la sua descrizione nella carta naturalmente non può riguardarsi che come una prima approssimazione. Durante quell' intervallo il Nilo apparve come una corda nera nella parte inferiore del disco, la quale ne separava un piccolo segmento luminoso. Tale corda era più lunga quando passavano al meridiano centrale le parti occidentali vicine all' Oceano, e più breve quando passavano le parti orientali vicine alla Gran Sirte: ciò che indica chiaramente, il corso del Nilo dopo la piegatura non seguire precisamente il parallelo, ma accostarsi alquanto all' Eritreo nelle parti più occidentali. Rimarchevolissimo poi è il fatto, che i tre grandi canali detti Nilo, Oceano ed Eunosto fra tutti e tre formano una fascia continua che gira tutt' intorno al pianeta, percorrendo la zona delle terre equatoriali.

160. La configurazione del Nilo qui sopra descritta è quasi intieramente conforme al disegno datone da Dawes il 20 novembre 1864: anche gli altri disegni di quell'anno, malgrado discordanze di minuti particolari, collimano abbastanza bene colla nostra descrizione, e prolungano il Nilo fin sotto il meridiano del Lago del Sole. Nella carta di Proctor pare che il Nilo sia in parte rappresentato dal canale di Nasmyth (*Nasmyth Inlet*) e in parte dal Mare di Ticone (*Tycho Sea*). Vi sono molte discordanze fra Dawes, Proctor e me, delle quali per ora è inutile tentare la conciliazione, che solo può derivare da nuove ed accurate ricerche fatte in aspetto favorevole del pianeta. L'opposizione del 1877 presentava queste regioni sotto una troppo forte obliquità. Una parte del Nilo fra il 10° e il 40° meridiano è stata già veduta da Maedler nel 1830, e forma nella sua carta la macchia segnata *v*. Veggonsi pure i disegni di Secchi del 1858, di Kaiser e di Franzenau del 1864, di Knobel del 1873 e il 15° disegno dell'*Aréographie* di Terby, fatto da Green il 25 maggio 1873. Quest'ultimo è notabile per ciò, che offre con tutta evidenza la congiunzione del Nilo colla parte settentrionale del Phison.

161. Il Lago Tritone è oggetto abbastanza facile: lo riconobbi già il 12 settembre, e ancora lo rividi il 24 dicembre, il diametro del disco essendo ridotto a 9″,2. Le migliori osservazioni di esso e della regione circostante furono fatte il 14 ottobre. Il Lago Tritone è oblungo dal sud al nord, le sue dimensioni ho stimato essere 6° e 3°: il suo colore è molto scuro, come pure quello dei suoi due emissarî australi, il fiume Tritone e il fiume Nepente. L'emissario boreale, che porta il nome di Thot, non fu veduto da me che in marzo; non posso darne alcuna esatta descrizione e solo mi par certo, che esso si allarghi molto nella foce, con cui si congiunge all'Eunosto. Il fiume Tritone è un canale molto facile a distinguere, da me veduto la prima volta il 12 settembre e l'ultima volta il 13 marzo. Esce dalla punta australe del Lago Tritone, e formando un grazioso arco, va ad attaccarsi alla Piccola Sirte, coll'asse della quale e del fiume Lete sta quasi ad angolo retto. Il fiume Nepente esce anch'esso dalla punta australe del Lago Tritone, e descritta quasi una parabola, con ampia foce di colore oscurissimo si getta nel Nilo formando con questo il promontorio d'Osiride; questo è una lunga penisola, il cui colore va diventando sempre più cupo verso la punta, e che si deve pertanto annoverare anch'esso fa le terre oscure (o sommerse) del pianeta. Al sommo della parabola è lateralmente connesso col Nepente il Lago Meride, che è press'a poco quadrato, con due angoli attigui al Nepente, gli altri due essendo arrotondati. Il suo diametro è forse di 4°, il colore oscurissimo. Il Lago Meride è una delle cose più difficili che siano da vedere in Marte: le osservazioni che lo riguardano sono del 13 e principalmente del 14 ottobre. Anche il Nepente è difficile a veder bene: ma congetturarlo si può facilmente dal contrasto di tinta che lungh'esso offre la terra di Libia colla regione molto più chiara d'Iside che sta nell'interno della parabola suddescritta, fra il Nilo e il Thot. Il 13 settembre trovo già scritto « Fra il Lago Tritone e la punta della Gran Sirte vi è una linea arcuata, non distinta come oggetto a sè, ma solo come confine della regione d'Iside, molto più chiara che la parte confinante di Libia ». Il 14 ottobre però il Nepente apparve come una bella linea oscura e visibilissima. Alla sua foce nel Nilo il Nepente si allarga molto, e forma una specie di lago oscurissimo, che è facile scambiare colla

punta della Gran Sirte. Il Nilo, venendo da settentrione, imbocca direttamente questa foce e il Nepente, che ne è il prolungamento naturale: il suo sbocco nella Gran Sirte si fa per un braccio laterale, ciò che produce quella specie di dissimetria che si osserva nella carta. La Terra d'Iside è di particolare splendore, all'incirca come già fu detto della Memnonia. Ma un pezzetto della regione d'Iside (segnato sulla carta con contorno a punti subito a ponente del Lago Tritone) il 14 settembre mi si mostrò splendente più che qualsiasi altra parte del pianeta, e non ho dubitato di paragonarlo colla neve polare. Questa macchia bianchissima rividi con molta distinzione il 14 ottobre, e mi parve formare un quadrato di circa 1″5 di lato (circa 8° di circolo massimo). Se questa era neve, pare si dovrebbe concludere l'esistenza di un gruppo di alte montagne sulle rive occidentali del Lago Tritone.

162. Alla regione compresa fra l'Eunosto e il fiume Tritone ho dato il nome di Amenti. La tinta di questa parte è più chiara che quella della Libia e di Esperia, alquanto meno però che la Memnonia e la Terra d'Iside. La Libia ed Esperia sono d'un colore giallognolo, il quale diventa nella Libia sempre più manifesto, a misura che si procede verso il promontorio d'Osiride.

163. Questo per la riva orientale della Gran Sirte. La riva occidentale forma una curva quasi perfettamente uguale e simmetrica all'orientale: ma laddove la prima termina in un golfo (la Piccola Sirte), questa termina in un promontorio (il Corno d'Ammone). Essa è elegantemente curva, brillante ed unita: non senza indizio però di minutissime indentazioni. Dentro terra non è stato possibile scoprir nulla fino al Phison. Qui è la regione che abbiam chiamato Aeria: e con questa è finita la perlustrazione del Grande Diaframma, incominciata nella sezione II.

164. Sebbene la Gran Sirte sia una delle prime cose che si son vedute in Marte dagli antichi osservatori, pure nella sua descrizione non si trova un completo accordo. Molte di queste discrepanze si potranno forse attribuire alla presenza di nuvole, ed anche alle ombre, che ramificate projetta fuori la parte inferiore di Ausonia, come più sotto diremo. Una parte deriva anche senza dubbio dalla molto diversa forma, che questo gran golfo prende nelle diverse obliquità. Siccome però in questa parte la carta di Proctor e la nostra si accordano benissimo, non aggiungeremo altro: tanto più che una discussione molto particolareggiata di questo punto si trova nell'*Areografia* del sig. Terby, e qualche altra aggiunta vi faremo noi, descrivendo la gran penisola Ausonia. Più interessante è la comparazione di quanto hanno veduto i diversi osservatori nell'interno della Libia e delle regioni vicine.

165. Il Lago Tritone è stato benissimo veduto già nel 1830 da Maedler, il quale l'ha segnato colla lettera *g* sulla sua carta. Nel 1873 Knobel lo ha figurato più volte nella posizione appunto da me assegnata. Vedi i suoi disegni del 23 aprile e del 23 maggio. Così Maedler, come Knobel, lo rappresentano isolato, senza alcuna comunicazione nè col Nilo, nè colla Gran Sirte. Ma all'occhio linceo di Kaiser nel 1862 non sfuggirono nè il Lago Tritone, nè il fiume Tritone, nè il fiume Nepente: e stanno delineati nel suo bizzarro disegno del 2 dicembre 1862, del quale egli non ha voluto tener conto nel comporre la sua carta. Per convincersi che realmente si tratta di ciò, basta osservare, che il Lago Tritone, insieme colla parte orientale del Nepente, e col fiume Tritone formano il profilo di un angolo curvilineo affatto simile

luello della Gran Sirte. L'interno di quest'angolo curvilineo è occupato da regioni più oscure che lo spazio esterno, come sopra si è detto. Kaiser dunque ha considerato questa configurazione come una specie di ombra o di duplicazione della Gran Sirte, e come tale l'ha interpretata nel suo del resto fedelissimo disegno. Egli stesso racconta, che avendo ripetuto questo disegno il giorno consecutivo, trovò esattamente la stessa cosa ([1]). Questo è un insigne esempio ad un tempo della somma acutezza e fedeltà di quell'osservatore, e del modo singolare, con cui egli talora ha interpretato le cose da lui vedute. Non vi ha il minimo dubbio, che dei due angoli ombreggiati occupanti il mezzo di quel disegno, quello che è a destra rappresenta col suo vertice il Lago Tritone, col suo lato sinistro il fiume Tritone, e col suo lato destro la parte del Nepente che sta fra il Lago Tritone e il Lago Meride.

166. Il fiume Nepente è stato pure assai bene delineato dal sig. Green il 28 maggio 1873 (n. 44 dei disegni dell'*Areografia* di Terby); ed anzi si può ravvisare, in un rigonfiamento che sta in alto, un indizio del Lago Meride. Per Green non esiste il Lago Tritone; ma un ramo orientale del Nepente scende giù lungo il meridiano fino a raggiungere un'ombra collocata trasversalmente. Quel ramo è certamente il nostro fiume Thot, e quell'ombra è senza dubbio la parte più occidentale dell'Eunosto.

167. Del resto, se la parte orientale del fiume Nepente è stata veduta da pochi osservatori, la parte occidentale, a cagione della larga ed oscura foce, per cui entra nel Nilo, è stata veduta da moltissimi: a dir vero però, le osservazioni non si accordano fra loro molto bene, e le mie differiscono da tutte le altre, eccettuate quelle or ora riferite di Kaiser e di Green. Proctor sulle indicazioni di Dawes allarga quella foce entro terra in modo da surrogare ad essa e al Lago Meride un altro lago assai più largo, ch'ei chiama addirittura *Mare di Main:* il promontorio compreso fra questo e la Gran Sirte forma la *Penisola di Hind,* corrispondente al nostro capo d'Osiride. E può darsi benissimo che il 20 e il 26 novembre 1864, quando Dawes disegnò le cose a quel modo, l'aspetto di quella regione fosse diverso che nel settembre e nell'ottobre 1877. Tuttavia è singolare, che del *Mare di Main* il 20 e 22 novembre 1864 (dunque contemporaneamente alle osservazioni di Dawes) nessuna traccia fu vista da Franzenau. Maedler nel 1830, Knobel nel 1873 osservano, rispetto al Mare di Main lo stesso alto silenzio. Quanto ci danno Secchi nel 1858 e Kaiser nel 1864, unicamente ha rapporto coll'ampia e visibilissima foce, in cui si allarga il Nepente prima di raggiungere il Nilo. I due dischi disegnati da Lockyer il 3 ottobre 1862 sono preziosi per le variazioni meteorologiche di cui danno l'istoria appunto in questa regione; Lockyer non ha visto nè il Nepente, nè il Lago Meride, nè il Lago Tritone. Le macchie segnate *g* sono buchi nelle nuvole, attraverso a cui si vede una parte della Gran Sirte. Altrimenti come si spiegherebbe la forma insolita ed angusta, che la Gran Sirte ha in quei disegni? Tutto sommato, mi sembra che l'esistenza del *Mare di Main* richieda ancora conferma, se non si voglia ridurlo al quasi invisibile Lago Meride, oppure con maggior probabilità alla larga e visibile foce del Nepente, quale io l'ho veduta e disegnata, e che Secchi nel 1858 ha veduto e disegnato

([1]) *Annalen der Sternwarte in Leiden,* vol. III, pag. 30.

nello stesso modo. È la seconda e più boreale projezione sinistra del suo « Scorpione ». Con egual fedeltà vi si trova rappresentato il nostro promontorio d'Osiride; la differenza delle direzioni, più che d'altro, è effetto della prospettiva diversa.

Sezione XXIV.

Ausonia, Mare Adriatico, Chersoneso, Euripo.

168. Quella immensa regione, che sotto nome di Ausonia si allunga sul pianeta per più che un quarto della sua circonferenza ha per figura e per disposizione, molta rassomiglianza coll'Ausonia terrestre: e da tale somiglianza è derivato il suo nome e quello dei due mari fra cui si estende. Il suo colore è meno brillante che quello dell'Eridania e dell'Ellade, anzi anche meno che quello della sponda Libica sul Mare Tirreno. È quasi uniforme fino alla piegatura della penisola, dove di contro alla Piccola Sirte s'avanza il Capo Circeo. Di là comincia ad essere sfumato leggerissimamente, poi più oscuro a partire dal meridiano 282°, sotto il quale Ausonia si biforca, inviando un ramo sottile o più breve, l'Enotria, incontro alle spiagge d'Aeria, e delimitando così il Mar Tirreno. L'altro ramo, assai più largo e più lungo, detto Japigia, si spinge lontano verso occidente nel Mare Eritreo, fin di contro all'estremità della Terra di Deucalione. Ma le tinte di questi due rami, oltrepassata la biforcazione, sono già tanto oscure, che finora gli areografi dedicarono al mare lo spazio da loro occupato. La verità è, che questi due rami d'Ausonia hanno i medesimi caratteri che le terre oscure (o se si vuole, sommerse) del Mare Eritreo, ed appartengono alla medesima classe. V'è qui dunque forse del mare, ma se vi è, esso ricuopre terre, che in nessun modo e sotto nessun titolo è lecito separare dal continente d'Ausonia.

169. Questa grande regione, se è facile a vedere per la sua ampiezza, appartiene alle cose più difficili a descrivere con esattezza, a cagione della gran varietà di tinte raccolte nei suoi confini. Nelle prime osservazioni da me fatte, la penisola mi pareva terminata con una breve sfumatura all'incirca sotto il 290° meridiano: così la trovo figurata nei miei disegni del 10 e dell'11 settembre. Però già sotto il 12 settembre (271°) sta scritto « Mi è sembrato per qualche momento, che l'Ausonia non si arrestasse nel punto prima segnato, ma a traverso del mare si prolungasse fino a congiungersi coll'Aeria per una mezza tinta sempre più cupa, che a contatto coll'Aeria poco differisce da quella del Mar Tirreno .... questo è certo, che sul prolungamento della costa Tirrena d'Ausonia verso Aeria sta il limite della tinta oscura del Mar Tirreno ». Ma queste osservazioni furono più tardi revocate in dubbio da altre, ed io rimasi affatto incerto sulla costituzione di questa parte del pianeta fino al 10 ottobre (301°) nel qual giorno scrissi, che « l'Ausonia pareva attaccarsi all'Aeria per un basso fondo, avvolgendosi però col suo lato australe intorno all'Ellade ». E poco dopo (314°): « Certamente l'Ausonia si allarga in forma di tromba a raggiunger l'Aeria ». Osservazioni, che furono confermate il 12 ottobre (280°): « Il piede d'Ausonia poggia sulla costa d'Aeria così manifestamente, come prima non mai ». Lo stesso giorno cominciai a sospettare

della biforcazione. Anche il 13 ottobre (298°) « la connessione dell'Ausonia coll'Aeria era della massima evidenza ».

170. Il vero stato delle cose non mi si palesò che il 14 ottobre in un intervallo d'aria veramente stupenda, che mi servì anche a più altre importanti osservazioni. Essendo al centro del disco il meridiano 281°, « finalmente si scioglie l'enigma finora offerto dall'Ausonia inferiore. Essa è divisa in due code o piedi, come nel disegno è indicato (vedi Tav. II, disegno XXV). I rami sono ambidue in mezza tinta. L'intervallo è $\frac{2}{3}$ di tinta, cioè mezza tinta oscura. Nella divisione dei rami vi è un punto nero, o per lo meno un gran rinforzo d'oscurità ». Questo è il nostro punto fondamentale 49. Aggiungerò che il punto nero in questione era vicinissimo alla riva del Mar Tirreno, così che rimase il dubbio, che il ramo dell'Enotria in quel luogo fosse diviso dalla terra principale. Ma per quanto aguzzassi l'occhio, non mi venne fatto nè di confermare, nè di confutare questo dubbio: e dopo il 14 ottobre non ebbi più occasione di riveder questo luogo con sufficiente larghezza di dimensioni. Il 9 novembre « l'attacco di Ausonia con Aeria è visibile, ma non i particolari ». Il 16 novembre « si vede la biforcazione d'Ausonia: tutto è come prima, niente vi è da correggere nei disegni. Immagine squisita, sebbene la piccolezza impedisca d'andare in cerca di novità ». Osservazioni del 21 dicembre, del 28 gennaio e del 5 marzo non fecero che confermare le cose qui esposte, nei limiti concessi dalla piccolezza del disco apparente.

171. Dai disegni fatti il 14 ottobre risulta, che il punto nero collocato nella biforcazione è ben limitato soltanto da tre parti, ma nella direzione d'Aeria se ne parte una specie di coda o striscia sfumata, la quale si prolunga verso occidente, formando, con intensità e precisione sempre decrescente, il lato settentrionale del ramo Japigio. E che nel triangoletto oscuro (*Sinus Deltoton* della carta), compreso fra i due rami d'Ausonia e la costa d'Aeria, l'oscurità è massima lungo la linea o coda sopradetta e va diminuendo a misura che si procede verso settentrione. La sua tinta si perde senza salto in quella più chiara di Enotria, la quale dal canto suo è più luminosa verso il Mar Tirreno, e al suo confine con esso offre un contrasto affatto tagliente colla tinta scura ed uguale di questo mare. L'Enotria forma qui un'elegante curva esattamente parallela al lido opposto di Libia. Il suo attacco con Aeria è molto distinguibile e forma il nostro 55° punto fondamentale. La sua tinta, benchè chiara in confronto del Tirreno, è molto oscura in confronto della brillante regione d'Aeria, specialmente vicino al punto 55°; ne segue che la riva di Aeria forma tanto con l'Enotria, come collo spazio triangolare accennato un contrasto assai vivo, e vi è una separazione di confini affatto decisa. A ciò si aggiunge anzi, che nell'immediato contatto con Aeria tutte quelle dipendenze d'Ausonia crescono d'oscurità e sono poco meno nere, che lo stesso Tirreno. Avviene qui ciò che notammo per l'istmo della penisola oscura di Pirra (§ 95).

172. La Japigia non è così ben terminata come l'Enotria. Poco dopo la separazione i suoi contorni diventan diffusi, e rimpetto al Corno d'Ammone non ve n'ha più traccia decisa. La sua punta offre lo stesso aspetto che la punta della Terra di Deucalione, che le sta di contro. Insensibilmente si perdono l'una e l'altra

formando lo stretto *Scilla e Cariddi*, dove il Mar Eritreo è di color quasi così cupo, come il Golfo Sabeo. Quel nastro scuro, che è formato dal Golfo Sabeo, è parso quindi ad alcuni osservatori piegarsi di contro al Corno d'Ammone, salire verso il sud formando il passo di Scilla e Cariddi, poi ripiegarsi intorno alla penisola di Deucalione. Tuttociò ha dato origine a quella forma serpeggiante ed uncinata, che presso Kaiser (ed anche in qualche disegno di Lockyer) è così distinta, e che alcuno ha denominato « la macchia serpentina ». Kaiser ha dato a questa macchia una forma curiosa e poco naturale: meglio l'indica Lockyer nel suo disco del 25 settembre 1862, 10^h 50^m. Devo tuttavia dire, che di questa macchia o di questo tratto di mare la parte orientale, cioè l'*uncino*, che circonda l'estremo della penisola di Deucalione, e la divide dalla terra Japigia non mi è mai sembrato tanto oscuro, da potersi considerare come faciente una sola cosa con quel veramente oscurissimo nastro, che forma il lato settentrionale del Golfo Sabeo. Il disegno XXV, Tavola II dà press'a poco le giuste proporzioni di tutte queste tinte, come si deve aspettare di vederle quando l'atmosfera di Marte non è turbata da vapori. Ma non nego, che se in qualche momento la penisola di Deucalione si coprisse di bianca nebbia, il contrasto col mare circostante potrebbe facilmente far nascere l'idea di quella forma serpentina che han veduto Kaiser e Lockyer e che trovo pure in un disegno fatto da Knott il 23 settembre 1862 (n. 26 dell'*Areografia* di Terby).

173. Ma per ritornare alla Japigia, devo aggiungere che il suo lato australe, curvandosi concentricamente all'Ellade, lascia sospettare un prolungamento d'Ausonia anche verso quella parte dell'Eritreo, che è fra l'Ellade e la Noachide. Ivi infatti, nel luogo che la carta chiama Ellesponto, dopo essermi invano dibattuto per molte sere onde accertare qualche cosa di definito in quelle località (la Noachide era tuttavia coperta di vapori, che occupavano anche in parte le contigue regioni) il 14 ottobre mi parve di scorgere a destra dell'Ellade un altro pezzo di terra oscura, che però soltanto vagamente potei constatare, e disegnare nel disco XXV (vedi Tav. II). Qualche momento mi è sembrato anche di tracciare una connessione fra questa terra oscura e la Japigia a traverso dell'Adriatico. Osservazioni ulteriori diranno se questa fu illusione. Certamente questo è uno dei luoghi del pianeta più difficili a decifrare per le transizioni impercettibili delle tinte e per la mancanza di definiti contorni, e la difficoltà era ancora accresciuta nell'autunno del 1877 dalla presenza di precipitazioni atmosferiche. Sulla carta ho messo quello che mi è sembrato più probabile. Ma intanto è mio obbligo di dire, che quanto sovr'essa sta compreso fra le longitudini 315° e 30° e fra le latitudini australi 30° e 55° (Ellesponto, Noachide, Argyre orientale) riposa sopra osservazioni incertissime e deve essere con diligenza riveduto nelle future opposizioni.

174. Per completare la descrizione d'Ausonia, resta a parlare della sua parte meridionale-orientale. Dal Capo Circeo, che segna una piegatura nell'asse della penisola, questa sale con larghezza quasi uniforme fino al 40° parallelo. Ad oriente chiude il fondo del Tirreno, e confina coll'Eridania per mezzo dello Xanto. Dalle bocche di questo il lido meridionale monta obliquamente verso il polo lungo il vasto golfo di Prometeo. In tutta quest'ampia zona di terra, che ho potuto osservare benissimo il 14 ottobre, non s'incontra nè canale, nè lago, nè altra interruzione.

175. Ad occidente l'Adriatico segue con curvatura e lunghezza e tinta uniforme l'andamento d'Ausonia. La sua tinta è più pallida che quella del Tirreno, e rassomiglia piuttosto a quella del Mare Cronio. Presso il fondo scava nella terra d'Ausonia un angolo, che ben si potrebbe chiamare un Golfo di Venezia. Ma verso il sud fra l'Ausonia e l'Ellade caccia un canale dapprima larghissimo e visibilissimo, il quale rapidamente poi si restringe e diventa sottilissimo e difficilissimo a vedere al di là del parallelo 52°. Fino al 10 ottobre io aveva sempre chiamato questa parte *Istmo dell' Ellade,* credendo riunite le due terre: ma in quel giorno (305°) cominciai a sospettare una divisione, e il 12 ottobre scoprii lo stretto chiamato Euripo, e finalmente il 14 ottobre (271°) potei con tutta certezza disegnare e l'Euripo e la lunga penisola affilata detta Chersoneso, specie di corno ricurvo, del quale la punta si va poco a poco colorando e perdendo nel fondo del Mare Australe. Altro esempio di terra oscura o sommersa. L'Euripo fu da me ancora distinto il 9 novembre, essendo il disco ridotto a 14″, 3 di diametro.

176. L'Ausonia nella sua parte più chiara, prima della divisione in due rami, è stata veduta da molti osservatori. Nella sua carta del 1830 Maedler la nota distintamente, e ne indica anche i confini lungo ciò che noi chiamiamo Xanto, Golfo di Prometeo ed Euripo. Egli sembra troncarla nei dintorni del Capo Circeo. Dawes la conduce anche meno innanzi di Maedler, e la termina in forma larga, tozza e rotondeggiante, come si vede nella *Terra di Cassini* di Proctor, il quale ha molto più breve di noi l'Adriatico, sotto il nome di *Mare di Zöllner.* Non vi è traccia nè dello Xanto, nè dell'Euripo. In quattro dei suoi dischi Lockyer allunga l'Ausonia al di là del Capo Circeo, e vi sarebbero indizî così dello Xanto, come dell'Euripo: ma in questi disegni la figura varia tanto, che dobbiamo supporre, Lockyer avesse qui davanti a sè non la vera Ausonia, ma una sua immagine meteorica. Tre di quei disegni son fatti nell' intervallo di un'ora e mezzo il giorno 3 ottobre 1862, e non si può certamente spiegarne le differenze con variazioni di prospettiva, senza parlare dei contorni mal definiti, che Ausonia conserva in tutte e tre. Lo stesso pare si debba dire dei disegni di Rosse, 22 luglio, 6 ottobre e 6 novembre 1862; e non meno di quelli di Lassell 29 settembre, 4 novembre e 5 novembre 1862.

177. La stessa causa, congiunta colla frequenza, con cui le nubi di Marte sembrano prediligere le terre oscure sparse nei suoi mari, rende difficilissimo il giudicare le osservazioni di coloro, i quali hanno veduto e figurato la connessione di Ausonia con Aeria. Kaiser ha certamente veduto Ausonia sgombra da nubi il 5 ottobre 1862: quel suo disegno (salvo il prolungamento dell'Adriatico fino al polo australe) coincide assai bene in molte cose colla nostra carta e con quella di Maedler. Ma questo disegno non conduce Ausonia molto al di là del Capo Circeo, sebbene una parte del ramo Japigio possa esservi indicata. Kaiser però ha perfettamente distinto il ramo d'Enotria il 22 novembre 1864; egli ne ha figurato l'attacco con Aeria, ed ha pure descritto l'ombra che riempie il Golfo Triangolare (*Sinus Deltoton*). Non si può immaginare coincidenza più parlante. Il Capo Circeo, una parte del tronco inferiore, e un'altra volta l'Enotria e la sua congiunzione con Aeria stanno nel disco del 28 dicembre 1864, di cui Kaiser si è servito per far questa porzione della sua carta. Altri disegni da lui fatti non presentano che informi masse di nuvole.

178. Anche Franzenau sembra indicare tutta l'Ausonia e l'Enotria nei due disegni del 20 novembre 1864; ma le variazioni che si trovano tra l'uno e l'altro indicano disordini meteorici. La larghezza da lui assegnata al Mar Tirreno pare fuori d'ogni proporzione. Secchi invece non ha l'Enotria: ma dal 13 al 16 giugno 1858 in quattro disegni ha perfettamente ritratto il ramo Japigio, il passo di Scilla e Cariddi, e l'estremo opposto della Terra di Deucalione. Vi è anche una parte del Mare Adriatico, e nei disegni del 14 e del 15 giugno è fortemente annunziato il Capo Circeo.

179. Che le ràmificazioni inferiori d'Ausonia siano frequente teatro di variazioni meteoriche è stato già colle sue proprie osservazioni constatato da Lockyer, e coll'aiuto di queste e d'altre dimostrato dal sig. Terby, il quale ha consacrato ad esse un capitolo importante della sua *Areografia* (pag. 51-56). Nello studio ulteriore di questo soggetto converrà saper ben distinguere le strisce chiare o chiaroscure descritte qui sopra, che sono appendici permanenti d'Ausonia, dalle strisce di carattere transitorio; queste ultime possono ben anche esser periodiche, e la facilità di osservarne il passaggio sul fondo oscuro della Gran Sirte, del Golfo Triangolare, e del Mare Eritreo potrà spandere molta luce sulla meteorologia del pianeta. Nelle mie proprie osservazioni del 1877-78 non mi è stato possibile scorgere indizî di strisce o di macchie non permanenti.

Sezione XXV.

Ellade, fiume Alfeo, Ellesponto.

180. Nella concavità che il corso curvo d'Ausonia e del Mare Adriatico forma verso occidente giace l'Ellade, una delle più curiose e stupende formazioni del pianeta. È un'isola rotonda, e lievissimamente allungata nel senso sud-est nord-ovest, di perimetro affatto regolare, il cui diametro non misura meno di 30° del circolo massimo di Marte (poco meno di mille miglia italiane). È circondata quasi per ogni parte dall'Adriatico, dall'Eritreo e dal Mare Australe: soltanto quel breve tratto, per cui (salva la presenza dell'Euripo) sembra aderire ad Ausonia, le toglie il carattere schiettamente insulare di Argyre e delle due gemelle isole di Thyle. Il suo colore è giallo ordinariamente, più brillante agli orli del disco, che quando si trova al meridiano centrale. Talvolta l'ho creduta altrettanto luminosa che Aeria, altre volte assai meno. In una occasione però l'ho osservata tanto bianca e tanto luminosa quanto la calotta polare. Ciò fu il 16 dicembre a 21^h 55^m siderali, e la relativa notizia è questa. « Ellade straordinariamente bianca: coperta di neve? o di nebbia? Macchia polare ben visibile. Sotto, Arabia ed Aeria gialle, molto men chiare dell'Ellade ». Il 21 dicembre era ricomparso il primitivo colore e nei giorni seguenti non accadde di constatare altro di nuovo. Anche il 4 marzo trovo scritto: « Ellade assai bianca, che par neve, molto più bianca di Aeria e di Arabia ».

181. Un esame diligente da me fatto dell'Ellade non mi permise per lungo tempo di scoprir nel suo interno altro che una luce pressochè uniforme, che qualche volta pareva un poco più intensa verso gli orli. Ma il 12 ottobre (285°) scoprii ch'essa è divisa nella direzione nord-sud da una sottilissima linea longitudinale che passa quasi esattamente pel suo centro: sulla carta questa è detta fiume Alfeo.

Durante l'osservazione stimai che detta linea facesse un angolo di circa 10° col circolo massimo condotto dal centro dell' Ellade alla calotta nevosa. Ma riducendo la direzione al meridiano di Marte, si trova che essa vi si sovrappone esattamente. Il suo corso non è geometricamente rettilineo, ma lievemente ondulato: però le ondulazioni son troppo piccole per produrre una deviazione notabile dalla direzione costante lungo il meridiano. Tutte queste osservazioni furono confermate il 13 e il 14 ottobre. Evidentemente questo è un canale simili a tanti altri che percorrono il pianeta nella direzione di un meridiano. Ma la sua posizione è veramente strana ed inaspettata. In qualche momento mi è sembrato di congetturare un altro canale ancor molto più sottile, che dal punto ove il primo traversa il centro dell' Ellade andrebbe all'Adriatico in direzione di est-nord-est: ma non son riuscito ad assicurarmi in modo soddisfacente della sua esistenza.

182. Quella parte del Mare Eritreo, che giace fra l'Ellade e la Noachide è stata da me denominata Ellesponto quando ancora credeva all' esistenza della Noachide come terra brillante simile all' Ellade. Se, come sembra, è terra oscura (o sommersa?) l'Ellesponto non ha più alcuna ragione di essere fra l' Ellade e la Noachide. Più vicina alla prima mi è sembrato di vedere il 14 ottobre un altro tratto di terra oscura; l'osservazione però è incertissima e non sono in grado neppure di dire, se fosse o no aderente alla sponda dell' Ellade. Vedi sulla sua possibile relazione con Ausonia il § 173.

183. L' Ellade si trova in contatto con quella regione del Mar Eritreo, dove sembra più frequente la produzione di nuvole. Per questa ragione di raro si trova disegnata in tutta la sua integrità ed ampiezza. Sembra inoltre, che per qualche causa non facile a determinare lo stato dell'atmosfera che la circonda abbia una tendenza a disporsi in zone ad essa concentriche. Talora appare al suo centro un nucleo luminoso, ma di essa assai minore, come presso Kaiser (22 novembre e 23 dicembre 1864), Lockyer (3 ottobre 1862), Schmidt (26 settembre 1862, disco n. 8 dell'*Areografia* di Terby), Schröter (20 novembre 1798, disco n. 7 dell'*Areografia* suddetta). Qualche volta intorno a tale nucleo più chiaro si sviluppa una zona concentrica, che tutto e quasi tutto lo circonda: così descrissi io l' Ellade nell' unico disegno di Marte da me fatto nel 1862, e così pure si trova presso Lockyer nell'ultimo suo disegno del 3 ottobre del medesimo anno e sopratutto presso Dawes, nel disco del 26 novembre 1864. Secchi nel 1858 non vide bene dell' Ellade altro che il lembo australe, a cagione della posizione poco favorevole del pianeta in quell'anno. Intiera invece la si trova presso Lassell (5 novembre 1862) e Knott (3 novembre 1862, n. 9 dell'*Areografia* di Terby). Schmidt la figurò pure ottimamente in Atene il 19 settembre 1862 come si vede dal disegno pubblicato da Klein nel primo volume della sua *Descrizione del Cielo* [1]. Forse l'orlo sfumato è qui da attribuire a nebbia diffusa tutt' intorno. Questo disegno lascia pure travedere il ramo Japigio d'Ausonia, e l'Ausonia stessa, o più probabilmente una sua immagine meteorica. Maedler nel 1830 non vide chiaramente dell'Ellade che la metà inferiore, ma tuttavia ne congetturò esattamente la forma come si vede dalla prima edizione della sua carta. Nella

[1] *Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung*. Braunschweig, 1869.

carta di Proctor la figura dell' Ellade (*Lockyer's Land*) sembra desunta dal disegno sopra accennato di Dawes, ed è quindi troppo piccola. Anche per la posizione sfavorevole che ebbe l'Ellade nel 1864 la parte australe di questa terra è segnata solamente per via di congettura ed attaccata ad un continente polare, che la carta di Proctor suppone esistere tutt' intorno al polo australe.

184. Dell'esistenza dell'Alfeo non ho potuto trovare conferma presso alcun osservatore. Solo fra tutti, Knott nel suo citato disco del 3 novembre 1862 mette attraverso all'Ellade due strie oscure parallele ad angolo di 45° circa col meridiano. Ma nè l'una, nè l'altra permette la più lontana comparazione col fiume Alfeo.

Sezione XXVI.

Mar Polare Australe.

185. Se noi facciamo astrazione dalle due isole di Thyle, la calotta polare di Marte limitata dal 60° parallelo di latitudine australe è intieramente coperta dal mare, il quale in alcune direzioni si estende anche un poco più lontano dal polo sud del pianeta. L'opposizione del 1877 fu estremamente favorevole per l'esame di questa parte: l'asse era inclinato, in ottobre, di soli 65° sulla linea visuale, così che tutta la massa delle nevi rimase sempre in vista, ed in certe configurazioni appariva notabilmente addentrata nel disco e circondata per ogni verso da spazî oscuri. Inoltre a partir dal principio di ottobre si può dire aver dominato in quei luoghi una serenità completa, in grazia della quale più d'una volta (specialmente il 2 ottobre, il 21 ottobre, il 17 novembre e l'11 dicembre) ho veduto salire il mare senza interruzione sino alla macchia delle nevi, rimanendo anche un poco più oscuro nelle vicinanze di queste, forse per effetto di contrasto. Se esiste in questo tratto qualche isola, certo dev'esser molto minore di Argyre e delle due gemelle isole di Thyle: altrimenti non avrebbe mancato di prodursi brillante agli orli del disco come quelle tre isole, ed anche l'Ellade han sempre fatto. Regioni più estese non potrei ammettere in tale tratto. che o sepolte sotto la neve polare (?) o sotto forma di terre oscure (bassi fondi?) simili alla Noachide. Forse una simile regione (o un mare poco profondo?) esiste fra Thyle I, Argyre e Thaumasia: perchè quella parte del Mare Australe al largo del Golfo Aonio, oltrepassata una certa distanza dalle coste, mi è sempre parsa di una tinta meno cupa che tutti gli altri mari di Marte da me veduti, senza eccezione. Può anche darsi che questo colore meno cupo sia connesso soltanto colla latitudine, come diremo più tardi. Ma per quanto abbia esaminato quel luogo, non ho mai potuto riconoscere traccia di contorni anche debolmente indicati, che possano riferirsi a terre di qualunque colore. Solamente ho visto l'ombra che circonda le coste circostanti farsi sempre più pallida a misura che si andava lontano dalle medesime. Nelle altre parti il Mar Australe mi parve sempre di un colore fra il rosso mattone e l'olivastro, poco dissimile da quello dell'Adriatico.

186. Queste mie osservazioni sono intieramente confermate da quelle quasi contemporanee del sig. John Brett [1], il quale con un riflettore di 9 pollici avendo

[1] *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, dec. 1877, vol. XXXVIII pag. 60.

particolarmente esaminato questo punto, così decide in proposito: « The south polar patch now in wiew is surrounded with a dark stain, and this darkness is on one side continuous with the so called sea, and of equal darkness with it. There is no break or barrier in the straits which join the polar dark patch to the equatoreal dark patch. Therefore, if there be snow, it is lying on the sea, or on a polar island ». L'aver veduto la neve polare circondata dal mare solamente da una parte dipende da questo, che il sig. Brett, avendo cessato le sue osservazioni coll'8 ottobre non giunse a vedere le isole di Thyle separate dalla calotta nevosa; separazione, la quale anche a me non divenne affatto manifesta che nei giorni 20 e 21 ottobre, quando riconobbi nettamente la spiaggia australe delle due isole di Thyle, e il tratto di mar polare ad esse sovrastante.

187. Nelle opposizioni precedenti sembra che questa parte del pianeta sia stata sempre più o meno velata da nuvole o da nebbie, come è da aspettarsi in tali latitudini. Maedler nel 1830 sembra non vedesse di scoperto che tre strisce divergenti dal polo, da lui designate colle lettere x, y, t. Esse corrispondono sufficientemente bene alle bocche del Golfo di Prometeo, dell'Ellesponto e del Bosforo gemmato nel Mar Polare. Libero era pure il Golfo Aonio, corrispondente alle bocche del Fasi e alle Colonne d'Ercole. Ma il resto nella carta di Maedler è bianco, cioè coperto di nubi. Eppure l'opposizione del 1830 ha avuto luogo in condizioni astronomiche e climatologiche (parlo del clima di Marte) quasi identiche a quelle dell'opposizione del 1877. Due altre opposizioni, quelle del 1845 e del 1847 sarebbero state molto favorevoli per ripetere tali osservazioni: i pochi disegni che si fecero in quegli anni pare siano rimasti inediti.

188. Nel 1862 si ebbe di nuovo una vista assai favorevole per le regioni polari di Marte, in circostanze simili a quelle del 1830 e del 1877. Intorno alla neve polare quasi tutti gli osservatori si accordano a mettere un anello oscuro: anello che Proctor portò sulla sua carta col nome di *Mare di Phillips*. La corona nebulosa che segue intorno a questo anello è presso Kaiser aperta in quattro luoghi corrispondenti al Golfo di Prometeo, all'Ellesponto, al Bosforo Gemmato, ed al Golfo Aonio: così almeno risulta dai disegni, coi quali non si accorda sempre la carta. Di tali aperture (che a capello coincidono colle strisce oscure di Maedler) solo la seconda e la terza sono visibili con precisione nei disegni di Lockyer (specialmente in quelli del 23 settembre 1862) e in quelli di Lassell (22, 24, 25, 27 settembre 1862). La seconda e la quarta sono ben indicate presso Phillips, specialmente la seconda, corrispondente all'Ellesponto. Questa è pure indicata da Knott nel già citato disco del 3 novembre 1862 e da Schmidt nel disegno del 19 settembre, pubblicato da Klein [1].

189. Per quanto concerne la corona annulare di terre, che sulla carta di Proctor circonda il *Mare di Phillips*, si può ben affermare ch'essa non esiste, almeno sotto questa forma di zona continua. Abbiam veduto bensì che esistono in qualche modo le regioni chiamate da Proctor, *Terra di Lockyer, di Cassini, di Burckhardt, di Kepler, di Kunowski:* ma niuna di esse giunge al 75° parallelo, come indicherebbe la sua carta. *L'Oceano de la Rue* (parte dell'Eritreo) non è chiuso verso il sud da altra terra che dall'*isola nevosa di Dawes* (Argyre), e dalla Noachide. Anche il *Mare di Lambert* (Ellesponto?) è sicuramente aperto verso il polo.

[1] Vedi qui sopra § 183.

Sezione XXVII.

Considerazioni generali
sui risultamenti ottenuti nello studio comparativo precedente.

190. La comparazione che nel corso di questo capitolo III si è fatta coi lavori di antecedenti Astronomi non solo ha servito a rischiarare molte volte la natura delle loro e delle mie osservazioni, ma ha procurato l'inestimabile vantaggio di una verificazione parziale preventiva di molti risultati non prima conosciuti. Molte configurazioni, che nella mia carta, superficialmente giudicando, apparirebbero nuove, risultarono invece già descritte da tempo più o meno lungo, con maggiore o minor evidenza: e molte particolarità dei disegni anteriori, delle quali era impossibile o difficile assegnare il vero significato, si trovarono in modo plausibile dichiarate dalle mie osservazioni. In questa mutua confermazione di risultati, più che nella scoperta di nuove particolarità, sta a mio avviso quel grado di utilità, che si può attribuire a questo nostro saggio areografico. Molte cose si conoscevano, ma non eravamo certi di conoscerle, ed ora invece lo siamo. Una ricapitolazione rapida dei punti, che si possa ritenere come sufficientemente accertati, potrà servire d'illustrazione a quanto ho detto.

191. Maedler dunque, benchè armato soltanto di un piccolo cannocchiale di Fraunhofer di 4½ piedi di foco, non solo ha riconosciuto e molto esattamente delineato i principali tratti della superficie dell'emisfero australe e delle regioni equatoriali: ma vi ha segnato oggetti, la cui osservazione indica e nell'istrumento una gran precisione e nell'occhio dell'osservatore un'acutezza non comune. Il Golfo Sabeo, l'istmo della Terra di Deucalione, il Golfo della Perle, il Golfo dell'Aurora, l'Agatodemone e il Lago del Sole, il Mare Cronio, la vera figura d'Esperia e l'ombra che ne occupa la parte più angusta: la Piccola Sirte, la giusta disposizione del Mar Tirreno, d'Ausonia, del Mare Adriatico e dell'Ellade: da ultimo il Lago Tritone, il Nilo a settentrione di Chryse, sono scoperte che gli appartengono. Egli ha esattissimamente tracciato una parte dell'Oceano e ha indicato sui suoi disegni più volte la separazione del Mare delle Sirene dal Mare Cimmerio, accennando così all'esistenza dell'Atlantide I.

192. Secchi nel 1858 ha potuto meno bene (a cagione dell'inclinazione dell'asse) esaminare la regione principalmente da me studiata: i suoi disegni sono più specialmente utili per lo studio della zona torrida e dell'emisfero boreale del pianeta. Nondimeno vi troviamo, oltre ai Golfi Sabeo, delle Perle e dell'Aurora, già veduti da Maedler, il corso del Gange: la parte inferiore d'Ausonia col Capo Circeo: il promontorio d'Osiride: la bocca del Nepente nel Nilo: il fiume dei Ciclopi e l'Eunosto. La penisola di Esperia gli parve troncata a causa della sua ombra. Secchi ha pure ben descritto il contorno settentrionale dell'Ellade.

193. Gli splendidi disegni di Lockyer (1862) sono specialmente istruttivi per le notizie che danno sulla meteorologia del pianeta, il quale in parecchi di essi è variamente offuscato da nuvole. Ciò malgrado dobbiamo ad essi la prima notizia o la conferma di molti punti della topografia di Marte. La vera figura della penisola di Deucalione: la penisola di Pirra: la bocca dell'Idaspe e il capo degli Aromi: Thaumasia nel suo completo contorno: il Golfo Aonio e le Colonne di Ercole: Atlantide I

e una prima idea di Atlantide II: il fiume Xanto, sono le principali novità che rendono preziosi i disegni di Lockyer.

194. Nessun osservatore però ha ricevuto dai nostri disegni e dato vicendevolmente ai medesimi tante confermazioni, quante se n'ebbero da Kaiser. Nei suoi dischi e nella sua carta troviamo (a dir vero talora sotto forma nebulosa ed indistinta): il fiume Phison, la biforcazione del Golfo Sabeo, gl'istmi delle Terre di Deucalione e di Pirra, la bocca dell'Idaspe, il Capo degli Aromi, i fiumi Gange e Chrysorrhoas. Thaumasia è da lui esattissimamente delineata in giacitura e dimensioni, tenuto conto delle riserve accennate al § 111: così pure l'Arasse e le Colonne d'Ercole. Il Mar delle Sirene presso di Kaiser ha la sua vera figura. Egli ha veduto e ben delineato l'Atlantide I, Thyle I, lo stretto d'Ulisse e lo Xanto. Il Lago Tritone, il fiume Tritone, il fiume Nepente furono pure da lui osservati. Le descrizioni di Kaiser, debitamente interpretate, convengono colle nostre quasi dappertutto.

195. Dalle osservazioni di Dawes riceviamo pure la confermazione molto desiderata di alcune cose, che altri non videro, o non videro così bene. La biforcazione del Golfo Sabeo è una scoperta di quest'astronomo, fatta già prima che Kaiser da parte sua l'indicasse nel 1862. Prima di ogni altro, anzi solo finora egli aveva dato notizia precisa dell'Isola d'Argyre. Il suo tracciato del fiume delle Sirene non lascia nulla a desiderare, e presso nessun altro trovo indizio del fiume dei Giganti. La presenza dell'Oceano sulle rive settentrionali di Tharsis e di Dedalea è pure manifestamente da lui confermata. Soltanto presso Dawes s'incontra l'estensione occidentale del Nilo fin dopo Chryse quale l'offre la nostra carta. Non è da tacere tuttavia, che Dawes discorda in molti punti essenziali da tutti gli altri osservatori. La spiegazione di queste divergenze è già riuscita in qualche parte, e speriamo che le osservazioni del 1879 getteranno sulle medesime qualche nuova luce.

196. Da ultimo, confermazioni parziali ed utili schiarimenti furono dati da altri osservatori, come Rosse, Lassell, Franzenau, Schmidt, Green, Knobel, Knott, Harkness ecc. Alcuni di essi videro il pianeta in una posizione dell'asse assai diversa da quella che ebbe luogo nel 1877, ed è da aspettare che i loro disegni riescano anche più utili nelle prossime opposizioni.

197. Avendo avuto occasione di studiare in tutti i più minuti particolari le carte areografiche fino ad oggi pubblicate, mi permetterò di aggiungere sovr'esse qualche parola. La carta che Maedler ha pubblicato nel 1830 manca delle parti boreali a partire dal 30° parallelo nord: rappresenta quindi press'a poco la stessa regione, che io ho esplorata. Per esattezza generale nella disposizione delle macchie più salienti questa carta lascia ben poco a desiderare. Ma anche riguardo ai minuti particolari abbiam veduto ch'essa dà assai più di quanto si sarebbe potuto aspettare dal piccolo strumento che Maedler impiegò nel 1830. Essa non è stata superata da alcuna delle carte che vennero dopo: e per essa Maedler merita il titolo di vero fondatore dell'Areografia nel senso scientifico e geometrico della parola. Le lacune più grandi del suo lavoro si trovano: 1° nella regione principale delle terre oscure (Terre di Deucalione, di Pirra, e di Noé); 2° al sud di Thaumasia, della quale egli non ha ben veduto il limite australe; 3° intorno al polo australe medesimo. Senza dubbio banchi di nuvole prevalsero in quelle parti durante il settembre e l'ottobre

del 1830. — Del lavoro suppletivo, con cui Maedler completò i suoi emisferi nella parte settentrionale del pianeta, e da cui nacque la carta pubblicata dei *Beiträge* non sta a me il discorrere, che non ho potuto esaminare quei luoghi *de visu*.

198. La carta che Kaiser pubblicò nel 1872 (¹) dietro le sue osservazioni del 1862 e del 1864 è, come quella di Maedler, un lavoro fatto con intento di precisione; quanto ad esattezza nelle posizioni dei punti principali essa è forse ancora un poco più esatta che quella di Maedler, e quanto a ricchezza di particolari la vince anche d'alquanto. Sventuratamente per adoperare questa carta bisogna intenderla: e non è cosa facile. Col suo occhio penetrante Kaiser, vincendo l'ostacolo delle brume bataviche, ha strappato a Marte ben molti segreti: ma l'interpretazione da lui data delle cose vedute è spesso veramente singolare. La tendenza a ricercare nelle figure osservate una regolarità geometrica è visibile in molti luoghi: la sua carta contiene delle ellissi, degli archi di circolo, e dei pezzi di linea retta, i quali le danno un aspetto bizzarro. Ma ciò che caratterizza specialmente il lavoro di Kaiser è la tendenza costante a sfumare i contorni anche più decisi, e a trasformare le linee più nette in strisce nebulose. Non oserei decidere se questa diffusione provenisse dal suo occhio, o dalla qualità del cannocchiale adoperato, o dall'atmosfera di Leyda. Avendo osservato con un istrumento più potente del suo e in circostanze atmosferiche qualche volta ottime, io devo dichiarare, che se si eccettuan le così dette terre oscure e forse alcuni canali, la maggior parte dei contorni da me segnati sulla carta sono nel pianeta altrettanto precisi e nettamente terminati, quanto lo comporta la forza di definizione del telescopio. Che questa fosse ben notevole è provato da ciò, che io son riuscito a vedere e disegnare, col nostro Merz di 8 pollici, in modo soddisfacente oggetti come i fiumi Alfeo, Lete e Simoe, il Lago Meride, il Fonte del Nettare, e il Fonte della Gioventù. Kaiser invece ha veduto, o almeno rappresentato in forma di strisce nebulose oggetti come l'Arasse, e il fiume Tritone e le rive del Mare delle Sirene: ed è veramente singolare udirlo lagnarsi (²), che i suoi litografi hanno dato alle macchie contorni ancora troppo taglienti, troppo più decisi di quello che richiedessero i suoi disegni originali! Da queste peculiarità delle rappresentazioni Kaiseriane è derivato il carattere nebuloso della sua carta, la quale ha poche forme che siano alquanto determinate, il resto pare un ammasso di cirri variamente contorti. Ma sotto questo bizzarro aspetto si celano osservazioni del più grande interesse, che nelle discussioni precedenti ho tentato di presentare secondo il loro giusto valore.

199. Resta a far menzione ancora della carta eseguita da Proctor sui disegni di Dawes. L'edizione di essa, che io ho avuto sott'occhio, è pubblicata in testa dell'opera dello stesso autore, che ha per titolo « *The Orbs around us* » London, 1872. Nella stessa opera, pag. 110-113 si ha qualche cenno del modo da lui tenuto nella costruzione. I disegni di Dawes a tale intento impiegati furono 27, fatti negli anni 1852-1864. Io ho potuto vedere di questi otto soli, pubblicati nel vol. XXVI delle *Notizie mensili della Società Astronomica di Londra.* Le studio che ne ho fatto mi ha dimostrato che in questi anche le macchie principali non sono sempre rappresentate in

(¹) *Annalen der Sternwarte in Leiden*, vol. III. Leyda, 1872.
(²) *Annalen der Sternwarte in Leiden*, vol. III, pag. 29.

accordo colla generalità degli altri osservatori, forse per qualche condizione speciale del pianeta nel 1864, o per qualche altra causa sconosciuta. Queste discordanze si trovano naturalmente anche trasportate nella carta di Proctor, dove inoltre se ne aggiungono altre provenienti dall'inesatta orientazione assunta per quei disegni, o da interpretazione non giusta dei medesimi. Così nella carta per esempio troviamo intieramente soppresso il Mare delle Sirene, che nella sua integrità e in forma sufficientemente prossima al vero si trova delineato da Dawes nel disco del 3 novembre 1864: ed è ignorata intieramente l'Atlantide I[a], che pure Dawes nello stesso disco ha indicato nella sua vera giacitura e posizione. Da questo errore nacque l'altro di assegnare alla *Terra di Burckhardt* (Esperia) e ai due mari contigui una disposizione che non hanno, spingendoli fin quasi al 60° parallelo australe. Il *Passo di Bessel* secondo lo stesso Dawes (disco del 3 novembre 1864) termina appena 20° più basso di ciò che la carta chiama *Mare di Dawes* e quindi in ogni caso non più basso del 10° parallelo nord: Proctor invece spinge la *Bessel's Inlet* fino al 35° parallelo boreale, dandole così una lunghezza di 85° o di 90° dal sud al nord, invece di 25° o 30° che al più dovrebbero essere. Tutte le latitudini australi da 30° in su sono stranamente esagerate: nelle regioni polari poi quasi tutto è fantastico. Per tutte queste ragioni la carta di Proctor non solo è di gran lunga inferiore a quelle di Maedler e di Kaiser, ma non rappresenta neppure esattamente le osservazioni dello stesso Dawes. Esso tuttavia ha avuto il non piccolo merito di spandere nel pubblico molte giuste notizie sulla costituzione fisica del pianeta Marte, e d'interessare molte persone ai problemi dell'Areografia.

200. Non devo chiudere questi cenni sulle carte areografiche senza parlare dell'*Aréographie* del signor Terby, non foss'altro che per render giustizia ad un'opera di cui tanto mi sono giovato ad ogni passo. Terby non ha composto alcuna carta nuova: egli ha raccolto tutte o quasi tutte le osservazioni areografiche fatte prima del 1874, classificandole secondo le regioni del pianeta: le ha comparate fra di loro, ed ha posto in evidenza ciò che da esse emerge di sicuro, ciò che è ancora dubbio, e le quistioni che restano ancora a risolversi. L'industria e la coscienza e l'acutezza da lui impiegate in questo lavoro sono troppo evidenti, e non hanno bisogno de'miei elogi. Forse col prendere a base la carta di Maedler, o quella di Kaiser, invece che quella di Proctor, il lavoro sarebbe stato più facile, e varie questioni si sarebbero sciolte da sè. Ma la maggior difficoltà vinta, non che detrarre, cresce pregio a questo lavoro, che per molto tempo sarà la fonte principale a cui gli areografi dovranno attingere per comparare le loro alle antiche osservazioni.

Capitolo IV.

Osservazioni, deduzioni, e congetture sopra la natura della superficie del pianeta e della sua atmosfera.

Sezione I.

Luogo della calotta polare australe osservato in diverse opposizioni.

201. *Osservazioni di Bessel nell' opposizione del* 1830. Per questa opposizione noi abbiamo nella sezione XXIII degli *Annali astronomici di Königsberga* (pag. 94 e 95) dodici osservazioni fatte da Bessel col celebre eliometro di Fraunhofer, che danno, oltre ai diametri polare ed equatoriale del pianeta, anche la posizione della macchia polare. Oudemans nel n. 838 delle *Astronomische Nachrichten* ha già pubblicato i risultati di queste osservazioni nell'intento di determinare la direzione dell'asse rotatorio del pianeta. Della macchia polare australe egli dà però soltanto la latitudine areografica. Non ho creduto inopportuno di rifare questo calcolo, onde avere il luogo completo. Il metodo da me seguito è questa volta sostanzialmente identico a quello praticato da Oudemans e da Kaiser nella risoluzione dello stesso problema. Se dal centro C del disco apparente di Marte (fig. 9) si conduce il raggio CNL passante per la macchia nevosa N, la projezione di questo raggio, durante un giro intiero di N sul suo parallelo HK farà sul disco una oscillazione di andata e di ritorno fra i limiti estremi CX CY, ed è manifesto, che la legge di quest' oscillazione nel caso presente sarà pochissimo diversa da quella dei moti vibratorî: cioè detta λ' la semi-amplitudine $XS = SY$, si potrà assumere che sia $LS = \lambda' \sin CPN$. Sia O il punto del globo di Marte che serve di origine alle longitudini contate come noi sogliamo fare, nel senso della saetta: l'angolo sferico OPC sarà la longitudine areografica del centro del disco (cioè ω) nell'istante dell'osservazione. La longitudine areografica della macchia nevosa sarà poi $OPN = \theta$. E però avremo $CPN = \omega - \theta$. Sia p l'angolo di posizione del diametro CPS contato al modo solito da R per Y verso S; e sia P l'angolo di posizione della macchia nevosa: sarà manifestamente $P = p + LS$, ossia

$$P = p + \lambda' \sin(\omega - \theta).$$

L'angolo P è dato dall'osservazione: quanto a p, esso è uguale al p_1 corrispondente calcolato coll'aiuto delle effemeridi e accresciuto d'una correzione dp che si deve determinare: l'equazione di condizione prenderà la forma

$$P - p_1 = dp + \lambda' \cos\theta . \sin\omega - \lambda' \sin\theta . \cos\omega$$

e le tre incognite del problema saranno dp, $\lambda' \cos\theta$, e $\lambda' \sin\theta$, a determinare le quali si avranno tante equazioni, quante sono le osservazioni disponibili fatte su P. Nella tavoletta che segue stanno gli elementi del calcolo. La prima colonna contiene la data delle osservazioni, la seconda il tempo siderale di Königsberga, la terza il tempo

medio corrispondente al meridiano di Berlino, corretto per la successiva propagazione della luce. Nella quarta colonna stanno le longitudini areografiche del centro del disco corrispondenti agli istanti delle osservazioni [1]. La quinta dà gli angoli di posizione della macchia nevosa osservati da Bessel. La sesta dà i valori di p_1 calcolati coi luoghi di Marte che stanno nel *Berliner Jahrbuch* di Encke pel 1830, ed usando la posizione dell'asse di Marte stabilita da Oudemans. Nella settima si ha il $P-p_1$ della nostra formula, e nell'ultima gli errori che restano dopo aver sostituito nelle equazioni i valori più probabili delle incognite.

Data 1830	Tempo sid. Königsb.	T. medio di Berlino corretto per l'aberrazione	Long. del centro del disco ω	P osservato	p_1	$P-p_1$	ε
agosto 30	23h.20m	ag. 30, 5097	130°,7	162°.16′	150°.13′	(+12°. 3′)	(+5°,47)
sett. 7	22. 55	sett. 7, 4705	45, 9	157. 21	151. 3	+ 6. 18	+3, 54
— 19	24. 0	— 19, 4825	303, 9	148. 20	152. 46	— 4. 26	+2, 79
— 21	23. 30	— 21, 4562	276, 9	147. 34	153. 4	— 5. 30	+1, 66
— 22	22. 49	— 22, 4252	257, 2	146. 16	153. 13	— 6. 57	—0, 82
ottob. 2	22. 35	ott. 2, 3880	155, 5	158. 53	154. 35	+ 4. 18	—0, 67
— 3	22. 50	— 3, 3957	149, 4	160. 26	154. 42	+ 5. 44	+0, 26
— 12	23. 56	— 12, 4167	77, 0	159. 14	155. 26	+ 3. 48	—1, 92
— 14	23. 21	— 14, 3867	48, 7	157. 41	155. 32	+ 2. 9	—0, 93
— 15	23. 5	— 15, 3730	35, 2	158. 51	155. 35	+ 3. 16	+1, 78
— 20	22. 19	— 20, 3273	334, 5	147. 40	155. 37	— 7. 57	—2, 49
— 21	23. 11	— 21, 3600	337, 5	147. 13	155. 37	— 8. 24	—3, 20

Uno sguardo dato ai $P-p_1$ mostra, che il primo di essi deve essere affetto da un errore considerevole: io l'ho escluso dal calcolo, il quale così è fondato sopra sole 11 equazioni. Risolvendole col metodo dei minimi quadrati e dando a tutte il peso 1, si ricava

$$dp = -0°,20 \pm 0°,54$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda' \sin\theta &= +2,64 \pm 0,79 \\ \lambda' \cos\theta &= +6,68 \pm 0,69 \end{aligned}\right\} \text{ e quindi } \left\{\begin{aligned} \lambda' &= 7°,18 \pm 0°,71 \\ \theta &= 21°,55 \pm 5°,70. \end{aligned}\right.$$

L'error probabile di un P osservato risulta $\pm 1°,66$; l'equazione trascurata lascia l'errore $+5°,47$, il quale veramente è alquanto fuori della comune probabilità.

202. Questi risultati si accordano benissimo con altre osservazioni. Il 7 settembre Bessel durante le misure ha veduto la macchia polare projettarsi tutta sul disco. Ed infatti al tempo segnato essendo $\omega = 45°,9$, la macchia nevosa aveva oltrepassato il meridiano centrale di soli 24°,35. Ancora un'altra volta Bessel vide la macchia tutta sul disco e fu il 15 ottobre: allora si aveva $\omega = 35°,2$, e la neve aveva oltrepassato il meridiano centrale di non più che 13°,65. Finalmente il dì 29 settembre 1830 a $23^h\ 20^m$ siderali di Königsberga la macchia fu invisibile a Bessel per la troppa obliquità della vista. Calcolando si trova, che in quel momento $\omega = 196°,8$: la macchia aveva oltrepassato il meridiano centrale di 175°,25, cioè non mancavano

[1] Per fissare l'epoca di queste longitudini mi son servito di sei passaggi del vertice d'Aryn al meridiano centrale osservati da Maedler nello stesso anno 1830 e riportati da Kaiser nel volume III delle *Osservazioni di Leyda*, pag. 66, colonna B. Le longitudini ω così calcolate furono verificate coll'aiuto dei disegni fatte dal medesimo Maedler nella stessa opposizione ed in ogni caso trovate concordanti.

ad essa che 4°,75 per giungere al meridiano *opposto* al meridiano centrale, e al punto della minima visibilità.

203. Anche i disegni fatti da Maedler nella medesima opposizione confermano quanto si è qui sopra dedotto dalle misure di Bessel. I disegni del 1830 pubblicati nel volume VIII delle *Astronomische Nachrichten* danno della calotta nevosa un' indicazione soltanto schematica: ma consultando l'edizione dei medesimi disegni data nei *Beiträge*, dove alla calotta polare sembra sia stata posta maggior diligenza, si troverà che due soli disegni hanno la macchia sotto figura di ellisse intiera, e suppongono quindi una obliquità minore che negli altri casi. Questi disegni corrispondono ad $\omega = 42°,1$ e ad $\omega = 25°,2$. Nella prima osservazione la macchia aveva passato il meridiano centrale di 20°,55, nella seconda di soli 3°,65. La confermazione è dunque quanto si può completa, per quanto riguarda la longitudine θ della macchia nevosa.

204. Rispetto alla distanza polare notiamo, che il valore di λ' qui sopra calcolato dà la grandezza dell'escursione XS (fig. 9), non già la distanza PN fra il polo di Marte e il centro della macchia polare. Si avrà quest'ultima distanza con sufficiente approssimazione, moltiplicando XS pel seno dell'arco CP, che misura l'inclinazione dell'asse di Marte rispetto alla linea visuale. Quest'arco CP il giorno 19 settembre 1830 (in cui ebbe luogo l'opposizione) importava 66°,6. Se ne conclude PN = 6°,59: e così le coordinate definitive della macchia polare australe per l'opposizione del 1830 risulteranno dalle osservazioni di Bessel come segue:

$$\theta = 21°,55 \pm 5°,70 \qquad \lambda = 6°,59 \pm 0°,66.$$

205. *Osservazioni di Kaiser nell' opposizione del* 1862. Una serie di 12 osservazioni fatte da Kaiser nel 1862 coll'intento di determinare la posizione dell'asse di Marte e il luogo areografico della neve australe è stata da Kaiser medesimo calcolata e pubblicata nel vol. III degli *Annali dell' Osservatorio di Leyda* p. 83,84. Secondo questo Astronomo la distanza polare della macchia nevosa nel 1862 sarebbe stata 4°,26: la longitudine della medesima, ridotta al nostro modo di contare, 166°,53. Ma nel suo calcolo è incorso un errore di segno, in conseguenza del quale la longitudine è stata mutata di 180° [1]. I veri risultati delle osservazioni di Kaiser sono

$$\lambda = 4°,26 \qquad \theta = 346°,53.$$

Che la cosa sia veramente così come ho detto, e che la macchia nevosa nel 1862

[1] È quanto risulta dal diretto esame del calcolo di Kaiser. Dopo di aver ridotto tutte le posizioni da lui misurate al 31,00 ottobre t. m. di Leyda, Kaiser le rappresenta colla formula

$$P = 150°,01 - 4°,26 \sin(d - 77°,73)$$

ove d è quello ch' egli chiama *Erdwinkel* della macchia da lui designata con d (Lago del Sole), ed è insomma l'angolo percorso da questa macchia rispetto al meridiano centrale a partire dal suo ultimo passaggio per questo meridiano (Vedine la dichiarazione a pag. 36 dello stesso vol. III degli *Annali di Leyda*). Tra questo d e il nostro ω vi è la relazione $d = \omega - 88°,8$. Surrogandone il valore nella formula precedente, essa diventa

$$P = 150°,01 - 4°,26 \sin(\omega - 166°,53)$$

formula che dà il minimo valore di P per $\omega = 256°,53$. Ora una semplice riflessione sulle condizioni del problema dimostra, che quando P è minimo, la neve si trova alla sua massima digressione orientale, e che le mancano 90° per arrivare al meridiano centrale. La neve dunque giungeva a questo meridiano, quando $\omega = 256°,53 + 90° = 346°,53$: e tale era dunque la sua longitudine areografica nel 1862, stando alle osservazioni di Kaiser.

fosse realmente dalla parte del vertice d'Aryn e del Mare Eritreo, non dalla parte opposta, si vede dai disegni dello stesso Kaiser, dei quali tre hanno la macchia tutta sul disco, cioè quelli del 24 ottobre, del 23 novembre, e del 14 dicembre 1862, fatti quando ω era uguale a 88°,4, 55°,8, e — 89°,9 rispettivamente: dei quali valori il medio è 24°,8, più prossimo a 346°,53 (ovvero a — 13°,17), che a 166°,53. Del resto gli errori delle osservazioni di Kaiser fra $\omega = 340°$ e $\omega = 90°$ sono molto forti, e l'esattezza probabile del suo risultato non sembra molto grande.

206. *Osservazioni di Lockyer nell' opposizione del* 1862. Nella sua Memoria sulla opposizione del 1862 (¹) Lockyer ha potuto constatare dalla discussione dei suoi disegni, che la macchia nevosa polare aveva una eccentricità notabile rispetto al polo, deviando da questo in una direzione poco diversa dal meridiano di longitudine 20°. Lockyer conta le longitudini nel modo da noi usato. Quanto alla distanza della neve dal polo, egli l'ha stimata di pochi gradi, senza indicare precisamente quanti fossero.

207. *Osservazioni di Linsser nell' opposizione del* 1862. Il mio amico di cara memoria Carlo Linsser eseguì a Pulkova nel 1862 27 disegni di Marte coll'aiuto di un cannocchiale di 5 piedi di foco (che credo fosse di Fraunhofer), e da essi ricavò alcune deduzioni circa la rotazione di Marte e la natura delle sue macchie. Di questo lavoro nessun ricordo è stato pubblicato, fuorchè un breve articoletto nel giornale settimanale di Heis (²). Ivi Linsser dice che durante il 1862 la macchia polare si trovò nella latitudine areografica australe di 70°, e nel meridiano, che sta 30° ad occidente del primo meridiano di Maedler (o del vertice d'Aryn). Per quanto concerne la longitudine mi sembra chiaro che l'espressione ad *occidente* deve intendersi rispetto ad un osservatore collocato in Marte e non rispetto all' osservatore terrestre. Infatti in due o tre altri luoghi di quell'articolo Linsser intende sempre l'oriente e l'occidente nel modo che appare stando sulla superficie del pianeta. Secondo le sue osservazioni nel 1862 si aveva dunque $\theta = 30°$. Riguardo alla latitudine di 70°, io non vi posso scorgere altro, che con *lapsus calami*. Una distanza polare di 20° si sarebbe manifestata nella macchia con diversità di aspetto ben più grandi di quelle che furono vedute da tutti gli osservatori e dal medesimo Linsser.

208. *Osservazioni di Hall nell' opposizione del* 1877. Recentissimamente nel n. 2174 delle *Astronomische Nachrichten* il professore Asaph Hall, da 34 osservazioni di posizione della macchia polare fatte col gigantesco equatoriale di Washington, ha dedotto le coordinate della medesima. Egli assegna, per l'epoca 1877 settembre 17,00 t. m. di Greenwich, la posizione della macchia (numerata rispetto al polo australe nel piano parallelo all'equatore?) in 311°,40. Questo risultato sembra indicare, che la macchia polare in quel momento dovesse aver oltrepassato il meridiano centrale di 48°,60. Ora nel medesimo momento la longitudine areografica del centro del disco era, secondo l'effemeride di Marth, di 69°,26: cioè di tanto il vertice d'Aryn aveva oltrepassato il meridiano centrale. Ne segue, secondo il nostro modo di contare, la longitudine $\theta = 69°,26 - 48°,60 = 20°,66$. L'error probabile di questo dato è $\pm$ 3°,6 secondo Hall. La distanza polare della macchia nevosa era, secondo il medesimo

(¹) *Mem. of the R. Astr. Society*, vol. XXXII, p. 187.
(²) *Wochenschrift für Astronomie* 1864, p. 117-120.

osservatore, $\lambda = 5°,11 \pm 0°,3$. Questi risultamenti a dir vero non s'accordano coi nostri, contemporaneamente ottenuti, entro i limiti degli errori probabili, ma tuttavia la differenza, considerata la difficoltà delle osservazioni, e il diverso modo tenuto nel determinare gli angoli di posizione [1], si può riguardare come molto piccola. La distanza fra le due posizioni del centro della macchia nevata da lui e da me assegnate non è che di 1°,31 del circolo massimo del pianeta, ossia di 42 miglia italiane. Anche quando Marte è nella massima vicinanza, tale intervallo non arriva a sottendere 0″,3 nell' occhio dell' osservatore.

209. *Comparazione di tutti i risultati precedenti e conclusione.* Il quadro che segue dà il modo di paragonare fra loro tutti i risultamenti fin qui citati e discussi.

1830	Bessel	$\theta = 21°,55$	$\lambda = 6°,59$
1862	Kaiser	— 13, 47	4, 26
	Lockyer	20	—
	Linsser	30	—
1877	Hall	20, 66	5, 11
	Schiaparelli	29, 47	6, 15

Prendendo i valori medî di θ e di λ per ciascuna opposizione si ottiene

1830	$\theta = 21°,55$	$\lambda = 6°,59$
1862	15, 51	4, 26
1877	25, 06	5, 63

e sembra derivarne con grande probabilità la conclusione già presentita da Linsser nel suo lavoro sopra citato: *Nei diversi solstizî meridionali di Marte la macchia polare australe, quando è ridotta alle minime dimensioni, occupa sempre press' a poco sul pianeta il medesimo luogo.* Questo luogo dista dal polo cinque o sei gradi nella direzione del mezzo del Mare Eritreo. E consultando la carta dell' emisfero australe in projezione polare che è annessa a questo scritto, si noterà che la deviazione dal polo avvicina la macchia al centro del grande bacino del Mare Australe, scostandola dalle isole di Thyle, a cui, se tal deviazione non fosse, la neve quasi verrebbe ad addossarsi. Tale fatto probabilmente non è accidentale, e sembra accennare ad un' influenza sfavorevole, che la prossimità delle terre eserciterebbe sulla formazione e sull' estensione della macchia polare.

Sezione II.

Variazioni di grandezza della macchia polare australe.

210. Le osservazioni esatte sulla grandezza della macchia polare australe da me eseguite si estendono dal 23 agosto al 4 novembre 1877. Durante tutto questo intervallo nessun punto della macchia giunse mai a toccare il circolo terminatore o l'orlo del disco, e la macchia si è sempre tutta intiera projettata su quello. Con un telescopio perfetto e in buone condizioni d'aria si avrebbe dunque dovuto sempre vedere un filetto colorato fra la macchia bianca e il limite vicino del lembo. Questo

[1] Vedi il citato luogo delle *Astronomische Nachrichten.*

per noi generalmente non avvenne fino a tutto il 26 settembre; quel filetto (la cui grossezza non superava generalmente una piccola frazione di secondo) essendo obliterato sia dalla confusione delle immagini (che in quel tempo di raro furono ottime) sia dalla diffusione inevitabile nel contorno brillante della neve, e forse anche da qualche traccia di dispersione prodotta dal rifrangersi dei raggi luminosi nell'atmosfera. Che che ne sia, negli ultimi giorni di settembre e durante tutto l'ottobre, la neve essendo diminuita di larghezza, e lo stato delle immagini essendo diventato assai migliore, quel filetto colorato diventò più cospicuo, e si vide sempre la neve distaccata dall'orlo, e tutta projettata nell'interno del disco. Distaccata poi che fosse o no, dal calcolo e dalle misure risulta che essa fu sempre tutta visibile e quindi le stime della sua grandezza non soffrono per questo lato veruna eccezione.

211. La tavoletta seguente mostra con qual grado di progressione andò mutando l'ampiezza della neve australe durante il citato intervallo. La prima colonna indica la data, la seconda i giorni trascorsi a partire dal solstizio australe di Marte (che avvenne il 18 settembre), la terza il diametro della neve in gradi del circolo massimo di Marte per tutto il tempo in cui questa apparve approssimativamente circolare (ellittica nella prospettiva): a partire dal 26 settembre la figura avendo mostrato deviazioni sensibili dalla rotondità fu sostituito al diametro della neve il diametro del circolo di area equivalente. Questi numeri furono desunti da misure prese sui disegni eseguiti e naturalmente non possono essere di molta precisione; inoltre la possibilità di errori sistematici di stima non rimane esclusa. Tuttavia il decremento è avvenuto in proporzioni così enormi, da non lasciar alcun dubbio sulle verità del fatto.

Variazioni della neve australe di Marte nel 1877.

Data 1877		Dal solstizio australe giorni	Diametro della neve australe	Data 1877		Dal solstizio australe giorni	Diametro della neve australe
agosto	23	— 26	28°,6	settembre	20	+ 2	18°,5
»	28	— 21	23, 9	»	22	+ 4	14, 7
settembre	3	— 15	26, 0	»	24	+ 6	13, 8
»	10	— 8	23, 9	»	25	+ 7	11, 5
»	10	— 8	18, 5	»	26	+ 8	11, 5
»	11	— 7	20, 2	»	30	+ 12	12, 5
»	12	— 6	17, 4	ottobre	1	+ 13	13, 7
»	13	— 5	16, 9	»	2	+ 14	11, 8
»	14	— 4	17, 4	»	4	+ 16	12, 7
»	15	— 3	14, 1	»	10	+ 22	10, 4
»	15	— 3	16, 1	»	12	+ 24	9, 5
»	16	— 2	16, 1	»	13	+ 25	9, 3
»	18	± 0	19, 1	»	14	+ 26	7, 6
				»	27	+ 39	7, 0
				novembre	4	+ 47	7, 0

212. Allo scorcio di ottobre e al principio di novembre la macchia polare era ridotta a tal grado di esilità, che io mi aspettava di vederla sparire da un giorno all'altro. Ma non fu così. Per tutto il novembre e per tutto il dicembre e una parte del gennaio essa continuò ad esser visibile con maggiore o minor evidenza in tutte le configurazioni del pianeta: anzi verso il mezzo di dicembre mi parve un po' cresciuta e stimai che il suo diametro arrivasse alla metà di quello dell'Ellade, cioè a 15 gradi. Il 30 dicembre e il 2 gennaio mi parve di nuovo che la sua ampiezza

fosse almeno di 15° o 20°. Più tardi l'esistenza della neve divenne sempre più difficile a constatare sia per la cresciuta obliquità della vista, sia per l'invasione progrediente dell'ombra, e da ultimo per le nebbie che in quelle parti cominciarono a manifestarsi rendendo luminosa tutta la regione polare e confondendo nel loro bagliore indistinto i limiti della calotta nevosa. Dall'insieme delle osservazioni però sembra risultare con molta probabilità che la superficie della macchia bianca, dopo raggiunto un *minimum* di ampiezza alla fine di novembre o al principio di dicembre, abbia ricominciato a crescer lentamente. Parrebbe dunque che abbia luogo sulla calotta nevosa di Marte lo stesso fenomeno che si osserva per le corrispondenti calotte terrestri. È noto che sulla Terra la stagione più propizia per le navigazioni polari ritarda notabilmente rispetto al solstizio estivo. Per Marte il solstizio estivo dell'emisfero australe ebbe luogo il 18 di settembre e l'equinozio consecutivo il 22 di febbraio. Il ritardo sarebbe dunque di $2\frac{1}{2}$ mesi circa. Sulla Terra esso è alquanto più breve, come si conviene alla minor lunghezza delle stagioni.

213. *Osservazioni di Lockyer e di Lassell nel* 1862. Nel 1862 il progressivo decremento della macchia nevosa australe non fu meno manifesto che nel 1877. Il 22 luglio, cioè quaranta giorni prima del solstizio australe di Marte (che nel 1862 accadde il 1° di settembre) Lord Rosse fece un disegno del pianeta, dove l'ampiezza della calotta nevosa australe non è meno di 36°. La legge del suo consecutivo decremento è dato dalle due tabelle seguenti, che ne offrono i diametri tratti dai disegni di Lockyer e di Lassell.

a) *Serie di Lockyer*:

Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe	Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe
settembre 17 *a*	+ 17	18°,0	ottobre 3 *a*	+ 33	9°,5
» 17 *b*	+ 17	13, 8	» 3 *b*	+ 33	8, 8
» 23 *a*	+ 23	10, 0	» 3 *c*	+ 33	10, 0
» 23 *b*	+ 23	12, 9	» 9	+ 39	11, 0
» 23 *c*	+ 23	12, 9	» 11	+ 41	8, 4
» 23 *d*	+ 23	11, 3	» 15 *a*	+ 45	7, 3
» 25 *a*	+ 25	10, 0	» 15 *b*	+ 45	6, 8
» 25 *b*	+ 25	9, 3	» 18	+ 48	7, 5

b) *Serie di Lassell*:

Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe	Data, 1862	Giorni dal solstizio australe	Diametro della neve australe
settembre 13	+ 13	20°,0	ottobre 21	+ 51	8°,6
» 20	+ 20	14, 5	» 23	+ 53	7, 6
» 22	+ 22	13, 0	» 25	+ 55	8, 0
» 24	+ 24	9, 0	» 27	+ 57	8, 2
» 25	+ 25	11, 1	novembre 4	+ 65	8, 0
» 27	+ 27	9, 3	» 5	+ 66	9, 3
» 29	+ 29	10, 4	» 15	+ 76	7, 1
ottobre 11	+ 41	7, 6	» 17	+ 78	5, 5
» 13	+ 43	10, 6	» 18	+ 79	8, 2
» 15	+ 45	9, 4	» 22	+ 83	9, 1
» 17	+ 47	9, 1	dicembre 8	+ 99	7, 5
» 18	+ 48	9, 3	» 11	+102	9, 5

Queste due serie si accordano tanto bene fra di loro, quanto si può aspettare in simil materia e indicano una diminuzione analoga a quella ch' ebbe luogo nel 1877. La

serie di Lassell poi procede abbastanza innanzi per indicare un *minimum* nelle dimensioni della macchia polare intorno alla metà di novembre, circa 2 $\frac{1}{2}$ mesi dopo il solstizio, ciò che si accorda benissimo con quanto fu da me osservato nel 1877 (v. qui sopra).

214. *Osservazioni di Maedler nel* 1830. In quell'anno il solstizio australe di Marte ebbe luogo il giorno 11 settembre. Secondo Maedler le dimensioni della macchia polare avrebbero diminuito fino al 5 di ottobre, e da quel tempo sarebbero cresciute di nuovo, così chè il minimo avrebbe avuto luogo soli 24 giorni dopo il solstizio. Riporto qui i risultamenti consegnati da Maedler nei *Beiträge*, pag. 114:

Data, 1830		Giorni dal solstizio australe	Diametro della calotta australe	
			in diametri di Marte	in gradi
agosto	31	— 11	1 : 9	12°,7
settembre	10	— 1	1 : 10	11. 5
»	15	+ 4	1 : 16	7, 3
ottobre	2	+ 21	1 : 18	6, 4
»	5	+ 24	1 : 20	5, 7
»	20	+ 39	1 : 15	7, 6

Se si dovesse stare a queste indicazioni dovremmo dire, che nel 1830 la neve polare si ridusse a minori dimensioni che nel 1862 e nel 1877. Questo può essere; sebbene della piccolezza dell'istrumento adoperato da Maedler debba pure tenersi conto. Ma l'esser stata la macchia meno visibile il 5 ottobre che nei giorni immediatamente anteriori e posteriori non è certamente provenuto da che essa abbia raggiunto in quel tempo un *minimum* d'ampiezza reale: sì bene derivò dall'eccentricità della macchia rispetto al polo, la quale era allora ignorata da Maedler. Infatti nei giorni 10 settembre e 19 ottobre i disegni di Maedler (che sono il 1° e il 22° nella edizione del 1830, *Astronomische Nachrichten* vol. VIII) furono fatti nelle configurazioni indicate da $\omega = 354°$ e $\omega = 350°$ rispettivamente, non mancando alla macchia polare che pochi gradi prima che passasse al meridiano centrale. Invece tutte le osservazioni degli ultimi giorni di settembre e dei primi di ottobre furono fatte quando la macchia polare era lontana dal meridiano centrale quasi una mezza circonferenza e si presentava in projezione più obliqua e con più forte scorcio. Nel disegno del 5 ottobre essa aveva oltrepassato di 135° questo meridiano e quindi dovea esser poco visibile, a cagione della forte obliquità della visuale. Nè vale insistere, che il *minimum* di appariscenza della macchia, se fosse stato effetto di sola variazione di prospettiva, avrebbe dovuto aver luogo alcuni giorni prima del 5 ottobre: perchè probabilmente esso fu ritardato di alcuni giorni dal fatto, che durante tutto il tempo delle osservazioni la macchia realmente si trovò in progressiva diminuzione. Non crediamo dunque che sia fondato, quanto Maedler dice su questo proposito nel suo primo lavoro (*Astr. Nachr.* n. 191 p. 450) e ripete a pag. 114 dei *Beiträge,* che il *minimum* della macchia australe nell'opposizione del 1830 abbia seguìto di meno che un mese l'epoca del solstizio australe. Qualunque cosa del resto si voglia credere a questo riguardo, è manifesto, che lo studio delle variazioni di ampiezza delle calotte polari di Marte sembra degno di occupare gli osservatori più che finora non sia avvenuto.

Sezione III.

Sopra la figura della macchia polare australe.

215. Indicazioni precise sopra una deviazione della macchia nevosa dalla forma circolare si trovano raramente presso gli osservatori. Perchè tal deviazione si renda manifesta, è necessario anzitutto che la macchia si distacchi dal lembo, e si projetti tutta sul disco. Diversamente l'effetto sarà poco sensibile, e si ridurrà a produrre variazioni periodiche nella larghezza trasversale apparente della macchia, di cui forse qualche indizio si può riconoscere nelle citate serie dei diametri di Lockyer e di Lassell.

216. Le osservazioni del 1862 non offrono che pochi segni di una tal deviazione. Nei dischi di Lockyer non ne trovo traccia sensibile: neppure in quelli che danno la macchia tutta sul disco. Ciò sembrerebbe indicare, che la neve si conservò press'a poco rotonda nell'intervallo dal 17 settembre al 18 ottobre che abbracciano quei disegni. Secchi però, nei dischi del 18 ottobre e del 25 novembre 1862 lascia indovinare un allungamento della macchia nella direzione del Golfo Sabeo e nella direzione opposta. Lassell, il quale pare che alla figura della macchia nevosa abbia posto molta attenzione, conferma l'indicazione di Secchi. Veggansi le sue figure del 24 e del 25 settembre, specialmente quest' ultima, dove la macchia spinge verso il Golfo Sabeo una punta molto visibile, sebbene molto accorciata dalla prospettiva.

217. Nell'opposizione del 1877 a partire dal 24 settembre la macchia si trovò, con poche eccezioni, sempre tutta projettata sul disco. Aiutato dalla buona atmosfera e dalla forza di definizione del telescopio, avrei potuto fare una storia completa ed abbastanza accurata delle sue variazioni di forma. Ma assorbito dallo studio delle macchie stabili del pianeta, non ho atteso a questa parte con tutta la diligenza desiderabile. Tuttavia non credo inutile di esporre quel poco di sicuro, che su quest' argomento ho potuto trovare nel mio giornale d'osservazione. Tutta la storia delle trasformazioni della macchia nevosa dal 24 settembre al 4 novembre 1877 può dividersi in quattro periodi.

218. *I° periodo*: 24-26 *settembre*. Il 24 settembre mi accorsi per la prima volta, che la neve non era rotonda. La disegnai tre volte nelle configurazioni indicate da $\omega = 112°$, $117°$, $132°$. La figura era di una ovale più appuntata da una parte che dall'altra. Mi parve, che l'apside più acuto di questa ovale si rivolgesse verso il centro del disco sotto $\omega = 132°$. — Il 25 settembre ripetizione quasi esatta dei medesimi fenomeni. Osservai la neve sotto $\omega = 95°$, $120°$, $163°$. Nella seconda osservazione la neve sembrava presentare il suo apside appuntato ancora un poco verso destra [1]: nella terza era passato di molto a sinistra. Quindi la coincidenza della sua direzione con quella del meridiano centrale ebbe luogo in una configurazione poco diversa da quella del giorno precedente. — Il 26 settembre per $\omega = 85°$ l'apside acuto era ancora molto lontano dal meridiano centrale verso destra. Tutte le osservazioni di questo periodo si rappresentano molto bene, ammettendo che la calotta

[1] La destra e la sinistra qui si riferiscono all'immagine rovesciata nel cannocchiale astronomico.

nevosa fosse alquanto prominente in quella parte del suo perimetro, che guardava nella direzione del 132° meridiano.

219. *II° periodo*: 30 *settembre* - 2 *ottobre*. Il 30 settembre, essendo $\omega = 68°$ e la neve isolata dall'orlo sul disco, il grand'asse dell'ovale si trovò press'a poco parallelo al lembo, e la macchia appariva estremamente oblunga. Ciò darebbe 158° per la direzione di uno degli apsidi. Non si poteva discernere quale dei due fosse il più acuto. Dal disegno fatto il 1° ottobre in aria cattiva nulla si è potuto ricavare di preciso. Il 2 ottobre potei di nuovo constatare la figura allungata della neve. Un disegno fatto sotto $\omega = 18°$ indicherebbe circa 160° per la longitudine di uno degli apsidi. Sotto $\omega = 45°$ fu fatto un diligente schizzo della calotta in aria eccellente; dal quale risulta un apside più schiacciato e più largo verso la longitudine 350°, e un altro più acuto nella direzione 170°. La neve, più che ovale, appariva adesso triangolare cogli angoli arrotondati. La base del triangolo corrispondeva all' apside schiacciato e il vertice all'angolo acuto. — Il 4 ottobre per $\omega = 356°$ non si vedeva nella neve obliquità alcuna, soltanto essa pareva più rotonda del solito. Apparenza prodotta dai due apsidi, uno dei quali si presentava press' a poco in quell'epoca nella direzione del centro. Tutte le osservazioni di questo periodo si accordano bene fra di loro, e danno 158°, 160°, 170°, 176° per longitudine di uno degli apsidi. Il cambiamento nella direzione del grand' asse dell'ovale nevosa è indubitato: da 132° l'apside più acuto è passato a circa 166°.

220. *III° periodo*: 10-27 *ottobre*. Raccolgo sotto un solo periodo tutte le osservazioni di questo intervallo, non perchè sia certo, che in esso non abbiano avuto luogo mutazioni di figura della massa nevosa, ma perchè quelle osservazioni non si contraddicono fra di loro, e tutte possono esser spiegate con una sola forma triangolare di essa massa.

Il 10 ottobre ($\omega = 298°$) trovo scritto *Calotta stretta ed acuta*: il disegno corrispondente lascierebbe congetturare una figura triangolare allungata, di cui il vertice più acuto abbia il suo asse parallelo appunto al 298° meridiano. Ma questa induzione non pare confermata dal disegno fatto poco dopo sotto $\omega = 307°$, se non in quanto press' a poco in quest' ultima direzione parrebbe collocato il maggior diametro della macchia bianca. Il giorno 11 ottobre l'aria fu cattiva e della figura della neve non trovo registrato nulla. — Il 12 ottobre per un tempo stupendo potei distintamente esplorare la forma della neve: la quale appariva come un triangolo scaleno, coi due lati maggiori alquanto convessi all' infuori. La direzione che formava l'asse del vertice più acuto accennava alla longitudine 133° dalla parte della punta, e 313° dalla parte opposta. Questo risultamento fu confermato dal disegno fatto poco dopo sotto $\omega = 304°$. — Il 13 ottobre non trovo notato altro che una riduzione notevole nelle dimensioni della neve. Il disegno fatto sotto $\omega = 328°$ indica soltanto, colla sua poca diversità della figura rotonda, che il maggior diametro della neve giaceva allora in una longitudine non molto diversa da quella, ma non dà informazioni sicure. Sommando insieme tutti i risultati dei giorni 10, 12, 13 ottobre si trova che la direzione della massima dimensione ha cambiato sensibilmente a partir dal II° periodo: da 166° l'apside acuto è ritornato alla direzione 133°, cioè a quella del primo periodo. — Il 14 ottobre in aria ottima si riconosce ancora che

la neve è un triangolo scaleno coi lati convessi. L'asse della punta che ora sembra più spiccata tende alla longitudine 272°. Questo cambiamento forse si può spiegare con sole variazioni di prospettiva. Altre osservazioni sulla neve non ho fatto di poi sino al 27 ottobre. Il 27 ottobre ($\omega = 162°$) si è potuto figurare la neve molto distintamente: essa era triangolare di lati quasi rettilinei. La punta più acuta accennava al 146° meridiano. Nel giorno seguente i disegni confermano in genere questo risultamento, la direzione della punta acuta sarebbe però piuttosto 130° o qualche cosa di simile. In totale dunque si ha in questi giorni lo stesso risultato che si era ottenuto nei giorni 10-13 ottobre.

Tutte queste osservazioni del III° periodo sembrano combinarsi abbastanza bene, ammettendo una sola figura di triangolo scaleno, in cui le linee mediane di due angoli acuti siano dirette l'una 133°, l'altra secondo 272°.

221. *IV° periodo*: 4 *novembre*. In questo giorno la neve non apparve più come un triangolo, ma bensì come una sottile striscia più lunga che larga, il cui asse risultò dal disegno giacere nella direzione 106° dalla parte dove la striscia sembrava più angusta.

222. *Conclusione*. La macchia nevosa dal 24 settembre al 4 di novembre ha cambiato continuamente di figura, e si presentò come ovale variabile di grandezza e di forma dal 24 settembre al 4 ottobre. Dal 10 ottobre al 4 novembre ebbe sempre figura di triangolo irregolare, con variazioni in parte apparenti e in parte anche reali. Tali variazioni per tutto il tempo delle osservazioni non sono impossibili a spiegare con semplici troncature o sfaldature delle figure anteriori, e non sembra necessario ammettere che tutta la macchia polare girasse d' un pezzo galleggiando, come forse si potrebbe esser inclinati a supporre. Io ho fatto un tentativo per rappresentare in un disegno l'istoria di tutti questi rivolgimenti, ma il materiale essendo insufficiente, questa è in parte risultata ipotetica; onde non credo opportuno di accrescere con essa la mole della presente Memoria.

Sezione IV.

Sopra la natura della macchia bianca polare.

223. Dopo tutte queste osservazioni e deduzioni è chiaro, che fra le ipotesi possibili sulla natura della macchia polare si devono escludere tutte quelle, che condurrebbero a considerare questa macchia come qualche cosa di permanente sulla superficie di Marte, per esempio un grande strato di quarzo bianco o di marmo di Carrara. La macchia polare è qualche cosa, la cui estensione è connessa col luogo di Marte nella sua orbita: tale estensione è minima circa due mesi e mezzo dopo il soltizio australe del pianeta, nel tempo appunto, in cni secondo le esperienze che facciamo sulla Terra, deve colà regnare la massima temperatura. La Terra ha anch'essa ai suoi poli due macchie bianche consimili, la cui estensione è minima circa due mesi dopo il solstizio che loro apporta la stagione più calda [1]. L'analogia

[1] Il mese di agosto è generalmente riguardato come il più favorevole per le esplorazioni artiche, come tutti i viaggiatori di quelle regioni attestano.

è così evidente, così completa, che in mancanza di altre supposizioni più plausibili, noi abbiamo diritto di riguardare (come già moltissimi hanno fatto) le macchie polari di Marte come il risultamento di una condensazione solida dei vapori dell'atmosfera del pianeta. I quali vapori, stando a ciò che le ricerche spettroscopiche di Vogel ([1]) hanno indicato, probabilissimamente sono vapori d'acqua. Ma si tratti d'acqua o d'altra materia, le apparenze rimangono spiegate egualmente bene. Così è giustificato il nome di *neve* o di *macchia nevosa* con cui spesso la macchia polare è stata designata nelle ricerche precedenti.

224. Ammessa l'esistenza di una crosta ghiacciata, si può domandare in qual modo essa riposi sulla superficie del pianeta. Le nevi dei poli terrestri sono impegnate fra isole e variamente impedite nei loro movimenti generali: soltanto quando una parte di esse si rompe, può subire un trasporto sensibile, come è avvenuto ai ghiacci che resero vani i tentativi di Parry per giungere al polo, e a quelli che portarono il *Tegethoff*. Quali movimenti possa prendere una tal crosta, errante liberamente sulla superficie d' un mare non impedito: se essa oscillerebbe stabilmente intorno ad una posizione fissa, oppure se dalla rotazione del pianeta e dalle correnti sarebbe spinta tutta in corpo verso inferiori latitudini, è difficile prevedere. Sembra però che se quest' ultima ipotesi si verificasse, la calotta non giungerebbe neppure a formarsi o a prendere una ragguardevole estensione. O forse la calotta non esisterebbe come sistema permanente, ma sciogliendosi nelle parti troppo vicine all' equatore, si riformerebbe continuamente nelle parti opposte, siccome spesso avviene delle nuvole nella nostra atmosfera.

225. Comunque sia, la persistenza delle nevi australi di Marte intorno alla medesima posizione per lunghe settimane, provata dalle nostre osservazioni di posizione riferite nella prima parte di questa Memoria; e più la persistenza degli ultimi residui nello stesso luogo durante le fusioni estive del 1830, del 1862 e del 1877, sembrerebbe indicare con qualche probabilità che la calotta nevosa sia aderente al corpo solido del pianeta. Tale aderenza forse è prodotta, come per la Terra, dall' essere impegnati i ghiacci in isole, in scogli; od anche semplicemente proviene dall' esser questi appoggiati per il loro peso sul fondo del Mar Polare. Vedremo ragioni di credere, che una parte almeno di mari di Marte abbia pochissima profondità. Che se non si voglia ammettere la natura liquida di ciò che noi chiamiamo *mari*, la permanenza di quelle nevi al medesimo punto si spiega agevolmente da sè.

226. L' area straordinariamente piccola a cui nel 1877 si è ridotta la neve polare, non maggiore di un circolo di 7 od 8 gradi di diametro, è un altro fatto degno d' attenzione. Nulla di simile ha luogo sulla Terra, dove se in alcune direzioni i ghiacci artici han permesso di penetrare sino al parallelo 84°, in altre mantengono permanente impero fin sotto il 62°. Invece i ghiacci di Marte possono lasciare scoperto il polo australe: *questo è certamente avvenuto* alla fine di ottobre, o al principio di novembre 1877. La differenza di temperatura fra il mezzo della calotta ed i suoi orli non sembra che in tali circostanze possa esser molto grande:

[1]) *Untersuchungen ueber die Spectra der Planeten*. Leipzig 1874, pag. 20.

onde quasi si è indotti a credere, che la permanenza delle nevi in quel luogo così ristretto di area e così fisso di posizione abbia una causa speciale. La supposizione di qualche isola o almeno di qualche basso fondo si presenta qui naturalmente di nuovo.

227. In un recente articolo pubblicato nelle *Notizie mensili* della Società astronomica di Londra [1] il signor Brett pensa che la macchia polare non sia che un ammasso di nuvole. Ciò potrebbe forse ammettersi, se questa non fosse troppo fissa di sito, e troppo dissimile in apparenza dalle vere nubi, che sì spesso ingombrano la superficie del pianeta. Veramente il sig. Brett non ha trovato traccia di queste nuvole sull'emisfero australe nel 1877, ed anche noi abbiam veduto, che in certe parti di esso furon rarissime, sebbene in altri luoghi abbiano abbondato anche troppo. Nelle opposizioni del 1830 e del 1862 la loro presenza fu anche facile a constatare. Or queste nubi non sono di bianco così abbagliante, nè hanno quella costanza di posizione, che distingue la calotta polare. Brett attesta di aver potuto distinguere *l'ombra* projettata dalla supposta calotta di nuvole sul pianeta. Io dichiaro di non aver mai veduto nulla di simile, sebbene abbia considerato la calotta polare ben più di 100 volte durante l'opposizione del 1877. Talvolta l'orlo superiore appariva di un bianco un po' men puro che il resto; e tutto l'insieme sembrava produrre l'idea, che la calotta fosse una specie di stiacciata bianca più rilevata agli orli, più depressa nel mezzo. Qualche cosa di simile attesta di aver veduto il prof. Hall col gran refrattore di Washington (*Astron. Nachr.* n. 2174). Son cose certamente da notare, le quali per ora tuttavia non possono servire di base ad alcuna illazione [2].

Sezione V.

Sopra l'atmosfera di Marte.

228. L'esistenza dell'atmosfera di Marte si manifesta in tre modi diversi: 1° dalla maggior luce che l'orlo del disco ha in confronto colle parti centrali; 2° dalla minor evidenza con cui, in certe circostanze almeno, si presentano le macchie, quando si accostano agli orli del disco; 3° finalmente dagli intorbidamenti transitorî che succedono sopra alcune regioni, e che non possono interpretarsi in altro modo, che come nebbie o nuvole simili a quelle dell'atmosfera terrestre. A queste manifestazioni si può aggiungere ancora la variabilità della calotta polare, che è difficile non

(1) *Monthly Notices of the Royal Astr. Society* vol. XXXVIII, dec. 1877.

(2) Forse è questo il luogo di accennare, che la luce della calotta essendo *bianca* la refrazione atmosferica ne eleva l'immagine sull'orizzonte più che non faccia per la superficie circostante del pianeta, nel quale prevale la luce *rossa*. Se durante le osservazioni del 1877, in cui Marte ebbe sempre una declinazione australe notabile, ammettiamo che la refrazione fosse qualche cosa come 100″, è chiaro che bastava una differenza di $\frac{1}{500}$ nel valore delle rifrazioni della calotta e del pianeta per produrre in alto e in basso della macchia un orlo colorato di 0″,2: quantità certamente non insensibile all'occhio armato di forti ingrandimenti. Forse questa è una delle cause, per cui così spesso nei disegni di Marte la macchia nevosa è rappresentata da un' ellisse assai troppo vicina al circolo (qualche volta anzi da un circolo).

connettere colle vicende di un atmosfera del pianeta. Discorriamo qui dei due primi effetti.

229. *Splendore dell' orlo del disco.* Uno splendore crescente in modo continuo e accelerato dal centro verso i lembi si è sempre manifestato nelle nostre osservazioni, ma non in modo costante. Durante il mese di settembre la zona perimetrale, in cui questo incremento si manifesta, mi è sembrata molto più larga, che in ottobre ed in novembre: nei quali mesi questa zona si venne talmente restringendo, da non formare più quasi altro, che una linea luminosa intorno al disco, senza apprezzabile larghezza. Questa l'ho veduta sempre lungo la parte dell'orlo non affetta da fase, sia che al perimetro del disco si trovassero parti chiare del pianeta, sia parti oscure. L'osservazione più precisa a questo riguardo fu da me fatta il 2 ottobre in aria veramente stupenda. In quest' occasione potei osservare il luogo del limite australe della fase nelle vicinanze della neve polare sotto la forma indicata dalla figura 10ª: cioè di una esagerazione della curvatura nel punto B dove sta il corno della falce oscura: esagerazione che dalla figura geometrica della fase non può risultare. L'interpretazione di questo fatto si può ottenere, supponendo che la zona chiara limitante il disco in AB riceva la maggior parte del suo splendore dall' ultimo contorno, nel quale la luce sia addensata fortemente. Allora la principal luce verrà a mancare, se non subitamente all' estremità geometrica della falce scura, certo in un breve intervallo a partire da detta estremità. Mancherà dunque quasi subitamente la causa, che dà al nostro occhio quell'ampliamento fittizio del disco che tutti sanno, e in poco spazio sembrerà il contorno passare dall'arco AB all'altro più interno *ab*. Il contorno avrà dunque la figura AB *ab* invece che dovrebbe essere A'B'*a'b'*. Ciò manifestamente non succederebbe se l' incremento della luce del disco non fosse rapidissimo nella vicinanza dell'orlo. Questa osservazione fu da me ripetuta parecchie volte e me ne sono servito talvolta per riconoscere sul lembo il luogo dove incominciava la fase oscura. Il significato più naturale di questo fatto sembra si abbia ammettendo, che nell'atmosfera di Marte siano sospesi corpuscoli capaci di rifletter la luce ed in variabile quantità, come è dei vapori vescicolari e del pulviscolo che ingombra l'atmosfera terrestre. Quando l'ingombro è maggiore, la zona perimetrale luminosa del disco deve naturalmente apparire più larga. E il fatto che questa zona durante le osservazioni si è venuta restringendo sembra indicare che l'atmosfera del pianeta in quell' intervallo si è venuta progressivamente rischiarando.

230. L'esistenza della zona luminosa perimetrale si potrebbe anche spiegare ammettendo alla superficie di Marte asperità simili a quelle che stanno sopra la Luna, le quali fanno apparire nel plenilunio il disco del nostro satellite alquanto più luminoso presso gli orli che presso il centro. Questa ipotesi che a prima giunta pare anche plausibile, non è necessaria, dal momento che l'esistenza dell'atmosfera di Marte è appoggiata ad altre prove. Inoltre essa richiederebbe l' esclusione dal pianeta di qualsiasi cosa che rassomigli ai nostri mari: perchè la zona luminosa perimetrale esiste tanto sulle parti oscure, quanto sulle parti chiare della superficie del pianeta. Da ultimo l' incremento rapidissimo che la luce della zona perimetrale di Marte ha verso gli ultimi confini del disco non può assimilarsi alla distribuzione di luce che si osserva sul perimetro della Luna piena, per la quale il detto incremento

è senza dubbio assai più lento. Ciò consta non solo dall' ispezione diretta e dall'osservazione qui sopra riferita § 229: ma in modo anche numericamente dimostrativo risulta dalle osservazioni, che il prof. Zöllner ha fatto sulla legge che regola le variazioni dell' intensità luminosa totale di Marte dipendentemente dalla sua fase. Egli ha trovato, che a partir dall'opposizione la luce di Marte per causa della fase decresce con proporzione assai più rapida che non quella della Luna per fasi di eguale ampiezza ([1]). Volendo con Zöllner spiegare questo fatto coll'assumere l'esistenza di asperità alla superficie di Marte, converrebbe supporre i fianchi di quelle prominenze inclinati di 76° sull' orizzonte, come l'autore stesso ha calcolato; ammettere cioè che il pianeta sia ispido di acute punte; ed è ancora a dubitare, se con ciò si giungerebbe allo scopo desiderato. La vera causa del fenomeno sta nella strettissima zona perimetrale luminosa prodotta dall'atmosfera di Marte: zona che già per una fase pochissimo diversa dalla piena illuminazione viene a scomparire totalmente o quasi totalmente su metà del contorno del disco, e produce così una forte e subita diminuzione nella somma totale della luce emanata dal pianeta.

231. *Diversa visibilità delle macchie nelle diverse distanze dal lembo.* Il decrescere di questa visibilità dal centro agli orli, e la conclusione che se ne trae relativamente all' esistenza su Marte di un' atmosfera non assolutamente trasparente, sono cose notissime. Dalle mie osservazioni risulterebbe anche qui una notabile variabilità dell'effetto, corrispondente ad una pari variabilità nel grado di trasparenza. Facendo astrazione dalla macchia polare e da tutte le regioni collocate al nord del Grande Diaframma, dove poco e male si poteva vedere, anche al centro del disco: considerando quindi soltanto la regione delle grandi macchie, e specialmente il Mare Eritreo, il Lago del Sole e la zona dei mari mediterranei, trovo che generalmente durante il mese di settembre la visibilità cessava alla distanza dal lembo uguale ad un quinto del raggio del disco, ciò che corrisponde alla distanza di 53° dal punto centrale, o dal polo dell'emisfero visibile. Negli ultimi di settembre tuttavia questo limito è stato superato, specialmente per il Lago del Sole, il quale ho potuto scoprire per la prima volta il 20 settembre, quando aveva già oltrepassato il meridiano centrale di 63°, e il 1° ottobre, quando mancavano 61° a raggiungerlo. I disegni da me fatti durante l'ottobre abbracciano sull' equatore da 120° a 130° di longitudine, ciò che indica, esser allora stati ancora riconoscibili oggetti distanti di 60° o 65° dal polo dell' emisfero visibile. L'aver riconosciuto i limiti australi di Thyle II il 21 ottobre indica, che in quel giorno si potevano scoprire cose nuove alla distanza di 55° dal centro. Ma non mi è mai riuscito di poter seguire a vedere le macchie oscure fin proprio al lembo, come alcuno attesta d' aver fatto. Bensì durante l'ottobre, essendo già forte la fase oscura (da 21° a 35°) ho potuto vedere prolungarsi i limiti dei mari e delle terre fino al limite di essa. A cagione della forte obliquità con cui la superficie del pianeta è illuminata presso questi limiti, la luce diventa più debole e ciò favorisce la visibilità di certi contrasti di lume e d'ombra, che altrimenti l'occhio non giungerebbe ad afferrare. Ad un complesso di tali circostanze io devo per esempio di aver potuto constatare il 20 ottobre ($\omega = 243°$)

([1]) *Photometrische Untersuchungen*, p. 127. Lipsia, 1865.

presso il corno inferiore della fase oscura l'esistenza dell'Eunosto, il quale come pallidissima ombra non si rendeva sensibile se non per questo, che spiccava debolmente sopra un fondo ancora alquanto più pallido. A questo proposito ancora si può aggiungere, che la visibilità dei particolari della superficie di Marte è nelle vicinanze del lembo resa più difficile (oltre che dall'accorciamento, di cui non occorre parlare) anche dall'essere ivi l'occhio maggiormente impedito dalla zona splendente perimetrale del lembo. Questa zona appare comparativamente più luminosa nei minori ingrandimenti, per i quali credo d'aver notato che lo spazio utile di visibilità sia molto più ristretto, che per le amplificazioni maggiori.

232. Questo per le macchie oscure. Ma per le macchie molto chiare, o almeno per certe parti più luminose delle terre che stanno al sud del Grande Diaframma succede questo : ch'elle appaiono più splendenti presso gli orli, che presso il centro. Le regioni che in modo più certo e con maggior frequenza mi hanno presentato questa proprietà sono: 1° le due isole di Thyle, la cui esistenza fu riconosciuta presso il lembo e solo più tardi constatata con osservazioni presso il meridiano centrale; 2° l'Isola d'Argyre, il cui splendore al lembo sinistro tanto mi colpì quando la vidi per la prima volta il 24 settembre, da dar origine al nome di questa terra; 3° l'Ellade, che è il caso di tutti più facile a verificare. In grado assai minore partecipano di questa proprietà l'Eridania e la Memnonia, e al nord del Grande Diaframma la regione chiamata Chryse.

233. Io non saprei dare alcuna spiegazione ben sicura di questo fatto. Son forse queste regioni montuose, e succede in parte per esse ciò che si verifica per la Luna? La quale nel plenilunio è più luminosa agli orli, non però in guisa da produrre l'effetto della zona perimetrale che si osserva in Marte. Come Zöllner ha fatto osservare per la prima volta, l'esistenza di forti asperità nella superficie fa crescere lo splendore apparente della medesima tanto più, quanto maggiore è l'obliquità della vista sulla superficie stessa ([1]). Noi potremmo dunque immaginare che lo stesso avvenga per Thyle, per Argyre, e per l'Ellade, in lontananze dal centro del disco non abbastanza grandi perchè il cresciuto assorbimento dell'atmosfera di Marte possa controbilanciare l'effetto così prodotto. O proviene la maggior luce e questo modo di comportarsi della medesima da veli di nebbia? per i quali l'illuminazione obliqua segue leggi diverse che per le superficie solide. Quando il velo di nebbia sia abbastanza trasparente per lasciare alla superficie sottostante del pianeta una parte notevole dell'illuminazione solare, e si supponga che la nebbia rifletta meglio la luce che la superficie suddetta, anche questa spiegazione può diventar possibile.

234. L'apparire che fanno queste regioni all' orlo del disco come macchie luminose, le ha fatte talvolta comparare alla neve polare, la quale in certi disegni è rappresentata per conseguenza come doppia. Oltre alla macchia polare, tre macchie luminose furono constatate simultaneamente all'orlo di Marte dal sig. Webb in un suo disegno dell'aprile 1856; l'origine delle quali probabilmente è da attribuire a fenomeni del genere qui considerato ([2]). Veggansi ancora i disegni n. 7, 42, 45 fra

([1]) *Photometrische Untersuchungen* p. 33 e segg.
([2]) *Monthly Notices of the Royal Astr. Society* vol. XVI, p. 188.

quelli pubblicati dal sig. Terby nella sua *Areografia*. Io sarei inclinato a credere, che nel primo di essi Schroeter abbia rappresentato, oltre alla macchia nevosa, anche l'isola di Thyle II al lembo precedente del pianeta.

Sezione VI.

Processi meteorici sulla superficie di Marte.

235. Nelle sezioni I-IV ho riferito minutamente le osservazioni e le deduzioni che riguardano il più importante e il più osservabile di questi processi meteorici, qual'è probabilissimamente la formazione e lo scioglimento delle nevi polari. Qui resta a discorrere degli intorbidamenti a cui è soggetta l'atmosfera di Marte, e che tutto porta a credere esser conseguenza di vapori (d'acqua?) in essa contenuti. L'esistenza di questi vapori sotto forma gazosa è dimostrata dallo spettroscopio: la loro presenza sotto forma vescicolare risulta dall' osservazione diretta.

236. Quando le nuvole di Marte si projettano sopra le macchie oscure del pianeta, si mostrano come striscie o chiazze sfumate e per lo più mal contornate d'aspetto variabile. Possono talora esser tanto brillanti, quanto le parti più luminose del pianeta, come ho a suo luogo riferito della striscia lucente che per due volte in pochi giorni coperse la Terra di Proteo (§§ 106, 108). In altre occasioni possono apparire di tinta meno chiara, sempre però più chiara che il fondo su cui si projettano. Così più volte trovo nel mio giornale chiamata fumosa o caliginosa la nube, che coperse per più mesi di seguito la Noachide, come a suo luogo si è dichiarato. Ciò indica probabilmente non un colore particolare della nube (altrimenti queste nubi si osserverebbero come macchie scure variabili sul fondo chiaro dei continenti, di che non conosco esempio), ma una maggior trasparenza della medesima. In tal caso senza render affatto invisibile il fondo, quel velo raro basta a confondere i tratti, e a rendere impossibile l'esatta descrizione dei contorni. Questo credo sia avvenuto su quasi tutto il Mar Eritreo nei giorni 10 e 11 ottobre. La sera del 10, dopo aver senza difficoltà fatto osservazioni sulla regione compresa fra il 240° e il 350° meridiano, le interruppi per osservare la cometa scoperta pochi giorni prima da Tempel: indi ripigliai l'esplorazione di Marte, ed essendo $\omega = 8°$ scrissi quanto segue: « Marte bellissimo. Il Mar Eritreo è in gran parte ottenebrato da nuvole. Noachide oscura. Terra di Deucalione appena visibile. Invece è chiarissima l'Arabia, e ben distinto il Golfo Sabeo ». Il giorno dopo, sotto $\omega = 343°$: « Continua in Marte la torbidezza sopra la Noachide e il Mar Eritreo ». Non posso dire con precisione quando cominciasse questo stato di cose: certamente fu fra il 4 e il 10 d'ottobre. Nè anche quando finisse: perchè soltanto il 14 ottobre potei rivedere la parte più orientale del Mare Eritreo, e anche quella in troppa vicinanza del lembo destro. Il 4 novembre il Mare Eritreo era intieramente libero nella sua parte occidentale.

237. Se le nuvole di Marte sopra le parti oscure del pianeta si rendono visibili per visione positiva, sulle parti chiare la loro presenza si riconosce soltanto in modo negativo, cioè non per quello che di esse si vede, ma per quello che impediscon di vedere. Durante l'opposizione del 1877 dal settembre al decembre gran parte del pianeta fra il Grande Diaframma e il parallelo 30° di latitudine boreale era

ingombrata da nuvole. Tutto il continente equatoriale fra la Gran Sirte e il Gange deve credersi che fosse così ottenebrato: perchè malgrado la più sostenuta attenzione in tutto quel tratto non mi è riuscito di vedere altro che una superficie uguale e lucente senza indizio d'interruzioni che si spingessero a qualche distanza considerevole dal Mar Eritreo. Solo pochi gradi entro terra potei seguire le foci dell'Indo e dell'Idaspe, e più che osservare, congetturare quelle del Gehon e del Phison. Tutti i canali, che sulla nostra carta solcano così variamente quella regione sono stati veduti nel febbraio e nel marzo 1878, benchè il pianeta fosse allora quattro e cinque volte più lontano dalla Terra, che nel settembre e nell'ottobre precedenti. Senza dubbio il Sole scendendo all'equatore dileguò il velo impenetrabile che prima si stendeva in quei luoghi e li rendeva affatto inaccessibili alle osservazioni.

238. Invece fra le longitudini 110° e 240°, in tutto lo spazio che circonda al nord il Mare delle Sirene e il Mare Cimmerio, il velo pareva uniforme durante il settembre e l'ottobre 1877, ma non impenetrabile; e a traverso di esso furon riconosciuti tutti i canali tracciati sulla carta dal fiume delle Sirene a quello degli Etiopi, sebbene con molta incertezza, e diverse parti furono meglio vedute in diversi tempi. Più tardi, in dicembre, gennaio e febbraio, il velo si diradò, e malgrado le dimensioni del pianeta ridotto al diametro apparente di 8″ od anche di 6″ fu possibile confermare l'esistenza e il corso del fiume delle Sirene, di quelli dei Giganti, dei Titani, e dei Ciclopi, dell'Oceano e dell'Eunosto, divenuti linee visibilissime e di tinta forte. Fra i meridiani 250° e 300° nessuna apparenza nebulosa è venuta a turbare le osservazioni: il fiume Tritone, il Nepente, il Lago Tritone, il Lago Meride, la Gran Sirte ed il Nilo conservarono sempre una gran costanza d'aspetto, e la diversa loro visibilità si potè spiegare semplicemente col maggiore o minor favore delle condizioni atmosferiche terrestri.

239. E questo è il poco, che intorno alle nuvole (forse sarebbe meglio dir nebbie) di Marte ho potuto raccogliere dalle mie osservazioni del 1877. Ben altrimenti istruttiva a tale riguardo è stata l'opposizione del 1862, come si può vedere nei disegni degli egregi osservatori Kaiser, Lockyer, Rosse, Lassell, Phillips e Secchi. Come regioni classiche a questo riguardo appaiono il Mar Eritreo e la Gran Sirte, colle terre confinanti così ad oriente, come ad occidente. A lungo ho descritto (capo III, sezione XI) le formazioni di nebbie sulle terre oscure (bassi fondi?) di cui questa parte del pianeta è tutta ingombra, e gli errori che ne son derivati nelle carte areografiche. Anche nel 1862 si osservarono projettate sulle macchie oscure del pianeta nubi di maggiore o di minor splendore, cioè più o meno opache e quindi più o meno illuminate. Sulla zona delle terre equatoriali pare che il velo fosse anche più denso che nel 1877 perchè lo stesso acutissimo osservatore Lockyer ha quasi dovunque affatto vuota la metà inferiore dei suoi dischi. Il mare polare nel 1862 non fu intieramente libero da nubi come nel 1877: e nel descriver quel mare ho notato, come nel velo che lo ricopriva esistessero varie aperture corrispondenti alle vie di comunicazione di esso mare con altri mari più vicini all'equatore. Le quali sono sostanzialmente quattro: cioè 1° il Golfo Aonio, che raccoglie il Fasi, l'Ellesponto, e lo stretto di Palinuro: 2° il Bosforo Gemmato, e 3° l'Ellesponto, che aprono la via all'Eritreo; 4° il Golfo di Prometeo, che raccoglie lo Xanto e lo stretto di Tifi.

La quinta via possibile, che corrisponde allo stretto d'Ulisse fra Thyle I e Thyle II è troppo alta in latitudine per poter esser comparata convenientemente colle altre dal lato meteorologico: sebbene essa pure fosse scoperta nel 1862 (capo III, sez. XXVI).

240. Nel 1830 Maedler trovò occupata da nubi la parte orientale del Mare Eritreo, e la parte occidentale del medesimo presso il Bosforo Gemmato: poi tutto il Mare Australe, ad eccezione di quattro strisce corrispondenti ai quattro canali di comunicazione sopra nominati. E forse il non aver egli allora potuto prender notizia del fiume delle Sirene, nè di quello dei Ciclopi, nè del visibilissimo Gange, può far sospettare che anche molte parti delle terre equatoriali nel settembre e nell'ottobre 1830 fossero coperte da un velo denso analogo a quello che tanto impacciò nel 1862 e nel 1877. Questo velo però non esisteva nelle parti boreali di Chryse, onde Maedler potè riconoscere sott'essa la parte più occidentale del corso del Nilo. Ma nel 1830, come nel 1862 e nel 1877, tutta la zona dei mari interni, cominciando dal Lago del Sole fin dopo la Piccola Sirte fu costantemente libera da ogni offuscazione.

241. In questo insieme d'osservazioni è notevole: 1° La relazione che hanno colla distribuzione delle nebbie polari australi i canali di comunicazione del Mare Australe coi mari delle latitudini temperate; 2° l'agglomerarsi delle nebbie marine sulle terre oscure (o bassifondi?) comprovato da parecchi esempî; 3° la trasparenza grande che hanno molte di queste nebbie, ciò che lascia congetturare poca densità o grossezza nel senso verticale; 4° il progressivo diradarsi di questi veli sulle terre equatoriali dall'epoca del solstizio australe di Marte fino a quella dell'equinozio consecutivo; 5° la serenità che pare abbia sempre dominato sui mari interni nelle epoche immediatamente consecutive al solstizio australe. Fenomeni tutti, dei quali si hanno poche osservazioni, e sui quali è desiderabile si rivolga l'attenzione dei futuri areografi, per vedere quello che in essi si può riguardare come legge costante e generale.

242. Ho limitato il presente esame alle tre opposizioni, che corrispondono al solstizio australe del pianeta, e che fra le osservate sono quelle che meglio si corrispondono climaticamente fra loro. Quanto si è detto sulla meteorologia di Marte riguarda dunque soltanto i mesi, che immediatamente precedono e immediatamente seguono quel solstizio. Rimarrebbe ora ad investigare quanto avviene nelle altre stagioni di Marte: qual è il modo di estendersi della neve australe sopra gli spazî oscuri e sopra gli spazî luminosi del pianeta: quale è nelle diverse stagioni il grado normale di trasparenza dell'atmosfera nelle diverse latitudini areografiche. Le nostre osservazioni sono troppo brevi e troppo incomplete per servir di base alla trattazione di simili questioni. Il ritardo di 2 ½ mesi che la neve indica pel colmo della state nelle regioni polari australi, esiste anche pel massimo di trasparenza dell'atmosfera nella zona temperata. Il progressivo rischiararsi in dicembre, gennaio, febbraio e marzo della nebbia che copriva le terre equatoriali all'epoca del solstizio da me osservato (18 settembre 1877) è certamente un effetto del Sole ridisceso a culminare su paralleli meno australi. Forse al moto del Sole è pure connessa la nevicata, o la bianchissima nebbia osservata sull'Ellade il 16 dicembre, 90 giorni dopo il solstizio australe. Il diametro di 25° e di 30° osservato nella neve australe ancora nel mese che precede il solstizio (v. qui sopra § 211) fa congetturare un'estensione ancora molto maggiore in altre epoche dell'anno di Marte.

243. Noteremo ancora, che nella zona fra il 10° e il 30° parallelo australe, che fu verticalmente percossa dal Sole durante le nostre osservazioni, non si manifestò niente di simile alle zone delle piogge e delle calme equatoriali terrestri, che sogliono accompagnare sui nostri mari il moto del Sole in declinazione. Quella zona anzi, durante la maggiore irradiazione solare, fu tutta intiera libera da nubi, ad eccezione di quei pochi intorbidamenti sul Mare Eritreo, di cui già si è parlato. Anche nel 1830 e nel 1862 quelle latitudini furono quasi interamente libere, e gli oscuramenti ebbero luogo soltanto sull'Eritreo, o in immediata vicinanza di esso. Sembra dunque che il sistema generale della meteorazione atmosferica in Marte non abbia molta analogia con quella della Terra; e se bene ho inteso il senso delle mie e delle altrui osservazioni, pare che sia anche molto più semplice, e press'a poco come segue. Nelle epoche solstiziali un emisfero parrebbe tutto o quasi tutto consacrato all'evaporazione, l'altro alla condensazione. Nelle epoche intermedie una zona di evaporazione parrebbe limitata al sud e al nord da due zone o piuttosto calotte di condensazione. Sulla larghezza di queste zone nelle varie stagioni poi deve influire non solo la declinazione del Sole, ma ancora la ripartizione delle terre e dei mari; le prime infatti sembrano favorire di preferenza lo stato nuvoloso, mentre ai secondi pare destinata maggior purezza di atmosfera, senza dubbio dipendentemente dalle cause che producono fenomeni analoghi sulla terra [1]. Ecco un altro argomento, su cui mi permetto di chiamare l'attenzione degli osservatori: attenzione che dovrebbe esser continuata per quattro o cinque mesi prima e dopo ciascuna opposizione, onde poter seguire con continuità le vicende dei fenomeni. Ciò non presenta la difficoltà che alcuno potrebbe credere: osservazioni utili si possono fare anche quando il diametro apparente sia ridotto a 5″ o 6″. Naturalmente è necessario profittare dei momenti, in cui l'atmosfera della Terra è molto tranquilla, ed impiegare obbiettivi di grande definizione, con amplificazioni non minori di 300 o 400 volte.

Sezione VII.

Delle macchie oscure, che si osservano sulla superficie di Marte.

244. Le macchie oscure di Marte formano ciò, che sulla nostra carta si è distinto col nome di *mari*. Esse non sono isolate, ma comunicano tutte fra di loro per mezzo di striscie oscure più o meno visibili (i *canali* o *fiumi* della nostra carta), avviluppando così il pianeta in una rete continua, e lasciando in mezzo a loro gli spazî chiari sotto forma di altrettante isole. La delimitazione fra le macchie oscure e gli spazî luminosi è quasi da per tutto una linea precisa: soltanto per eccezione in pochissimi luoghi del pianeta il passaggio della piena luce alla forte ombra si fa per gradi, e questi casi saranno più sotto assoggettati ad esame speciale. L'intensità dell'ombra è molto varia nelle macchie oscure: grossolanamente parlando, essa pare aver qualche relazione colla latitudine areografica, e decrescere dall'Equatore verso i poli del pianeta. Questa legge almeno è con sufficiente evidenza osservata nell'emisfero

[1] È noto che i naviganti spesso riconoscono le isole in grandissima lontananza per le nubi o per le nebbie che sopra vi stanno.

australe: dell' altro emisfero le nostre osservazioni non dicono abbastanza perchè si possa portare un giudizio.

245. Al sud del Grande Diaframma la massima oscurità è nella parte boreale del Tirreno, nel Golfo Sabeo, nel Golfo delle Perle, ed in quello dell'Aurora: che son tutti sotto l'Equatore, o poco distanti. Nel Golfo Sabeo (lato boreale) ed in quello delle Perle il contrasto della tinta oscura colla luce dello spazio chiaro attiguo è tale, da produrre, in aria buona, la sensazione di nerezza quasi completa. Il secondo grado di oscurità s'incontra nelle parti medie dal Mare Eritreo, e nelle occidentali presso l'Aurea Cherso; nel Bosforo Gemmato; nel Lago del Sole; nel Mare delle Sirene; nella parte occidentale del Mare Cimmerio; nella parte australe del Mar Tirreno: e meno intenso, ma tuttavia non molto meno, anche nel Mare Cronio e nel Mare Adriatico. Il terzo ed ultimo grado di oscurità appartiene a tutto il Mar Polare Australe preso in grosso nella sua totalità. Sopra l'Ellade e di contro all'Ellesponto esso non è molto meno oscuro del Mare Cronio. Anche intorno alla macchia nevosa del polo la sua tinta è un poco più cupa, forse per effetto di contrasto. La sua parte meno oscura ho trovato essere fra Thyle I, e Argyre di contro al Golfo Aonio, però in molta lontananza dalle spiagge circostanti. Presso a queste ultime corre una zona più nera, la quale circonda Argyre e la parte australe di Thaumasia; forma il Golfo Aonio e lo Stretto di Palinuro. Tutte queste varietà di tinte degli spazî oscuri passano l'una nell'altra per gradi insensibili e non vi è linea di separazione precisa fra le diverse tinte del medesimo mare.

246. Sulla natura di queste macchie oscure e sulla relazione delle medesime cogli spazî chiari si possono fare infinite ipotesi più o meno arbitrarie. Due sole però sono sostenute da analogie sufficienti: e di esse non ve ne ha che una, la quale porga una spiegazione plausibile di tutti i fatti osservati. Si può in primo luogo partire dall'analogia di macchie luminose ed oscure che si vedono nella Luna. In questo caso si supporrebbe la superficie di Marte tutta solida: la diversità di colore deriverebbe dalla diversità dei materiali che compongono lo strato superficiale delle varie regioni: i mari di Marte sarebbero come i mari della Luna: insomma il pianeta ci presenterebbe la sua carta geognostica. Tale ipotesi, sebbene in sè non interamente impossibile, non riesce a spiegare tutti i fatti conosciuti, se non corredandola di altre ipotesi minori sussidiarie, alcuna delle quali molto bizzarra. La presenza di nevi polari (che gode di probabilità quasi confinante colla certezza) e ad ogni modo quella di nuvole e di nebbie estesissime dimostrano, che nell'atmosfera di Marte esiste una circolazione meteorica: che in certe regioni si sollevano vapori, e in altre si condensano. Una tal circolazione è difficile comprendere come possa farsi tutta esclusivamente in alto, senza che la superficie del pianeta vi prenda parte. Se i vapori di Marte in qualche luogo si condensano in cristalli, in altri dovranno condensarsi sotto forma liquida. Tali condensazioni liquide (a meno di supporre che la superficie di Marte sia esattamente una superficie equipotenziale) si raccoglieranno nei luoghi più bassi: nasceranno se non mari, certamente laghi più o meno vasti. Le vie, per cui i vapori condensati giungono a simili serbatoi, non potranno avere altra forma, che quella di ruscelli o di fiumi, se si vuole, anche di corso intermittente. Ora tutto questo sistema potrebbe benissimo esser anche latente, cioè sotterraneo, come la circolazione

delle acque nei deserti africani: o potrebbero i laghi in questione esser tutti molto piccoli, e perciò invisibili, o insomma, il meccanismo, con cui la superficie del pianeta concorre alla circolazione dei vapori atmosferici, potrebbe per qualche ignota causa essere non osservabile. Sono tutte cose possibili: ma diventano supposizioni inutili, dal momento che sul pianeta si vedono apparenze precisamente simili a quelle, che ad un osservatore posto in Marte rivelerebbero l'analogo meccanismo di circolazione dei vapori dell'atmosfera terrestre.

247. Supponiamo dapprima un mare tranquillo composto di liquido quasi assolutamente trasparente, nel quale una profondità notevole sia necessaria per assorbire una parte della luce che l'attraversa. Di un fascio di raggi solari che vi penetrano normalmente (o almeno sotto un'incidenza non troppo obliqua), una minima parte sarà riflessa indietro specularmente, il resto penetrerà con una certa perdita fino al fondo, lo illuminerà, e dopo subìta altra perdita in quasi ugual proporzione, renderà quel fondo più o meno visibile ad uno spettatore che lo osservi stando fra Marte e il Sole, o ad ogni modo in direzione non molto differente. Ma questa visibilità del fondo dipenderà principalmente dall'altezza dello strato liquido. Se la massa liquida è molto profonda, essa potrà, malgrado la sua gran trasparenza, assorbire tutta la luce o quasi tutta: poca ritornerà allo spettatore, quel mare gli sembrerà nero affatto o poco meno. Se la profondità è piccolissima, si vedrà il fondo come se nessun ostacolo si frapponesse, e quasi completamente illuminato. Le profondità intermedie daranno dunque tutte le possibili gradazioni fra la nerezza completa, e la piena illuminazione. Simili effetti, sebbene non interamente uguali nelle identiche circostanze, dovrebbersi aspettare anche nell'ipotesi, che la superficie del mare non sia tranquilla, ma moderatamente agitata.

248. Se invece consideriamo uno strato liquido non assolutamente trasparente, ma capace di riflettere, sia colle sue molecole, sia per corpuscoli che vi stanno in sospensione una parte della luce che vi penetra, la nerezza completa non si potrà più avere, e la tinta più cupa possibile dipenderà dalla natura del liquido stesso e delle materie che tiene sospese: il *maximum* di oscurità si potrà avere con una profondità molto minore. Ad ogni modo si comprende, che senza fare alcuna ipotesi speciale sulla natura dei supposti mari di Marte, la varietà delle loro tinte può essere spiegata semplicemente con differenze di profondità o al più di trasparenza, e di composizione chimica. Infinite varietà di tinte nei mari terrestri sono determinate dalla diversa salsedine. Quanto più l'acqua è salata, tanto più cupo è il suo colore. E poichè in generale la salsedine nei mari terrestri decresce colla latitudine (a cagione della minor evaporazione e della maggior precipitazione), ne segue il colore più luteo e più chiaro, che i mari polari della Terra hanno in confronto degli equatoriali. « Coloro che ricavano il sale dal mare, dice Maury [1], sogliono stimare la ricchezza dell'acqua dal suo colore: più la tinta è verdastra, meno l'acqua è salsa; e questo dato è sufficiente per spiegarci i contrasti che le acque del Gulf-Stream presentano con quelle dell' Atlantico, non che il verde chiaro del Mare del Nord e dei mari polari, di fronte all'azzurro scuro dei mari tropicali, e specialmente dell'Oceano Indiano,

[1] *Geografia fisica del mare*, traduzione di L. Gatta. Torino, Loescher 1877, § 71.

le cui acque da alcuni poeti sono state dette nere ». Ora noti il lettore, che *anche in Marte il Mar Polare è di color meno oscuro che quelli della zona torrida, e i mari della zona temperata hanno una tinta intermedia*, come sopra dietro molte osservazioni si è esposto. Ecco qui una coincidenza che forse non è opera del caso, e di cui sembrerebbe difficile dare una spiegazione soddisfacente senza ammettere che le macchie oscure di Marte siano veri mari, simili nelle loro proprietà ai mari terrestri. Altro tema da studiare per i futuri osservatori.

249. La complicata rete di striscie oscure che riuniscono fra loro le macchie da noi considerate come mari è un altro argomento in favore di queste ipotesi. Tali striscie devono il loro colore alla medesima causa che produce il colore dei mari; non possono dunque esser altro che canali o stretti di comunicazione. La spiegazione sembra necessaria e sufficiente ad un tempo. Le strombature od allargamenti di questi canali verso le estremità, e il fatto che spesso si verifica del loro sbocco in vasti golfi sono appunto quanto si può aspettare in un tale sistema d'espansioni liquide. Il Nilo sbocca nella Gran Sirte, il Lete e il Tritone nella Piccola Sirte, il Phison e il Gehon nei corni del Golfo Sabeo, l'Indo nel Golfo delle Perle, il Gange nel Golfo dell'Aurora, e il Fasi nel Golfo Aonio: i fiumi delle Sirene, dei Giganti, dei Titani, dei Lestrigoni, e dei Ciclopi formano alle loro foci australi golfi più o meno importanti. Perfino il Nepente, sboccando nel Nilo forma accanto a questo un allargamento simile ad un ampio estuario. La rete, di cui mari e canali avvolgono le parti od isole luminose prende in conseguenza tutto l'aspetto di un allagamento insufficiente a coprire tutta la superficie del pianeta, ma sufficiente per non lasciare indivise aree troppo grandi. Niente di simile si vede sulla Luna. Volendo spiegare questi fatti con una semplice distribuzione di materie solide variamente colorate, rimarrebbe a ricercare, in qual modo una tale distribuzione reticolata ha potuto prodursi.

250. Si vede, che l'ipotesi d'una costituzione marittima e continentale della superficie di Marte è circondata da grandi probabilità. Ma questa potrebbe quasi elevarsi al grado di certezza, se si riuscisse ad affermare in modo indubitabile la reale disparizione dell'emissario orientale del Lago del Sole, di cui è parlato nel § 77. Questo canale, che fu veduto da Maedler nel 1830, da Kaiser, da Lockyer, da Rosse, da Lassell nel 1862, da Kaiser e da Dawes nel 1864; nel 1877 fu intieramente invisibile ad uno strumento certamente non inferiore in questo genere (come l'effetto dimostra) ad alcuno dei precedentemente impiegati, e malgrado le indagini più diligenti fatte in stato ottimo d'atmosfera, che condussero a scoprire appunto in quei paraggi oggetti così difficili e minuti, come sono il Fonte del Nettare e la parte dell'Agatodemone ad esso contigua, e la punta dell'Aurea Cherso. Se questa variazione sarà in avvenire constatata, credo difficile di trovarne interpretazione più semplice e più naturale che quella di una mutazione nel regime idraulico di quelle regioni, simile forse a quella, che a nostra memoria cambiò nella China il corso del fiume Giallo.

251. Non devo tacere di una obbiezione, che è stata fatta circa la presenza di mari sulla superficie di Marte: dedotta dal fatto, che non è mai stato osservato in questi mari il riflesso del Sole. Egli è certo che se Marte fosse una sfera pulita e dotata del potere di riflettere specularmente i raggi solari, noi dovremmo vedere una

piccolissima immagine del Sole brillare sul suo disco in forma di stella, in una posizione facile ad assegnare ogni momento. Ammettendo che la riflessione sia *totale* è anche facile calcolare l'intensità di quest'immagine, dato il diametro di Marte e la sua distanza dalla Terra e dal Sole. Nell'opposizione del 1877 per esempio, che avvenne il 5 settembre, essendo Marte alla distanza di 1,383 dal Sole, e di 0,377 dalla Terra, l'immagine in questione avrebbe dovuto figurare come una stella del diametro di $\frac{1}{24}$ di secondo d'arco, e di splendore uguale a $\frac{1}{2100000000}$ di quello del Sole alla distanza 1. Ora il prof. Zöllner nelle sue *Ricerche fotometriche* (¹) ha determinata la quantità della luce totale effettivamente riflessa da tutto il disco di Marte nelle sue opposizioni medie (²) ed ha trovato, che questa quantità è $\frac{1}{6994000000}$ della luce solare alla distanza 1 dalla Terra. Di qui si calcola, che la luce totale di Marte nell'opposizione del 1877 fu $\frac{1}{2990000000}$ di quella del Sole alla distanza 1. Dunque lo spettro luminoso del Sole riflesso nei mari di Marte avrebbe dovuto in quest'opposizione dar più luce da sè solo, che tutto il disco del pianeta quanto era largo.

252. Questo risultamento ha per base la riflessione *totale* dei raggi solari alla superficie del pianeta. Quando però si consideri quale piccola frazione un liquido trasparente, come l'acqua, riflette indietro nelle incidenze poco lontane dalla normale (come son quelle che dobbiamo sempre considerare nel caso presente), le conclusioni subiranno una grande modificazione. Se poniamo che i mari di Marte siano formati di un liquido per cui l'indice di refrazione sia $\frac{4}{3}$ (come press'a poco è per l'acqua), dalla teoria ondulatoria della luce risulterebbe riflessa (in direzione normale o poco diversa dalla normale) solo la 49ª parte della luce incidente (³). L'assorbimento nel doppio passaggio a traverso dell'atmosfera di Marte vuol pure esser tenuto in conto. Ammettendo che sia uguale a quello che produrrebbe l'atmosfera terrestre, si deve ridurre la luce dello spettro luminoso ancora alla metà per questa cagione, e in luogo di $\frac{1}{49}$ avremo $\frac{1}{98}$, o in numero rotondo, $\frac{1}{100}$. Con tutte queste supposizioni adunque si avrebbe per l'intensità dell'immagine solare veduta per riflesso nei mari di Marte

$$\frac{1}{21\times10^{10}} \text{ di quella del Sole.}$$

Nella sua citata opera Zöllner dà per luce di *α Aurigae,* dietro proprie osservazioni fotometriche,

$$\frac{1}{5{,}57\times10^{10}} \text{ di quella del Sole.}$$

(¹) *Photometrische Untersuchungen.* Leipzig 1865, p. 131.

(²) Nelle quali si suppone la Terra distare dal Sole di 1,00000, Marte dalla Terra 0,52369 e dal Sole 1,52369.

(³) Jamin, *Cours de Physique*, vol. III, p. 677. La formola di Fresnel ivi riferita diventa indeterminata per l'incidenza normale. Questa indeterminazione si scioglie osservando che per i, r molto piccoli, si ha $i = nr$.

Perciò anche dopo tutte le accennate diminuzioni, il 5 settembre 1877 il Sole avrebbe dovuto apparire nello specchio convesso formato dai mari di Marte con una intensità uguale a $\frac{1}{4}$ di α *Aurigae*, e quindi come una bella stella di 3ª grandezza.

253. Si vede, che la questione non è tale, da esser passata sotto silenzio. Una stella di 3ª grandezza nel mezzo del Mare Cimmerio o del Mare Eritreo non mancherebbe di rendersi sensibile, malgrado l' influsso incontestabile, che la luce del disco circostante deve esercitare sulla visibilità. Ma non è probabile, che i mari di Marte siano tanto tranquilli da formare una immagine netta, come quella che qui si è supposto. L'esistenza di venti sembra provata da qualche osservazione (§ 102) già riferita. Un increspamento anche lievissimo della superficie scioglierà l' immagine unica in una infinità di piccole immagini. Ora egli è vero, che la somma delle loro intensità luminose non riuscirà per questo molto differente dall'immagine unica: ma quella somma sarà dispersa sopra un largo spazio, di cui l' estensione dipenderà dalla forma delle onde e dalla pendenza dei loro fianchi. La formazione di creste molto forti e molto ripide distruggerebbe affatto ogni immagine. Allora non è più inverosimile, che la specie di nebulosa così formata, la cui luce totale è in ogni caso una piccola frazione di quella del disco, passi inosservata allo spettatore. Ciò sarebbe ancora meno inverosimile, se si ammettesse nel liquido costituente i mari di Marte un potere refringente molto minore di quello dell'acqua. Ma sembra che tali liquidi siano molto rari in natura. Aggiungerò da ultimo che la presente questione è stata discussa già dal professore Phillips [1], il quale, pur dubitando dell' esistenza dei mari di Marte, non sembra credere, che dalla assenza di ogni traccia di riflessione dei raggi solari alla loro superficie si possa trarre contro quell' esistenza un argomento decisivo.

Sezione VIII.

Sopra le terre oscure, o regioni di mezza tinta esistenti alla superficie di Marte.

254. Nel cap. III di questo lavoro abbiamo fatto menzione di alcuni spazî che spiccano in mezzo ai mari di Marte con tinta più chiara di questi e tuttavia notabilmente più oscura che quella delle terre vicine. Queste sono: prima la parte occidentale d'Ausonia co' suoi rami Enotria e Japigia ed il Golfo Triangolare che sta in mezzo: poi nel Mare Eritreo le terre di Noé, di Deucalione, di Pirra, di Proteo e di Ogige: da ultimo l'Atlantide II nel Mare Cimmerio, e fra il Cimmerio e il Tirreno la parte più stretta o il collo della penisola Esperia. Probabilmente bisogna aggiungere a questi l' estremità occidentale del Chersoneso fra il Golfo di Prometeo e l' Euripo, e l' estremità boreale del Promontorio d' Osiride fra il Nilo e la parte più larga del Nepente. Qual è la natura di questi spazî?

255. Se si riguardano le macchie di Marte come semplici colorazioni di un suolo solido, tale varietà di tinte non domanda alcuna particolare spiegazione. Il regno minerale, ed anche, volendo, il vegetale possono offrire tutte le gradazioni di

[1] *Proceedings of the Royal Society* vol. XII, p. 435.

tutti i colori possibili. Ma se noi supponiamo queste varietà di chiaroscuro come procedenti dalla presenza di strati liquidi, troveremo una spiegazione altrettanto naturale e forse più istruttiva dei fatti osservati. Noi non abbiamo a far altro, che riguardare la minore oscurità di tinta come il prodotto di un minore assorbimento dei raggi solari nella massa liquida: e allora gli spazî in questione prenderanno per noi il significato di banchi submarini o di bassi fondi.

256. Nelle sezioni VIII, IX, X, XI e XII del capitolo III io ho riferito le osservazioni, da cui emerge in modo indubitabile la tendenza che hanno le nebbie del Mare Eritreo ad occupare questi spazî di preferenza agli altri più oscuri. Ciò sembra indicare sui medesimi una temperatura diversa che sul mare circostante analogamente a quanto si osserva sui bassi fondi o banchi dei mari terrestri ([1]). Che che si voglia pensare di questo, l'influsso di quelle aree di mezza tinta sui processi meteorici dell'atmosfera sembra più facile a dichiarare nell'ipotesi dei bassi fondi, che col semplice fatto della diversa struttura di una superficie dappertutto solida. Che se, prendendo esempio dalla Terra, si volesse supporre quelle aree costituite da mare meno intensamente colorato, oppure da banchi di molluschi o di alghe, basterebbe citare l'istmo ombreggiato d'Esperia, per creare una grave difficoltà, o almeno la necessità di cercare per questo caso speciale una spiegazione diversa.

257. I fenomeni presentati dal collo o istmo d'Esperia sono sommamente istruttivi nella questione che ci occupa. La parte ombreggiata fa corpo, non vi ha dubbio alcuno, coi due tronchi illuminati che stanno alle estremità della penisola: essa giace appunto nel luogo più angusto, dove il Mare Tirreno ed il Cimmerio maggiormente si avvicinano l'uno all'altro. È quasi impossibile difendersi dall'impressione, che il dosso della penisola scenda dolcemente verso il mezzo di essa, lasciando adito ad una comunicazione superficiale fra i due mari. Qualunque altra ipotesi in confronto di questa sembra forzata e poco naturale. Ma vi ha di più.

258. Noi abbiamo citato più sopra varie osservazioni, dalle quali risulta, che l'istmo ombreggiato di Esperia diventa più oscuro, e si confonde coi mari contigui tutte le volte che oltrepassa un certo limite di distanza dal centro del disco (cap. III, sezione XX). Questo fatto è quasi inesplicabile quando l'ombra dell'istmo si voglia riguardare come un accidente superficiale del suolo solido della penisola: riceve invece la più naturale spiegazione supponendola proveniente dall'assorbimento della luce in uno strato liquido. Infatti crescendo l'obliquità della superficie rispetto al raggio visuale, cresce anche la lunghezza del cammino che i raggi solari devono fare nella massa liquida prima e dopo della loro riflessione sul fondo. Gli è come se il mare in quel luogo diventasse più profondo, e quindi l'assorbimento della luce diventa maggiore e la tinta più oscura. Questa è una confermazione non cercata dell'ipotesi da me adottata per spiegare le macchie oscure del pianeta.

259. Dove le terre oscure si attaccano a spazî luminosi il confine non è sempre eguale. Le Terre di Deucalione e di Pirra si staccano con una netta divisione,

([1]) « Seitdem namentlich Franklin den Gebrauch des Thermometers in der Schifffahrt empfahl, haben sich sehr viele Reisende von der Brauchbarkeit dieses Instrumentes bei der Erkennung weit ausgedehnter Sandbänke überzeugt ». Kaemtz, *Lehrbuch der Meteorologie*, vol. II, p. 114.

specialmente quest' ultima. Anche il distacco di Atlantide II sembra piuttosto preciso, sebbene non abbia potuto fare su quella località osservazioni abbastanza soddisfacenti. Dell' ombra di Esperia il limite australe sembra preciso, il boreale invece è molto sfumato. La gran penisola Ausonia poi sembra s' immerga per gradi quasi insensibili nella forte oscurità che termina la costa d'Aeria. Anche la punta del Chersoneso (per quanto ho potuto giudicare) si perde nel Mare Australe poco a poco. Invece la punta del Capo d' Osiride sebbene cresca di oscurità a misura che si va restringendo, termina tuttavia nettamente nella biforcazione molto nera del Nilo e del Nepente. Negli spazî interni la tinta varia con molta regolarità. Nella penisola di Deucalione essa sembra uguale per 40 e più gradi di longitudine. Se si prende l'oscurità come misura di profondità, abbiam qui livellazioni perfette, estese per spazî non minori di quelli che s' incontrano nella gran pianura dell'Europa orientale. Ed allora sembra naturale attribuir questo al lavoro delle acque o di quel liquido qualunque, di cui si suppongono formati i mari del pianeta.

260. Considerando le terre ombreggiate come regioni sommerse, si può formare anche qualche plausibile congettura sulla profondità dei mari che le coprono. Risulta infatti dalle esperienze fatte dal padre Secchi nel Mediterraneo, che un oggetto di dimensioni limitate non è più visibile a profondità maggiore di 60 metri, per quanto bianca si voglia supporre la superficie [1]. Sembra però, che la colorazione generale del fondo possa influire (sulla visione a grande distanza) anche da profondità maggiori, e non sarei alieno dal credere esatta l'osservazione fatta da De Tessan [2] circa l'influsso che eserciterebbe sul colore superficiale del mare (anche agitato) il banco delle Aguglie all'estremità australe dell' Africa, sebbene questo banco stia a 200 metri sotto il livello superficiale delle acque. In ogni caso quando si ammetta, che la trasparenza dei mari di Marte sia del medesimo ordine che quella dei nostri, si dovrebbe concludere, la profondità delle acque sopra i bassifondi esser molto piccola. Conclusione confermata benissimo dall' influsso indubitato che quei bassifondi hanno sulla formazione delle meteore atmosferiche. Così pure non molto grande può esser la profondità di tanti fra i canali di Marte, i quali, benchè larghissimi, si mostrano debolmente colorati. I più scuri che abbia visto, sono il Nilo, il Nepente ed il Tritone, i quali il 14 ottobre mi parvero di colore come di inchiostro di China assai forte e poco men che neri.

Sezione IX.

Del colore delle parti più luminose della superficie di Marte.

261. Quelle parti della superficie, alle quali si è dato il nome di *terre* o di *continenti,* sebbene siano per lo più distinguibili senza incertezza dai mari ed anche dalle terre sommerse, non son però tutte di ugual colore e di uguale splendore, anche astraendo, com'è ben naturale, dalla macchia polare. Circa il colore specifico non oso

(1) Queste esperienze sono riferite integralmente dal comm. Alessandro Cialdi nella sua opera *Sul moto ondoso del mare,* p. 258, 287.

(2) Cialdi, opera citata, pag. 248.

pronunziar nulla, prima perchè i vetri del nostro obbiettivo colorano i raggi in verde, secondo perchè il mio occhio essendo fortemente affetto da daltonismo, non distingue bene le gradazioni delle tinte rosse e verdi. L'aspetto generale del pianeta per me non fu quasi altro che quello di un chiaroscuro eseguito con inchiostro di China sopra un fondo generale luminoso di color mattone di cottura più o meno avanzata. Il Grande Diaframma forma, riguardo al colore, una linea di separazione molto notevole, ad ostro del medesimo le tinte essendo generalmente assai più cariche. Nella Tavola V ho cercato di dar qualche idea della cosa, ma convien pur confessare, che (per colpa mia, non dell'artista) quelle figure, per quanto concerne la colorazione, sono molto imperfette.

262. Riguardo al maggiore o minore splendore delle terre è difficile pronunziare qualche cosa di assoluto: perchè spesso sono coperte da veli più o meno densi, che ne accrescon la luce. Questi veli mi pare che si disciolgano o almeno diventino più rari quando il Sole culmina alla massima altezza sopra una data località; nel qual caso credo d'aver notato che lo splendore della regione considerata sia il minimo possibile, il suo colore meno bianco e più vicino a quello del mattone cotto. L'Ellade ha mostrato tali variazioni di colore a più riprese, come si è indicato a suo luogo. Anche tutta la zona delle terre equatoriali, che dal settembre al dicembre 1877 era sempre stata luminosissima (specialmente lungo il Grande Diaframma), nel febbraio e nel marzo 1878 riscaldò la sua tinta e nel medesimo tempo (salvo che nel centro di Chryse) affievolì la sua luce. Mentre l'Ellade in settembre e ottobre 1877 era sempre stata molto meno luminosa di Aeria, di Arabia e di Chryse, al principio di marzo 1878 la proporzione s'invertì nel modo più manifesto. Credo che di questo si possa assegnar ragione, notando, che al principio di marzo Aeria, Arabia e Chryse erano affatto scoperte da veli nebulosi, e lasciavan vedere tutti i loro canali: mentre in settembre ed in ottobre eran sepolte sotto un velo quasi impenetrabile, che nulla lasciava trapelare alla vista. Al contrario l'Ellade, che il 12 ottobre era scoperta al punto da lasciar vedere l'Alfeo onde è bipartita, più tardi apparve sempre come un disco brillante, talvolta luminoso al punto, da imitare la macchia nevosa: ciò che non so meglio spiegare, che coll'ammettere su di essa un forte velo di nebbia.

263. Si capisce, come tali vicende rendano quasi impossibile il dare alle diverse regioni la proporzione conveniente di tinta, anche astraendo dal colore. In generale nella Tavola V mi son attenuto alle proporzioni osservate nei mesi di settembre e di ottobre, diminuendo però la chiarezza della zona equatoriale, onde tener conto del suo vero stato quale si osservò in febbraio ed in marzo. Ma tutto questo è ancor meno che un tentativo grossolano. La vera colorazione di Marte dovrà esser oggetto di studî speciali per parte di osservatori più abili di me in questa materia, e non potrà esser ben conosciuta, se non quando si sapranno meglio apprezzare gli effetti delle variazioni apparenti prodotti dalle precipitazioni meteoriche. Raccomando specialmente lo studio della Memnonia, la cui chiarezza ho trovato eccezionale in qualunque circostanza, e quello delle regioni contigue al Lago Tritone, dove mi è parso scorgere un breve tratto non meno bianco che la neve polare (§ 161).

Sezione X.

Osservazioni sulla struttura del pianeta e sopra alcune notabili configurazioni esistenti alla sua superficie.

264. L'aspetto della carta annessa a questa Memoria offre alcune singolarità e parallelismi di struttura, che sembrano connessi colla formazione del pianeta. Forse non sarà ingrato ai geologi l'accennare qui i principali e più manifesti.

265. I. *La maggior parte delle terre è raccolta in una zona equatoriale continua,* la quale circonda tutto il pianeta senza interruzione di mari considerevoli. Tale zona è limitata al sud dal Grande Diaframma, il cui corso nel modo più preciso e conveniente si descrive partendo dalla Gran Sirte, e camminando lungo le coste d'Aeria, d'Arabia e di Chryse sull' Eritreo fino al Gange: di là contornando l'Aurea Cherso e Thaumasia, ed entrando per le Colonne d' Ercole nel Mare delle Sirene: ritornando pei lidi boreali di questo, del Mare Cimmerio e del Mar Tirreno fino alla Gran Sirte. In questo giro, s'intendono traversati gl'istmi settentrionali delle penisole di Deucalione, di Pirra, delle due Atlantidi e di Esperia. Il confine della zona equatoriale verso il nord non ha potuto essere descritto nella opposizione del 1877: però dalle osservazioni degli Astronomi precedenti sembra certo, che tal confine poco differisca dal 50° parallelo di latitudine boreale, e che anch' esso giri tutt' intorno al pianeta. La zona delle terre equatoriali dunque non è simmetrica rispetto all'equatore, ma giace più dalla parte del nord, ed i due bacini marittimi polari da essa separati sono molto disuguali.

266. II. *Nell' emisfero australe vi sono altre terre disposte in due zone parallele alla precedente.* La prima zona corre sotto le latitudini temperate, ed è formata dalle regioni dette Icaria, Fetontide, Elettride, Eridania, Ausonia (parte australe), Ellade, Noachide, Argyre e Terra d'Ogige: gira tutt'intorno al polo oscillando fra il 30° e il 60° parallelo con una sola interruzione notabile di 40° di longitudine di contro a Thaumasia. Quest' ultima regione si può dire che appartenga tanto a questa, quanto alla zona equatoriale. Altra interruzione di minor importanza è formata dall'Ellesponto, seppure non vi è in quel luogo un basso fondo, che ne occupa la maggior parte (§ 182). Pare che a questa zona ne corrisponda un' altra simmetrica nell' emisfero boreale, ma di questo non posso parlare *de visu.* La seconda zona delle terre australi non si estende che per 120° di longitudine ed è formata dalle due isole di Thyle, con un' interruzione nello stretto d' Ulisse. Fra questa e la precedente il Mare Cronio forma una zona di mare e una divisione completa.

267. III. *Fra la zona equatoriale e quella delle latitudini temperate australi corre una serie di mari interni interrotti da lunghe penisole continentali o subacquee tutte inclinate nella direzione da nord-ovest a sud-est.* Questa singolarità è una di quelle che più colpiscono nella carta di Marte. I mari interni sono: l'Adriatico, il Tirreno, il Cimmerio, il Mare delle Sirene, il Lago del Sole e della Fenice, poi i tre sfondi dell' Eritreo, cioè il Golfo dell' Aurora, il Golfo delle Perle ed il Golfo Sabeo: ai quali per complemento si può aggiungere ancora il *Deltoton* o Golfo Triangolare. Le penisole, tutte obbedienti alla medesima direzione generale sono: la parte

media e boreale d'Ausonia, coi suoi due rami, Enotria e Japigia: quindi Esperia, Atlantide II e Atlantide I. Poi (oltrepassata l'irregolarità di distribuzione dipendente da Thaumasia) di nuovo abbiamo l'Aurea Cherso, della quale forse la Terra di Proteo è un'appendice: la penisola di Pirra e quella di Deucalione. Come si vede, la presenza del Mare Eritreo non disturba per nulla questa legge di formazione, la quale, quanto alla direzione delle penisole è violata apparentemente solo dove giace la regione Thaumasia. Queste lingue di terra sono o intieramente, o in parte sottomarine: non vi è che una eccezione, Atlantide I, la quale però potrebbe anche non esser tale in modo assoluto (§ 124). È notabile, che la direzione in cui giacciono tutte queste penisole è quella che acquisterebbero i venti alisei e le correnti marine in quella regione dipendentemente dalla rotazione del pianeta. Non è dunque impossibile, che tutto questo frastaglio sia un lavoro delle mare e dell'atmosfera, e le penisole, depositi di lenta e graduale formazione, o residui d'un lavoro di corrosione.

268. IV. *Dove le anzidette penisole si attaccano alle due zone continentali esse son fiancheggiate dalle bocche di ampî canali che traversano le zone medesime.* Se noi percorriamo le connessioni di tutte le penisole colla zona equatoriale, troviamo, che la penisola di Deucalione è fiancheggiata dal Gehon e dall'Indo; quella di Pirra, dall'Idaspe e dal Gange: l'Aurea Cherso dall'emissario della Fontana di Gioventù e dall'Agatodemone: l'Atlantide I dal fiume dei Titani e da quello dei Lestrigoni: l'Atlantide II dal fiume dei Lestrigoni e da quello dei Ciclopi: Esperia, dal fiume degli Etiopi e dal Lete. L'attacco boreale di Ausonia con Åeria è imperfetto, e qui la legge è imperfettamente osservata, o almeno non manifestamente. La legge vale anche per le connessioni delle penisole colla zona delle terre temperate australi, per i casi dove tali connessioni esistono. L'Atlantide I sta fra le Colonne d'Ercole e il Simoe: l'Atlantide II fra il Simoe e lo Scamandro: Esperia, fra lo Scamandro e lo Xanto, l'Ausonia australe, fra lo Xanto e l'Euripo. Questi fatti non sembrano privi d'importanza: essi confermerebbero il sospetto che tutte quelle penisole siano in un modo o in un altro lavoro delle acque.

269. V. *I canali, da cui le due zone, equatoriale e temperata australe, sono traversati, giacciono in gran parte secondo il meridiano.* Questo fatto potrebbe sembrare una pura conseguenza dell'allungarsi di queste zone lungo il parallelo. Però esso si mantiene anche in casi, in cui una direzione inclinata sarebbe più naturale, per es. nel fiume dei Lestrigoni, e dei Ciclopi e dei Titani. Singolare poi al tutto è la direzione esattamente meridiana dell'Alfeo che divide l'Ellade, sebbene in quel caso nulla sembri domandare quella direzione piuttosto che qualunque altra.

270. VI. *La zona equatoriale è suddivisa in altre zone da lunghissimi canali giacenti nella direzione del parallelo.* Questi canali, che sono il Nilo, l'Oceano e l'Eunosto, formano una cintura completa intorno al globo di Marte, in generale però più prossima al polo boreale, che al polo australe del pianeta. Essi variano molto di larghezza e a quanto pare anche di profondità. Sarà da esaminar più tardi con qual convenienza si possano riguardare come una serie di mari interni analoghi a quelli che furono descritti qui sopra, § 267. Nell'opposizione del 1877 non si è potuto osservarli abbastanza bene per decidere se in essi vi sia qualche soluzione di continuità.

271. VII. *Non esistono in Marte grandi masse continentali continue: ma tutta la superficie asciutta del pianeta è divisa da molti canali in un numero stragrande d'isole.* Questa singolare ed inaspettata disposizione dei mari e dei continenti di Marte, così diversa da ciò che si vede sulla Terra, risulta evidente dal semplice aspetto della carta. Ma non si deve credere, che la rete dei canali in questa delineati sia completa. Anzi essa non comprende che le linee più grosse e più facili a vedere in tanta distanza. Già ho avuto occasione d'indicare, che quanche volta i canali sembrano allargarsi e perdersi in sfumature quasi impercettibili, fenomeno che nel modo più naturale sembra spiegato coll'ammettere suddivisioni dei canali maggiori in un numero più o men grande di altri minori, troppo sottili per esser visibili uno ad uno. Ma vi ha ancora altro. Durante il corso delle mie osservazioni in ottobre 1877 mi è avvenuto due o tre volte di aver momenti brevissimi di quiete atmosferica assoluta o poco men che tale. In queste circostanze pareva che ad un tratto un denso velo si levasse dalla superficie del pianeta, la quale appariva come un complicato ricamo a più colori. Ma tale era la piccolezza di quei particolari, e così fuggevole la durata di tale stato di cose, che non era neppur possibile formarsi una coscienza ben chiara e certa delle cose vedute, e rimaneva solo l'impressione confusa di una fitta rete, di linee sottili, e di minute macchie. Una simile osservazione si trova anche presso Secchi, in data del 29 giugno 1858. « Marte è tutto rosso, e solo leggermente sparso qua e là di macchiette gialle, rosse, e cupe, che formano una specie di variegato difficilissimo a descriversi e che non dà presa alla fantasia [1] ». Tali osservazioni conducono a credere, che sia dei canali di Marte come dei solchi della Luna, il cui numero cresce a misura che si aumenta il potere ottico e l'attenzione degli osservatori. In Marte dunque la separazione del liquido e del solido non è così grande e perfetta, come sulla Terra. Sono le sue isole banchi pochissimo emergenti da un vasto impaludamento, oppure scogli divisi da un sistema di fessure della crosta? L'una e l'altra supposizione è per ora egualmente plausibile: ma forse non è lontano il tempo, in cui anche a questioni di tal fatta si potrà dare sufficiente risposta.

272. I grandi sollevamenti e le grandi depressioni della Terra sono attribuite dai geologi alle forze interiori della sua massa, che non sembrano ancora del tutto esaurite, e sono principalmente effetto o trasformazione del calore interno del nostro pianeta. Se noi ammettiamo con Laplace che i pianeti siansi formati per condensazione o per agglomerazione consecutiva di parti primitivamente distribuite sopra un grandissimo spazio, sarà facile, dietro i principî della teoria meccanica del calore, trovare di quanto la temperatura di quella materia ha dovuto elevarsi pel fatto della condensazione. Questo calore di condensazione fu calcolato da Helmholtz pel Sole in 28 milioni di gradi centesimali. Per la Terra trovo, dietro gli stessi principî, 8988°: e per Marte 1995° [2]. Tutte le altre circostanze essendo uguali, il calore interno di

(1) *Memorie dell' oss. del Collegio Romano*, vol. I, pag. 22.

(2) Questo calcolo è fatto sull'espressione conosciuta $\frac{3}{5}\,\frac{M}{\mu}\cdot\frac{1}{425}\,\frac{\rho^2}{R}$ dove M R son la massa e il raggio di Marte (o dell'astro per cui si fa il calcolo), μ, ρ le stesse quantità per la Terra. Si suppone che il calore specifico della massa sia costante ed uguale a quello dell'acqua, e che l'equivalente meccanico del calore sia di 425 chilogrammetri. L'unità delle lunghezze è naturalmente il metro.

Marte dovrebbe esser molto minore che quello della Terra. Se a questo si aggiunge che secondo l'ipotesi di formazione Marte dovrebbe esser più antico della Terra, e quindi aver subìto un periodo più lungo di raffreddamento: che, il suo volume essendo tanto minore, il suo raffreddamento ha dovuto esser tanto più rapido: non sembrerà irragionevole congetturare, che esso si trovi più che la Terra progredito verso il periodo dell'assoluta impotenza delle forze interiori e dell'esclusivo predominio delle forze livellatrici della sua atmosfera e de' suoi mari.

273. Qualunque sia il peso (per ora ad ogni modo non molto grande) che si voglia dare a queste speculazioni, una cosa è manifesta: l'importanza, che lo studio accurato della superficie di Marte ha non solo per la storia delle formazioni planetarie, ma anche per la geologia terrestre. La Luna è un corpo troppo diverso dalla Terra, per potere dal suo studio ricavare molto frutto per la storia del nostro pianeta. Sotto questo riguardo Marte è di gran lunga più promettente. Non solo la geologia, ma anche la meteorologia terrestre potrà ricavar molto lume dallo studio di questo pianeta. In altro luogo ho mostrato come da esso si possa aspettare un giudizio poco meno che definitivo sulle novelle ipotesi ideate da Croll e da altri per ispiegare i periodi glaciali per mezzo delle variazioni dell' eccentricità dell' orbita terrestre. Sopra le nevi polari di Marte, come si è veduto, noi sappiamo già molte cose, che invano desideriamo di conoscere per le croste glaciali che circondano i poli della Terra. E sebbene il sistema generale di meteorazione atmosferica in Marte sembri diverso da quello che è in vigore presso di noi (§ 243), non si può dubitare che la possibilità di comprendere qui in un colpo d'occhio ciò, che sulla Terra domanda il concorso di tanti uomini e di tanti telegrafi, potrà illuminare le questioni relative alla nostra meteorologia, come due esempî paralleli di un medesimo problema si rischiarano l'un l'altro, quand'anche non riguardino dati uguali e circostanze esattamente identiche.

Sezione XI.

Del limite di visibilità degli oggetti minuti sul pianeta Marte.

274. Terminerò questa Memoria col dimostrare che i vantaggi accennati nel paragrafo antecedente come conseguenza di uno studio continuo ed accurato del pianeta si possono ottenere realmente in misura molto maggiore di quello che si sia sperato finora, purchè all'esplorazione del pianeta si consacrino mezzi adeguati e soprattutto la necessaria perseveranza. Fino a qual limite di grandezza si potrà sperare di vedere distintamente oggetti collocati sulla superficie di Marte? Di tale importante quistione esaminerò colla scorta dell'esperienza da me guadagnata quattro casi: cioè il limite di visibilità: 1° di una macchia luminosa sopra fondo oscuro; 2° di una macchia oscura sopra fondo luminoso; 3° di una linea luminosa sopra fondo oscuro; 4° di una linea oscura sopra fondo luminoso.

275. A. *Macchia luminosa sopra fondo oscuro.* Non conosco sopra Marte alcuna isola abbastanza minuta, che si presti ad osservazioni di questa fatta. La seguente è ancora molto lontana dal limite. Il 26 febbraio 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 5″,82 vidi presso il lembo del pianeta l'Isola d'Argyre sotto forma d'un

ellisse luminosa allungata. Dalla carta rilevo, che il diametro maggiore di questa ellisse poteva essere di 15° di circolo massimo, il minore forse la metà. In secondi angolari sarebbero 0″,77 e 0″,38. Pare dunque, che una macchia luminosa od isola rotonda di 0″,50 di diametro non dovrebbe offrir difficoltà, anche projettandosi sopra un mare molto debolmente colorato, com'era l'Eritreo nel nostro caso. Ma è certo, che con un contrasto maggiore di luce e d'ombra sarebbe visibile anche una macchia sottendente un angolo assai minore.

276. B. *Macchia oscura sopra fondo luminoso.*

Osservazione I. Il 2 ottobre 1877 scoprii le due piccolissime macchie oscure dette sulla carta Fonte del Nettare e Fonte di Gioventù. Mi parvero rotonde, ma tanto eran piccole, che sulla loro forma non ho osato pronunziare con certezza. Stando ai disegni fatti il diametro di ambedue non superava $\frac{1}{8}$ della loro reciproca distanza, la quale stimai esser $\frac{1}{5}$ del diametro del disco, cioè di 21″,2. Ne risulta pei diametri della 2 piccole macchie 0″,53. Ambedue spiccavano con molta nerezza sul fondo luminoso circostante.

Osservazione II. Il 14 ottobre 1877 scoprii senza alcuna difficoltà il Lago Meride e potei anche accertare che la sua forma tende ad imitare quella di un quadrato. Dagli schizzi che ne ho fatto risulterebbe, il suo lato essere la quinta parte della distanza fra il Lago Tritone e il Nilo presso la foce del Nepente: distanza che sulla carta è 20°. Essendo in quel giorno il diametro del disco 18″,8, ne concludo per il lato del quadrato formante il Lago Meride 0″,65. È dunque possibile distinguere ancora *la forma* di una macchia oscura di questa grandezza sopra un fondo luminoso. Qui i limiti erano ben precisi e il contrasto di luce e d'ombra molto forte.

Osservazione III. Il 21 febbraio 1878, essendo il diametro apparente del disco ridotto a 6″,00 vidi benissimo il Lago del Sole a poca distanza dal centro del disco, e mi parve, che l'avrei veduto ancora quando fosse stato alquanto più piccolo: potei ad ogni modo distinguere perfettamente la sua rotondità. Supponendone il diametro di 11°, se ne conclude per larghezza apparente al tempo dell'osservazione 0″,58. La tinta non era molto scura ed il contrasto col fondo circostante non molto forte.

Osservazione IV. Lo stesso Lago del Sole, in una posizione anche non molto centrale, fu veduto da me distintamente il 21 marzo 1878, coll'Eosforo suo emissario. In quel giorno il diametro apparente del disco era di 5″,2: il Lago del Sole sottendeva dunque col suo diametro apparente maggiore 0″,50 appunto, e col suo diametro apparente minore anche un po' meno.

Conclusione. Il risultato generale di queste osservazioni è, che in condizioni favorevoli si può vedere in Marte una macchia oscura su fondo chiaro senza difficoltà, quando il diametro apparente della medesima sottenda 0″,50. Un diametro un po' maggiore (0″,60) permette anche di distinguere qualche cosa della figura delle macchie.

277. C. *Linee luminose sopra fondo oscuro.*

Osservazione I. Il 4 febbraio 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 6″,67 non solo vidi benissimo lo stretto collo della penisola Esperia, ma potei accertarmi che esisteva ancora sovr'esso la medesima ombra, che vi aveva notato tante altre

volte. La larghezza di quel collo non può stimarsi a più di 8° e l'arco da esso occupato nell'occhio dell'osservatore non arrivava certamente a 0",50. Questo caso è notabile così pel debole contrasto, come ancora per la possibilità di distinguere in sì piccolo spazio una diversità di tinte.

Osservazione II. Il 7 febbraio 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 6",54 mi apparve l'Atlantide I « con una strana evidenza ». La larghezza di questa penisola non arriva in nessun luogo a 5°. Quindi nel tempo di quella osservazione essa sottendeva nell'occhio certamente meno di 0",28.

Osservazione III. Il 5 marzo 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 5",60 vidi benissimo la penisola di Deucalione distinta fra gli spazî più oscuri del Golfo Sabeo e del Golfo delle Perle che la fiancheggiano. Mettendo 10° per la larghezza della parte considerata, ne concludo la larghezza apparente 0",49. Caso notabilissimo pel poco contrasto di tinte.

Osservazione IV. Il 12 marzo 1878, essendo il diametro del disco ridotto a 5",40 vidi tutta Esperia, ma l'ombra sul collo non era più discernibile. Ammettendo come sopra 8° per la larghezza minima della penisola, essa rimaneva ancor visibile sotto un angolo di 0",37.

Conclusione. Dall'insieme di queste osservazioni appare, che una linea luminosa si può benissimo ancora distinguere su fondo oscuro quando la larghezza arrivi a $\frac{1}{3}$ di secondo: una larghezza di $\frac{1}{2}$ secondo permette di distinguerla anche quando si tratti di contrasti molto deboli.

278. D. *Linee oscure sopra fondo luminoso.*

Osservazione I. Il 12 ottobre 1877, essendo il diametro del disco 19",41 vidi molto chiaramente la divisione dell'Ellade in due parti; e la linea oscura dividente (che sulla carta è chiamata fiume Alfeo) stando allo schizzo fatto in grande scala, non eccedeva $\frac{1}{15}$ del diametro dell'Ellade stessa. Sulla carta questo diametro prende 27°,4 di circolo massimo. L'Alfeo avrebbe dunque la larghezza reale di 1°,83. Se ne deduce per la larghezza apparente nel tempo dell'osservazione 0",31. Il contrasto era poco sensibile e la linea poco oscura, forse per l'inevitabile diffusione del contorno.

Osservazione II. Il 14 ottobre delineai come striscia oscura e forte il fiume Nepente, la cui larghezza certo non era più che un terzo di quella del Lago Meride. Dal calcolo qui sopra esposto sul Lago Meride (§ 276) risulta per la larghezza apparente del Nepente 0",22. Qui il contrasto fra la luce e l'ombra era fortissimo.

Osservazione III. Il 21 ottobre 1877, essendo il diametro apparente del disco 17",52 scoprii il fiume Simoe fra l'Elettride e la Fetontide, e potei distinguere benissimo che era curvato in foggia di arco poco meno che semicircolare. Dallo schizzo fatto pare che non si possa mettere la sua larghezza a più di $\frac{1}{6}$ della lunghezza, e questa prende sulla carta circa 12°. Il Simoe ha dunque 2° di larghezza, i quali in quel giorno e in quella posizione sottendevano nell'occhio dell'osservatore 0",31. La linea era visibile con tutta nettezza e senza la minima difficoltà.

Osservazione IV. Il 13 marzo 1878 essendo il diametro apparente del disco ridotto a 5″,37 vidi distintamente il fiume dei Ciclopi, e meno chiaramente, ma tuttavia con bastevole certezza il fiume degli Etiopi, l'uno e l'altro presso la foce nel Mare Cimmerio. A nessuno dei due è possibile assegnare una larghezza maggiore di 5°. Ciò sottendeva in quel momento 0″,23, e furono visibili quei fiumi come due linee parallele di grossezza probabilmente minore di questa.

Conclusione. Sono dunque ben visibili filetti oscuri sulle terre luminose di Marte quando la loro larghezza apparente giunge a $\frac{1}{4}$ di secondo. La larghezza di $\frac{1}{3}$ è sufficiente nel caso di contrasto poco sentito.

279. *Conclusione generale.* Ove noi ammettiamo, che con un istrumento uguale al nostro Equatoriale di Merz si possa investigare la superficie di Marte in ottime condizioni d'atmosfera, quando il suo disco arriva a 25″ di diametro apparente: risulterà che una macchia luminosa su fondo oscuro, od oscura su fondo luminoso sarà visibile senza troppa difficoltà, quando ad un discreto contrasto di tinta si congiunga un diametro reale uguale ad $\frac{1}{50}$ di quello del pianeta (137 chilometri). Epperciò usando sufficiente diligenza si potranno scoprire in Marte (almeno nelle parti non troppo vicine al polo boreale) tutte le isole non minori della Sicilia, e tutti i laghi non minori del Ladoga e dello Tsad. Isole come l'Islanda e Ceylan, laghi come quello d'Aral e il Victoria Nyanza devono essere oggetti molto cospicui. Similmente una striscia luminosa su fondo oscuro od oscura su fondo luminoso dovrà essere ancora visibile, quando la sua larghezza non sia meno di $\frac{1}{100}$ del diametro del pianeta (70 chilometri circa). Quindi lingue di terra od isola come la Jutlandia e Cuba e l'istmo centrale Americano: stretti o laghi come il Tanganyika, il Nyassa, il Mar Vermiglio devono esser distinguibili, usando qualche attenzione. Facilissimi dovrebbero essere oggetti come l'Italia, l'Adriatico, il Mar Rosso, Sumatra e Nippon.

280. Tali limiti di visibilità s' intendono riferiti a quanto si può ottenere da un obbiettivo di 218 millimetri d'apertura come il nostro. Evidentemente l'ostacolo invincibile che qui pone termini impreteribili è la diffusione dei contorni proveniente dalla diffrazione. Tale diffusione fa sì che le linee più sottili sono allargate in strisce gradatamente decrescenti d' intensità d' ambo i lati, per il che il contrasto col fondo viene grandemente diminuito: l'occhio non afferra più quelle forme che con isforzo, e la visione diviene penosa ed incerta. A questo si rimedia soltanto col crescere l'apertura dell' obbiettivo, siccome è noto. Le conseguenze indicate nel paragrafo precedente danno dunque soltanto un limite *inferiore* di quanto è possibile ottenere nell' esame di Marte e non vi ha dubbio che questo limite sarà presto oltrepassato quando a tale esame si consacri la potenza di alcuno dei giganteschi Refrattori, che gli ottici negli ultimi anni hanno imparato a costruire.

INDICE DELLE MATERIE

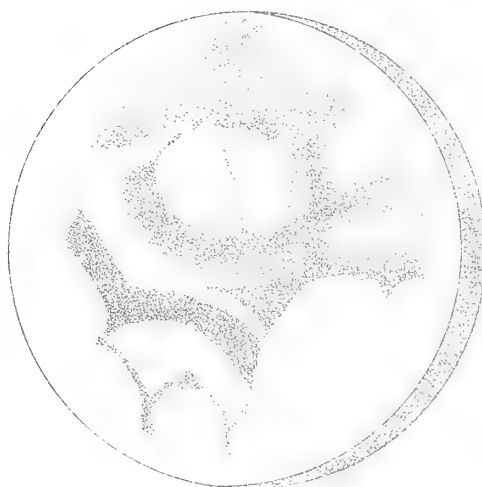
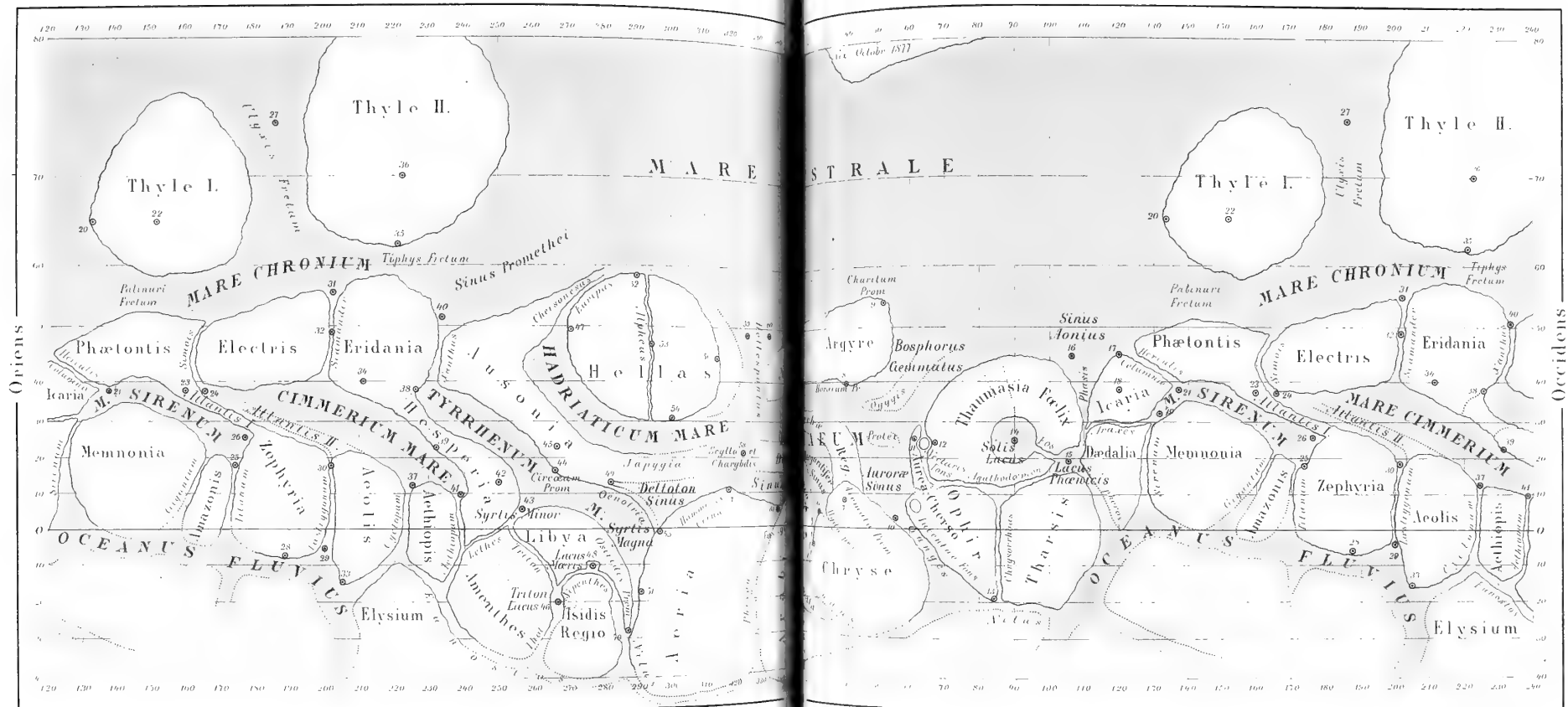
Fig. 1.
N
H
K
A
B
O
Fig. 2.
H
N
K
A
B
O
Fig. 3.
151°
154°
Fig. 4.
P
M
M'
P'
Fig. 5
B
m
P
r
S
Q
O
N
R
A
Fig. 6.
S
P
T
I
M
Q
O
N
Fig. 8.
S
R
P
I
L
M
X
O
Z
K
N
Fig. 7.
R
S
P
M
U
V
H
I
O
N
K
Fig. 9.
X
L
S
Y
P
H
N
K
O
C
R
T
Fig 10.
B
C
A
a
b
B'
A'
a'
b'

XX.
2 Ottobre
$\omega = 18°$ $\delta = -24°$

XVII.
26 Settembre
$\omega = 85°$ $\delta = -23°$

XIII.
18 Settembre
$\omega = 181°$ $\delta = -23°$

XXV.
14 Ottobre
$\omega = 298°$ $\delta = -25°$

686 Milano, Lit. A. Moldenhauer.

MAPPA

Exhibens Planetæ Martis Chorogra

Ex propriis Observationibus tq

in Specula B

composuit, supputavit

...PHICA

...m *Australem et Parallelum 40^{um}*

...l;

...Tubi Merziani decempedalis

...i habitis

J.V. Schiaparelli

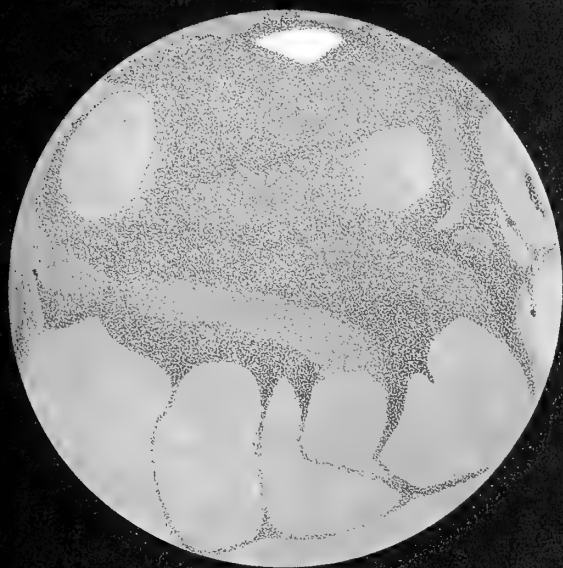
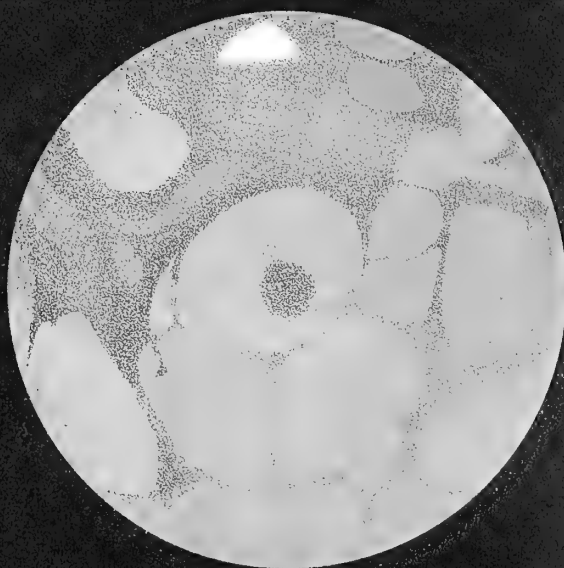
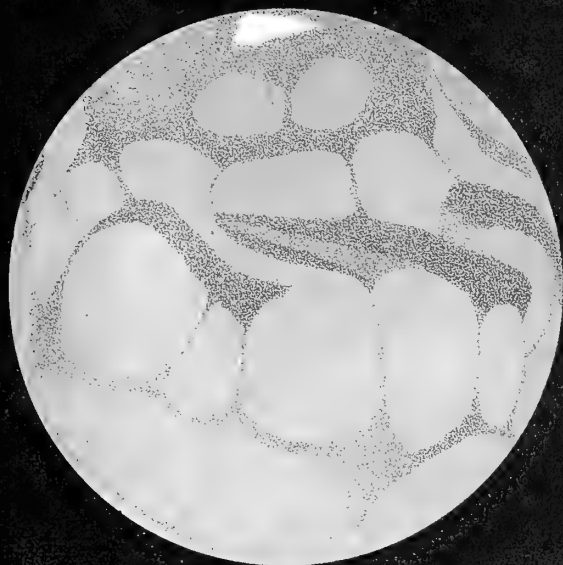
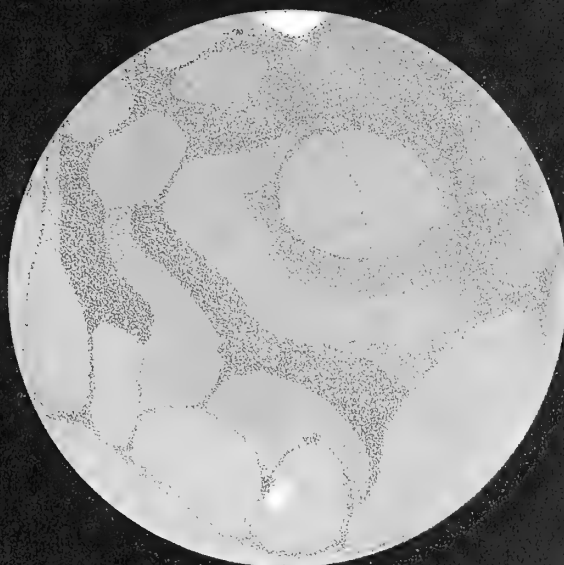
Tab. IIII.

Hemisphærium Martis Australe

stereographice descriptum.

MARTE

secondo le osservazioni fatte col Tubo Equatoriale della Specola di Brera Settembre 1877_Marzo 1878.

I. ω = 0° II. ω = 90°

III. ω = 180° IV. ω = 270°

Questi disegni sono projezioni ortografiche col centro nella longitudine areografica di 0°, 90°, 180° e 270°
e nella latitudine areografica australe di 25°.

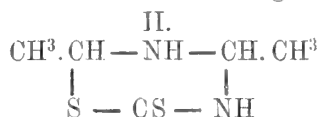
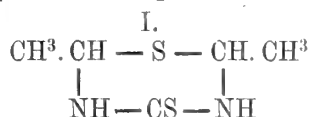
Sulla Carbotialdina ed altri composti solforati.

Nota del prof. ICILIO GUARESCHI

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia

nella seduta del 7 aprile 1878.

La carbotialdina $C^5H^{10}N^2S^2$ fu scoperta da Redtenbacher e Liebig (1848) che l'ottennero per l'azione del solfuro di carbonio sull'ammonialdeide. Intorno alla costituzione di questa sostanza si sa ben poco, ma ciononostante furono proposte diverse formole più o meno ipotetiche. Erlenmeyer [1] diede le due formole seguenti:

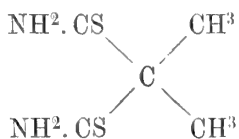
$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & \qquad & \text{II.} \\ \begin{array}{l} CH^3.CH - S - CH.CH^3 \\ \quad | \qquad\qquad\quad | \\ \quad NH - CS - NH \end{array} & \qquad & \begin{array}{l} CH^3.CH - NH - CH.CH^3 \\ \quad | \qquad\qquad\qquad | \\ \quad S - CS - NH \end{array} \end{array}$$

Formole queste simili a quella colla quale lo stesso autore rappresenta la tialdina.

La prima di queste formole, secondo la quale la carbotialdina sarebbe una solfurea composta, è ammessa anche da Claus [2] principalmente perchè col cloruro mercurico la carbotialdina fornisce: solfuro mercurico, aldeide, cloruro d'ammonio, acido cloridrico ed acido solfocianico. Ma questo modo di decomposizione col cloruro mercurico può spiegarsi tanto colla formola I quanto coll'altra II, sia anche colla formola di Mulder.

La formola II di Erlenmeyer è accettata da Wislicenus [3].

Nel 1868, E. Mulder [4] per l'azione dell'aldeide sul solfocarbamato d'ammonio ottenne il *solfocarbamato di dietilidene* che considerò come identico alla carbotialdina di Redtenbacher e Liebig; egli rappresentò quindi la carbotialdina colla formola:

$$CS.NH^2.SN(CH.CH^3)^2$$

Finalmente, per rendere meno imperfetto questo cenno storico, dirò che Hlasiwetz e Kachler [5], non so per quali ragioni, diedero alla carbotialdina la formola:

Lascio di trascrivere le formole, di Weltzien e d'altri.

[1] *Lehr. d. org. Chem.* 1867, pag. 309.
[2] Berichte d. deut. Chem. Gesell. 1872, Vol. V, pag. 363.
[3] Strecker-Wislicenus, *Lehr. dorg. Chem.* pag. 421.
[4] Zeitsch. f. Chem. 1868, Vol. IV, pag. 377.
[5] Jahrs. 1873, p. 774, e Gaz. chim. it. 1872, pag. 457.

Tutte queste formole, eccetto quella di E. Mulder, non hanno, a mio avviso, alcun fatto decisivo in loro appoggio; anzi quella di Hlasiwetz e Kachler, nella quale si ammette la catena tricarbonica $= C \begin{matrix} / CH^3 \\ \backslash CH^3 \end{matrix}$, come se la carbotialdina derivasse, per esempio, dall' acetone, non ha nessun grado di probabilità.

Le esperienze che io ho fatto sulla carbotialdina mi autorizzano ad ammettere con quasi sicurezza la formola di Mulder, che era caduta affatto in dimenticanza; tutte le reazioni già conosciute della carbotialdina, specialmente quelle che io ora descriverò, si spiegano assai bene colla suddetta formola, mentre sono in contraddizione con tutte le altre accennate.

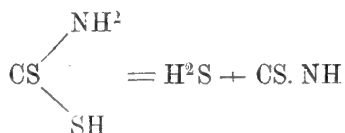
La carbotialdina sospesa nell' acqua e trattata con permanganato potassico si ossida all' istante con sviluppo di calore.

5 gr. di carbotialdina pura sospesi in circa 250^{cc} d'acqua fredda furono trattati con 24 a 25 gr. di permanganato di potassio in 450^{cc} circa d'acqua; il permanganato fu aggiunto a poco per volta sino a che cessasse lo scoloramento. Anzi procurai che restasse un lieve accesso di carbotialdina. Si sviluppò odore d'aldeide prima, e poi intenso l'odore d'acido cianidrico. Compiuta l'ossidazione filtrai il liquido incoloro, che era lievemente acido. Il liquido aveva odore d'acido cianidrico e dava intensa reazione di cianuri coi sali ferroso-ferrici. Cogli acidi sviluppa anidride carbonica. Aggiunsi alcune goccie di potassa sino a rendere lievissimamente alcalino il liquido ed evaporai. Il liquido, quando fu molto concentrato, diede per raffreddamento de' bei cristalli di solfato potassico, che separai. Trattai il liquido con lieve eccesso di idrato di bario per precipitare gli acidi solforico e carbonico. Filtrai e feci passare attraverso al liquido una corrente d'anidride carbonica, ed il liquido evaporato quasi a secco fu esaurito con alcool assoluto. Per evaporazione, l'alcool lasciò un notevole residuo di *acetato di potassio.*

La parte insolubile nell' alcool fu neutralizzata con acido acetico e lo sciolto, neutro, non diede alcun precipitato coll' alcool assoluto come nel caso della tialdina e della solfaldeide, trattate in ugual modo (v. più innanzi). Non riscontrai traccia alcuna di materia solforata; tutto lo solfo fu trasformato in acido solforico.

Come dirò più innanzi, la tialdina e la solfaldeide che contengono dello solfo unito al carbonio del gruppo etilidenico, danno nelle stesse condizioni il sale di potassio di un acido $C^2H^4S^2O^6H^2$.

La formazione d'acido cianidrico, che ho osservato spesse volte, benchè in alcuni casi esperimentando su piccole quantità non abbia potuto riscontrarlo, si spiega facilmente sapendosi che l'acido solfocarbamico si decompone prontamente in acido solfidrico ed acido solfocianico:

$$CS \begin{matrix} / NH^2 \\ \backslash SH \end{matrix} = H^2S + CS.NH$$

e che i solfocianati in soluzione acida col permanganato potassico, danno dell'acido cianidrico e dell'acido solforico (Péan de Saint-Gilles):

$$CS.NH + O^3 + H^2O = CNH + H^2SO^4$$

La carbotialdina con acqua a freddo e poi col cloruro ferrico non si colora in rosso, od appena appena, ma dopo poco tempo si rende manifesto il color rosso del solfocianato che scompare poi per dar luogo ad un precipitato lattiginoso, ed il liquido si colora in rosso intenso se si aggiunge dell'altro cloruro ferrico.

Se si fa bollire con acqua la carbotialdina, si raffredda il liquido e trattasi con cloruro ferrico si ottiene un precipitato di solfuro ferrico; scaldando si sviluppa dal liquido odore d'aglio.

Se dopo aggiunto del cloruro ferrico alla carbotialdina sospesa nell'acqua fredda, si scalda anche lievemente, si ha subito intensissimo il color rosso del solfocianato ferrico.

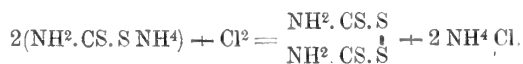
La *solfurea* e la *difenilsolfurea* scaldate, anche all'ebullizione per lungo tempo, con acqua e cloruro ferrico non danno la reazione dei solfocianati, ma bensì dello solfo e sale ferroso.

Questi fatti sono contrarî all'opinione di Claus, che cioè la carbotialdina sia una solfurea composta. La dietilidensolfurea $(CH^3.CH)^2H^2N^2.CS$ per l'azione dell'acido cloridrico si decompone in cloruro d'ammonio, aldeide e solfurea (Nencki 1875) ed in modo analogo dovrebbe decomporsi la carbotialdina se fosse una solfurea contenente $(CH^3.CH)^2S$ come ammette Claus; invece sappiamo che la carbotialdina dà cloruro d'ammonio, aldeide e solfuro di carbonio (Redtenbacher e Liebig).

Ma il fatto più importante e decisivo, che a mio avviso non può lasciar dubbio intorno alla natura della carbotialdina, si è la facilità con la quale questa sostanza si trasforma in *bisolfuro solfocarbamico* $C^2H^4N^2S^4$; composto questo che sotto il nome di *idranzotina* o *bisolfidrato cianico* fu descritto assai bene nel 1843 da Zeise [1]; si ottiene per l'azione del cloro o dell'acido cloridrico e cloruro ferrico sul solfocarbamato d'ammonio. Io l'ho ottenuto assai puro ed in piccoli cristalli, dalla carbotialdina coll'acido cloridrico e cloruro ferrico.

La carbotialdina sospesa in poca acqua e poi sciolta in un eccesso d'acido cloridrico diluito con egual volume d'acqua, fu trattata con soluzione di cloruro ferrico; il liquido rossastro e limpido lasciato a sè, incominciò dopo alcuni minuti a deporre una materia polverulenta, cristallina, bianca, e a decolorarsi alquanto. Dopo alcune

(1) Berzelius, *Rapp. annuel* 1844, p. 51-54. Non è forse privo d'interesse storico, notare, che Zeise già nel 1843 considerò questa sostanza come un'amide del solfuro di carbonio $H^4N^2(CS^2)^2$. Anche Gerhardt nel 1853 (*Traité*, I, p. 203) rappresentò questo composto con $\left.\begin{matrix} NH^2.CS.S \\ NH^2.CS.S \end{matrix}\right\}$, e Boutlerow nel 1863 (*Lehr. org. Chem.* pag. 587) ne rappresentò la formazione coll'equazione usata anche oggi:

$$2(NH^2.CS.S\,NH^4) + Cl^2 = \begin{matrix} NH^2.CS.S \\ | \\ NH^2.CS.S \end{matrix} + 2\,NH^4Cl.$$

Questa formola fu riprodotta poi nel 1872 da Hlasiwetz e Kachler.

ore filtrai il liquido ancora rossastro, contenente del sale ferroso e che ha odore ben manifesto d'aldeide, e raccolsi la sostanza bianca o appena giallognola, che lavai bene con acqua fredda. Il liquido filtrato, dopo alcuni giorni continuò a deporre altra sostanza identica, ma colorata in giallo. Per ottenere più bello il composto sopraccennato è utile sciogliere la carbotialdina in un grand' eccesso d'acido cloridrico ed aggiungere il percloruro di ferro a poco per volta, facendo in modo che il liquido resti di un color giallo-ranciato appena, ma non rosso; si deve agitare vivamente e poco dopo si separa la sostanza cristallizzata nella proporzione del 70 % circa della quantità teorica. Dopo alcuni tentativi la sua preparazione riesce assai facilmente.

Questo corpo si dimostra al microscopio cristallizzato, alle volte in lamelle a losanga simili ai cristalli d'acido urico ed alle volte in cristalli prismatici che hanno l'aspetto del fosfato ammonico-magnesico. È insolubile nell'acqua anche a caldo, ma solubile nell'alcool e nell'etere. L'acqua bollente lo decompone formando del solfocianato ammonico, dello solfo e solfuro di carbonio. Per riscaldamento non fonde, ma si scompone sviluppando acido solfidrico, solfidrato d'ammonio, dando un sublimato bianco-giallognolo e lasciando appena una traccia di residuo carbonoso.

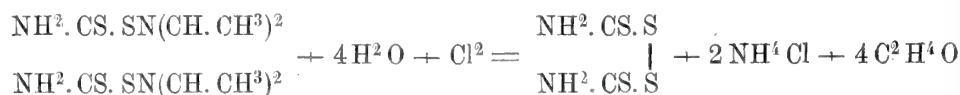
Questi caratteri corrispondono affatto a quelli del bisolfuro solfocarbamico. Una determinazione di solfo mi tolse ogni dubbio:
gr. 0,1350 di sostanza, essicata sull'acido solforico, e decomposta col clorato potassico e carbonato di sodio, secondo il metodo di Kolbe, diedero 0,6775 di solfato baritico. Quindi:

	Trovato	Calcolato per la formola $C^2H^4N^2S^4$
Solfo	68,92	69,56

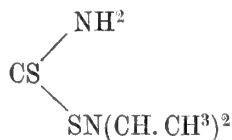
Lo stesso composto si ottiene col cloro. La carbotialdina sospesa in poca acqua fu sciolta in un eccesso d'acido cloridrico diluito con un egual volume d'acqua. Alla soluzione filtrata aggiunsi, a poco per volta e sempre agitando, dell'acqua di cloro. Il liquido si mantenne incoloro. Poco dopo incominciò a deporsi il bisolfuro, bianco. Bisogna avvertire di non mettere un eccesso di acqua di cloro e non tutta in una volta perchè allora si separa il bisolfuro solfocarbamico colorato molto in giallo.

Il bisolfuro solfocarbamico è ossidato dal permanganato di potassio; la maggior parte dello solfo è trasformata in acido solforico ed una piccola parte si separa allo stato libero.

Se si rappresenta il bisolfuro solfocarbamico con $\begin{matrix} NH^2.CS.S \\ | \\ NH^2.CS.S \end{matrix}$ la sua formazione dalla carbotialdina si spiega nel modo seguente:

$$\begin{matrix} NH^2.CS.SN(CH.CH^3)^2 \\ NH^2.CS.SN(CH.CH^3)^2 \end{matrix} + 4H^2O + Cl^2 = \begin{matrix} NH^2.CS.S \\ | \\ NH^2.CS.S \end{matrix} + 2NH^4Cl + 4C^2H^4O$$

2 mol. di carbotialdina.

Colle altre formole proposte per la carbotialdina mi pare non sia possibile spiegare in modo soddisfacente la sua facile trasformazione in bisolfuro solfocarbamico.

Tutte le reazioni dunque conosciute della carbotialdina e quelle ch'io ho ora descritte concordano a stabilire che questa sostanza deve considerarsi come *solfocarbamato di dietilidene:*

La soluzione alcolica di carbotialdina precipita in nero col *nitrato mercuroso;* coll' *acetato neutro di piombo* si colora prima in giallo e poco dopo fornisce un precipitato giallo che lentamente, a freddo, passa al ranciato, rosso e nero, e che per riscaldamento annerisce assai rapidamente dando solfuro di piombo che si depone in forma di specchio metallico similmente all'argento ridotto dal nitrato coll'aldeide.

Benchè vi sia somiglianza nei nomi, nessuna relazione di costituzione, di reazioni chimiche ecc. esiste tra la tialdina e la carbotialdina.

Ad uno studio simile sottoporrò la carbovaleraldina $C^{11}H^{22}N^2S^2$ di Schröeder.

TIALDINA E TIOALDEIDE.

Dalla tialdina per ossidazione con permanganato di potassio ottenni tra gli altri prodotti, dell'acido solforico, dell'acido acetico ed un acido solforato il cui *sale di potassio* contiene $C^2H^4K^2S^2O^6$. Questo sale si forma in quantità di circa il 90 % della tialdina impiegata.

Avevo molte ragioni per credere che quest'acido solforato non fosse l'acido tioacetico di Kekulé $CH^3.CO.SH$, ma invece il suo isomero, non ancora conosciuto, $CH^3.CS.OH$, e che si denominerebbe *acido β tiacetico*; però le molte analisi del sale potassico conducono alla formola sopraindicata.

Il *sale di potassio* $C^2H^4K^2S^2O^6$ si depone in cristalli lamellari, bianchi, duri, fragili, inodori anche a caldo, solubilissimi nell'acqua, meno solubile nell'alcool dal quale cristallizza. Riscaldato brucia senza fondere, con fiamma azzurra, lasciando un residuo di solfuro e carbone. La sua soluzione precipita: col *nitrato d'argento* in giallo-rosso che poi annerisce; col *nitrato mercuroso,* immediatamente in nero; coll'*acetato di piombo* in bianco, che non annerisce a caldo; col *solfato di rame* in azzurro chiaro; col *cloruro ferrico* dà un lieve color ametista e non intorbida a caldo.

La formazione di questo composto non si spiega bene, se si ammette nella tialdina lo solfo allo stato di solfidrile SH.

Preparerò una maggiore quantità di questo sale ed altri sali per esaminare anche l'acido libero. Darò in seguito i particolari di queste esperienze.

Lo stesso sale potassico pare che si formi anche dalla tioaldeide.

Benchè un poco più difficilmente che non la tialdina, anche la tioaldeide $(CH^3CHS)^3$ sospesa nell'acqua, si ossida col permanganato di potassio. Si ottengono dell'acido solforico ed un sale potassico che sembra identico a quello preparato dalla tialdina. Dai pochi saggi che ho fatto sino ad ora si formerebbe in quantità di circa il 20 % della tioaldeide impiegata.

La tioaldeide era in bei cristallini aghiformi, fusibili a 45-46°.

Ossisolfobenzide.

L'ossisolfobenzide $(C^6H^4.OH)^2SO^2$ è completamente ossidata dal permanganato potassico.

10 gr. di ossisolfobenzide, ben polverizzata, furono trattati con litr. 1,500 di una soluzione di permanganato potassico contenente 7 a 8 gr. di permanganato. Dopo poco tempo, a freddo, il liquido è perfettamente decolorato. Il liquido filtrato che ha reazione alcalina e sviluppa anidride carbonica cogli acidi, fu evaporato a secco. Il residuo trattato con alcool assoluto e a più riprese, si sciolse solo in parte. Per evaporazione dell'alcool ottenni un residuo bianco che non conteneva solfati e che fu di nuovo purificato cristallizzandolo dall'alcool. Questo composto è il derivato potassico dell'ossisolfobenzide $(C^6H^4.OK)^2SO^2$; la sua soluzione che ha reazione alcalina, neutralizzata con acido cloridrico si rappiglia in una massa di cristalli splendenti di ossisolfobenzide.

La parte del prodotto, insolubile nell'alcool assoluto ma solubile nell'acqua, contiene del solfato di potassio e dell'ossalato di potassio.

Impiegando dunque anche una quantità insufficiente di permanganato potassico l'ossisolfobenzide è totalmente ossidata e non fornisce prodotti intermedî; si ottengono come prodotti: acido solforico, acido ossalico ed anidride carbonica.

Operando nel modo seguente ho potuto determinare esattamente la quantità dello solfo dell'ossisolfobenzide e di altre materie solforate, *facilmente ossidabili* dal permanganato di potassio.

L'ossisolfobenzide in polvere, posta entro palloncino a collo piuttosto lungo, fu mescolata con poca acqua e poi a piccole porzioni aggiunsi del permanganato di potassio in polvere, sino a che restasse permanente il colore violetto. Si scalda se occorre. Per togliere il lieve eccesso di permanganato e l'ossido di manganese formatosi, si scalda per alcuni minuti all'ebullizione con quantità appena sufficiente di acido cloridrico. Il liquido che si ottiene è limpidissimo e quasi incoloro. Nel liquido filtrato se occorre, e convenientemente diluito, si determina l'acido solforico col solito metodo:

gr. 0,4892 di sostanza diedero 0,4505 di solfato baritico, cioè:

	Trovato	Calcolato per la formola $C^{12}H^{10}SO^4$
Solfo	12,65	12,80

Cloez e Guiguet [1] impiegarono il permanganato per dosare lo solfo nella polvere pirica; Erlenmeyer e R. Hofmann [2] proposero di dosare lo solfo de'solfocianati con soluzione di permanganato.

Solfurea.

La solfurea, assai bene cristallizzata, fusibile a 149° e priva affatto di solfacianato, trattata come la ossisolfobenzide per determinarne lo solfo, diede i risultati seguenti:

[1] Comptes rendus 1858, T. 46, p. 1110.
[2] Erlenmeyer, *Lehr. dorg. Chem.* p. 171.

gr. 0,223 di sostanza essicata a 100° fornirono 0,682 di solfato baritico. Da cui:

	Trovato	Calcolato per la formola $CS(NH^2)^2$
Solfo	42,02	42,10

Già Mulder e Smith [1] avevano osservato che colla solfurea ed il permanganato in soluzione acida si deposita dello solfo, ed in soluzione alcalina si ottiene azoto ed acido solforico.

Difenilsolfurea.

Della difenilsolfurea pura fu nuovamente purificata ricristallizzandola varie volte dall'alcool bollente; si separò in magnifiche lamelle, sottilissime, madraperlacee, che fondevano a 146°,5. Ordinariamente nei trattati si trova indicato 140° quale punto di fusione della solfocarbanilide.

Anch'essa trattata col permanganato, nel modo che ho descritto più sopra, fornisce tutto lo solfo allo stato di acido solforico:

I. gr. 0,3662 di sostanza diedero 0,3625 di solfato baritico.

II. gr. 0,3603 di sostanza fornirono 0,3635 di solfato baritico, cioè:

	Trovato		Calcolato per la formola
	I.	II.	$CS(NHC^6H^5)^2$
Solfo	13,60	13,87	14,03

Anche l'ossidazione della difenilsolfurea col permanganato è assai regolare; si sviluppa l'odore di aldeide benzoica, ed osservai inoltre che i residui C^6H^5 sono, anche in questo caso, difficilmente ossidati. Infatti dopo il trattamento con acido cloridrico per disciogliere l'ossido di manganese ottenni un residuo polverulento di una materia clorurata che è insolubile nell'acqua, poco solubile nell'alcool e meglio solubile nell'etere. Questa sostanza è forse una benzina clorurata.

Taurina.

La taurina è difficilmente ossidata dal permanganato di potassio, solo una parte è trasformata in acido solforico. In due esperimenti ottenni solo 16,60 e 12,48 % di solfo, mentre per la formola $C^2H^7NO^3S$ si calcola 25,6 %. Anche dopo prolungata ebullizione con eccesso di permanganato una parte della taurina resta inalterata o forse si forma un composto solforato che non è ulteriormente ossidabile. Io potei separare solo una piccolissima quantità di un prodotto che bruciato con clorato dava acido solforico. Non è impossibile che si formi dell'acido solfoacetico $\begin{array}{l}COOH\\ |\\ CH^2.SO^3H\end{array}$ quale prodotto intermedio di ossidazione, ma la piccola quantità di materia che era a mia disposizione non mi permise di completare lo studio di questa reazione.

[1] Berichte T. VII, pag. 1636.

La resistenza che presenta la taurina agli agenti ossidanti va d'accordo col fatto osservato da Salkowsky, cioè, che questa sostanza entro l'organismo animale si trasforma solo in parte in acido solforico; la maggior parte passa nelle urine

allo stato di acido taurocarbamico $\begin{array}{l} CH^2 . NH . CONH^2 \\ | \\ CH^2 . SO^3 H \end{array}$

Ora continuo lo studio dei prodotti che si ottengono dalla *tialdina* e dalla *tioaldeide,* come quelli che presentano, mi sembra, qualche importanza; e spero di estendere queste ricerche anche alla *tioformaldeide* $(CH^2S)^3$ che ho tentato di preparare dal solfuro di carbonio col metodo di Girard ma con risultati, sino ad ora, poco soddisfacenti.

Sur un principe fondamental de géométrie et de trigonométrie

par Mr. EDOUARD LUCAS.

Mémoire approuvé pour l'insertion dans les Actes de l'Académie

dans la séance du 7 avril 1878.

---

1. — La définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle ou à une sphère, son expression dans le système des coordonnées cartésiennes, et les propriétés les plus élémentaires des déterminants conduisent immédiatement à la démonstration d'un théorème général, qui renferme la plupart des propriétés métriques connues. Ce principe repose sur la proposition suivante, que l'on doit considérer comme l'extension du théorème de Carnot, sur les projections.

Lemme. *Les puissances d'un point par rapport à $n+5$ cercles d'un plan, ou par rapport à $n+6$ sphères de l'espace, sont liés entre elles par $n+1$ équations linéaires et homogènes, dans chacune desquelles la somme des coefficients est nulle.*

En effet, soit

$$x_i = x^2 + y^2 - 2a_i xz - 2b_i yz + c_i z^2,$$

le premier membre de l'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires et homogènes; on sait que x_i représente la puissance d'un point quelconque P de coordonnées x, y et $z=1$, par rapport au cercle O_i. En faisant successivement i égal à $1, 2, 3, 4, 5$, et en éliminant x^2+y^2, xz, yz, z^2, entre les cinq équations obtenues, on a l'identité

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ x_4 & 1 & a_4 & b_4 & c_4 \\ x_5 & 1 & a_5 & b_5 & c_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant s'annule pour des valeurs égales de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; on a donc, par le développement,

$$(1) \qquad lx_1 + mx_2 + nx_3 + px_4 + qx_5 = 0,$$

avec la condition

$$(2) \qquad l + m + n + p + q = 0.$$

Il est facile d'étendre cette démonstration au cas de six sphères de l'espace.

2. — Cela posé, appelons *puissance mutuelle* de deux cercles de rayons r_i et r_j, de centres O_i et O_j dont la distance est d_{ij}, l'expression

$$(3) \qquad a_{ij} = \frac{r^2_i + r^2_j - d^2_{ij}}{2r_i r_j};$$

nous aurons, en particulier

$$d_{ii} = 0, \quad d_{ij} = d_{ji}, \quad a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

et, pour deux cercles tangents, soit extérieurement, soit intérieurement

$$a_{ij} = -1, \quad \text{ou} \quad a_{ij} = +1;$$

supposons le point quelconque P placé au centre O_j d'un cercle de rayon r_j; la puissance de ce point par rapport au cercle de centre O_i est

$$x_i = d^2_{ij} - r^2_i,$$

ou, en introduisant la puissance mutuelle

$$x_i = r^2_j - 2r_i r_j a_{ij}. \tag{4}$$

Si l'on fait successivement $i = 1, 2, 3, 4, 5$, et si l'on porte les valeurs obtenues, dans l'équation (1), en tenant compte de la relation (2), on trouve

$$lr_1 r_j a_{1j} + mr_2 r_j a_{2j} + nr_3 r_j a_{3j} + pr_4 r_j a_{4j} + qr_5 r_j a_{5j} = 0; \tag{5}$$

maintenant, si nous donnons à j les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, nous obtenons cinq équations qui conduisent, par l'élimination de l, m, n, p, q, à l'identité

$$\begin{vmatrix} r_1r_1a_{11} & r_1r_2a_{12} & r_1r_3a_{13} & r_1r_4a_{14} & r_1r_5a_{15} \\ r_2r_1a_{21} & r_2r_2a_{22} & r_2r_3a_{23} & r_2r_4a_{24} & r_2r_5a_{25} \\ r_3r_1a_{31} & r_3r_2a_{32} & r_3r_3a_{33} & r_3r_4a_{34} & r_3r_5a_{35} \\ r_4r_1a_{41} & r_4r_2a_{42} & r_4r_3a_{43} & r_4r_4a_{44} & r_4r_5a_{45} \\ r_5r_1a_{51} & r_5r_2a_{52} & r_5r_3a_{53} & r_5r_4a_{54} & r_5r_5a_{55} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Lorsque les rayons ne sont pas nuls, on peut diviser les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne par r_i, et ceux de la $j^{\text{ième}}$ colonne par r_j; on a ainsi

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} = 0; \tag{7}$$

d'où, cette proposition:

Théorème fondamental. *Le déterminant des puissances mutuelles de cinq cercles d'un plan ou de six sphères de l'espace est identiquement nul.*

3. — Lorsque deux cercles se coupent, leur puissance mutuelle est égale au cosinus de leur angle A_{ij}, compté conformément au principe des signes; en désignant par T_{ij} et V_{ij} les longueurs des tangentes communes, on a aussi

$$T^2_{ij} = 4r_i r_j \sin^2 \frac{A_{ij}}{2}, \qquad V^2_{ij} = -4r_i r_j \cos^2 \frac{A_{ij}}{2}. \tag{8}$$

Lorsque les quatre cercles O_1, O_2, O_3, O_4 sont orthogonaux à un cinquième cercle, la formule (7) donne

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_3 a_{44} = 0,$$

ou, en se servant d'une notation connue,

$$\sin^2 A_{1234} = 0. \tag{9}$$

Désignons encore par Θ_i l'angle du cercle de centre O_i avec le cercle radical O_{jkl} de trois autres cercles, on a encore

$$\begin{aligned} \cos\Theta_1 \sin A_{234} = \cos\Theta_2 \sin A_{341} = \cos\Theta_3 \sin A_{412} = \cos\Theta_4 \sin A_{123} \\ = \sin A_{1234}. \end{aligned} \tag{10}$$

4. — Nous allons montrer que le théorème fondamental s'applique lorsque l'on remplace tous les cercles, ou plusieurs d'entre eux, par des points ou par des droites, situés à distance finie ou indéfinie dans le plan.

Lorsque le rayon r_5 s'annule, le cercle O_5 se réduit à son centre; on a

$$2r_i r_5 = r^2_i - d^2_{i5}, \qquad 2r_5 r_5 a_{55} = 0;$$

par conséquent, en désignant par X_i le quotient de la puissance de O_5 par rapport au cercle de centre O_i, par le diamètre $2r_i$ de ce cercle, ou la *distance circulaire* de O_5 au cercle de centre O_i, on a

$$r_5 a_{i5} = - X_i,$$

et le déterminant (6) donne

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & X_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons d'abord $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, et remplaçons X_4 par X_{123}, en désignant par X_{123} la distance circulaire d'un point au cercle radical O_{123} de trois cercles O_1, O_2 et O_3; nous aurons

$$(12) \qquad X^2_{123} \sin^2 A_{123} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

On obtient l'équation homogène et quadratique du cercle radical de trois cercles donnés, en posant $X_{123} = 0$. On a d'ailleurs par le développement

$$(13) \qquad -X^2_{123} \sin^2 A_{123} = X^2_1 \sin^2 A_{23} + \ldots + 2X_2X_3 (\cos A_{12} \cos A_{13} - \cos A_{23}) + \ldots;$$

c'est l'expression de la distance circulaire d'un point au cercle radical de trois cercles donnés.

5. — Reprenons l'équation (11); on a, en résolvant par rapport à X_4.

$$(14) \qquad X_4 \sin^2 A_{123} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \pm \sin A_{123} \sin A_{1234} X_{123};$$

cette formule donne l'expression de la distance d'un point au cercle qui coupe trois cercle donnés sous des angles donnés; deux cercles répondent à la question, et sont réciproques par rapport au cercle radical X_{123} des trois cercles donnés; le cercle radical X_{123} est l'un de leurs cercles bissecteurs, l'autre cercle bissecteur a pour équation

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En supposant, plus particulièrement $a_{14} = a_{24} = a_{34} = -1$, et faisant $X_4 = 0$, on trouve

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{A_{12}}{2} & \sin^2 \frac{A_{13}}{2} & X_1 \\ \sin^2 \frac{A_{21}}{2} & 0 & \sin^2 \frac{A_{23}}{2} & X_2 \\ \sin^2 \frac{A_{31}}{2} & \sin^2 \frac{A_{32}}{2} & 0 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ou, en développant

$$(17)\qquad X^2_1 \sin^4\frac{A_{23}}{2} + \ldots\ldots - 2X_2X_3\sin^2\frac{A_{12}}{2}\sin^2\frac{A_{13}}{2} - \ldots = 0;$$

ou encore

$$(18)\qquad \sin\frac{A_{23}}{2}\sqrt{X_1} + \sin\frac{A_{31}}{2}\sqrt{X_2} + \sin\frac{A_{12}}{2}\sqrt{X_3} = 0;$$

ces trois équations représentent, sous trois formes différentes, l'ensemble du système des deux cercles tangents du premier couple, à trois cercles donnés.

Si l'on fait $a_{14} = a_{24} = a_{34} = \cos\Theta$, on a

$$(19)\qquad \mathrm{tg}^2\Theta \sin^2 A_{123} X^2_{123} + \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{A_{12}}{2} & \sin^2\frac{A_{13}}{2} & X_1 \\ \sin^2\frac{A_{21}}{2} & 0 & \sin^2\frac{A_{23}}{2} & X_2 \\ \sin^2\frac{A_{31}}{2} & \sin^2\frac{A_{32}}{2} & 0 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation du système de deux cercles qui coupent sous le même angle Θ trois cercles donnés. Tous ces cercles possèdent le même axe radical; c'est une proposition connue.

6. — Supposons encore $a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{45} = -1$, dans le déterminant (7), nous obtenons, par une transformation facile

$$(20)\qquad Q = \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{A_{12}}{2} & \sin^2\frac{A_{13}}{2} & \sin^2\frac{A_{14}}{2} \\ \sin^2\frac{A_{21}}{2} & 0 & \sin^2\frac{A_{23}}{2} & \sin^2\frac{A_{24}}{2} \\ \sin^2\frac{A_{31}}{2} & \sin^2\frac{A_{32}}{2} & 0 & \sin^2\frac{A_{34}}{2} \\ \sin^2\frac{A_{41}}{2} & \sin^2\frac{A_{42}}{2} & \sin^2\frac{A_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant qui précède est le produit des quatre facteurs

$$(21)\qquad \sin\frac{A_{12}}{2}\sin\frac{A_{34}}{2} \pm \sin\frac{A_{13}}{2}\sin\frac{A_{24}}{2} \pm \sin\frac{A_{14}}{2}\sin\frac{A_{23}}{2};$$

donc, lorsque quatre cercles sont tangents à un cinquième, l'un des facteurs précédents est nul; on retrouve ainsi le théorème de M. Casey sur les longueurs des tangentes communes de quatre cercles qui touchent un cinquième.

Si l'on fait $a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{45} = \cos\Theta$, on obtient

$$(22)\qquad \mathrm{tang}^2\Theta \sin^2 A_{1234} + Q = 0;$$

on détermine ainsi l'angle du cercle qui coupe quatre cercles donnés sous le même angle; en portant cette valeur dans la relation (19), on obtiendra l'équation d'un cercle qui coupe quatre cercles donnés, sous le même angle.

Il résulte des considérations précédentes que, dans l'application du théorème fondamental, on doit supposer la *puissance mutuelle d'un cercle et d'un point*, comme égale et de signe contraire à la distance circulaire du point au cercle, et la *puissance mutuelle de deux points confondus*, comme nulle.

7. — Lorsque les rayons r_4 et r_5 de deux cercles sont nuls, on a

$$2r_4r_5 = -d^2_{45};$$

par suite, en désignant par X_1, X_2, X_3 et Y_1, Y_2, Y_3 les distances circulaires des deux points O_4 et O_5 aux trois premiers cercles, on a

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 & Y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 & Y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 & Y_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 & -\frac{1}{2}d^2_{45} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & -\frac{1}{2}d^2_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette formule donne la distance de deux points en coordonnées tricirculaires, et aussi, la différentielle de l'arc d'une courbe anallagmatique; on en déduit encore l'équation, en coordonnées tricirculaires, d'un cercle de centre et de rayon donnés.

On voit donc que, dans l'application du théorème fondamental, on doit considérer la *puissance mutuelle de deux points* comme égale, en signe contraire, à la moitié du carré de leur distance.

8. — Lorsque trois rayons r_1, r_2, r_3 sont nuls, on a, en désignant par X_4, Y_4, Z_4, et X_5, Y_5, Z_5, les distances circulaires des trois points aux deux cercles de centres O_4 et O_5

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}d^2_{12} & \frac{1}{2}d^2_{13} & X_4 & X_5 \\ \frac{1}{2}d^2_{21} & 0 & \frac{1}{2}d^2_{23} & Y_4 & Y_5 \\ \frac{1}{2}d^2_{31} & \frac{1}{2}d^2_{32} & 0 & Z_4 & Z_5 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 & -1 & -\cos A_{45} \\ X_5 & Y_5 & Z_5 & -\cos A_{45} & -1 \end{vmatrix} = 0:$$

cette formule donne l'angle de deux cercles de rayons donnés, en coordonnées triponctuelles.

Si quatre rayons sont nuls, on obtient la relation entre les puissances de quatre points par rapport à un cercle, et leurs distances mutuelles; lorsque les quatre points sont sur un cercle, on retrouve le théorème de Ptolémée, sur le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit; en particulier, lorsque deux points sont diamétralement opposés, on a les formules d'addition des fonctions circulaires, et ainsi, les diverses formules de la Trigonométrie rectiligne.

Lorsque les cinq rayons s'annulent, on a la relation entre les distances mutuelles de cinq points quelconques d'un plan; cette relation a été obtenue par M. Cayley, au moyen de la multiplication des déterminants [1].

9. — Nous avons supposé, jusqu'à présent, que les rayons r_i s'annulaient; on peut aussi les faire croître indéfiniment, et remplacer les cercles par des droites. Lorsque deux cercles passent par deux points fixes, et que le rayon de l'un d'eux augmente indéfiniment, la puissance mutuelle des deux cercles a pour limite le cosinus de l'angle de la droite et du cercle; en désignant par δ_i la distance du centre O_i de ce cercle à la droite, et par r_i le rayon de ce cercle, ce cosinus a pour expression $\frac{\delta_i}{r_i}$; on doit donc considérer la *puissance mutuelle d'un cercle et d'une droite* comme

[1] Journal de Cambridge, tome II.

égale au quotient de la distance du centre à la droite, par le rayon du cercle : l'application du théorème fondamental donne ainsi, pour quatre cercles et une droite,

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{\delta_1}{r_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{\delta_2}{r_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{\delta_3}{r_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{\delta_4}{r_4} \\ \frac{\delta_1}{r_1} & \frac{\delta_2}{r_2} & \frac{\delta_3}{r_3} & \frac{\delta_4}{r_4} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on divise les éléments de la dernière ligne et de la dernière colonne par δ_1, et si l'on suppose que la droite s'éloigne indéfiniment, on obtient

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{1}{r_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{1}{r_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{1}{r_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{1}{r_4} \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & \frac{1}{r_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette formule donne le rayon d'un cercle qui coupe sous des angles donnés trois cercles donnés ; on obtiendra, plus particulièrement, le rayon du cercle radical de trois cercles, le rayon du cercle qui coupe quatre cercles donnés sous le même angle, ou le rayon du cercle tangent à trois cercles donnés. Dans ce dernier cas, on retrouve une formule donnée par M. Bauer [1].

Il résulte de là, que l'on doit considérer la *puissance mutuelle d'un cercle et d'une droite à l'infini* comme égale à l'inverse du rayon du cercle, et la *puissance mutuelle de deux droites confondues, à l'infini*, comme nulle.

10. — De même, on considérera la *puissance mutuelle de deux droites*, comme égale au cosinus de l'angle de leurs directions : la *puissance mutuelle d'un point et d'une droite*, comme égale à la distance du point à la droite, comptée conformément au second principe des signes [2] ; et la *puissance mutuelle d'un point et d'une droite à l'infini*, comme égale à l'unité positive.

[1] Journal de Schlömilch, tom. V.

[2] *Note sur l'emploi dans la géométrie d'un nouveau principe des signes.* — Nouvelle correspondance mathématique, tom. II et III.

Ainsi, pour trois cercles O_1, O_2, O_3, un point O_4 dont les distances circulaires aux trois premiers sont X, Y, Z, et une droite à l'infini, on a

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X & \frac{1}{r_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & Y & \frac{1}{r_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & Z & \frac{1}{r_3} \\ X & Y & Z & 0 & 1 \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0:$$

c'est la relation fondamentale entre les puissances d'un point par rapport à trois cercles, en coordonnées tricirculaires.

On obtiendra ainsi, par l'application de notre théorème:

1° la distance de deux points, ou plus généralement, la puissance mutuelle de deux éléments (points, droites, plans, sphères), dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, obliques, trilinéaires, tricirculaires, tétraédriques, tétrasphériques, ou dans les systèmes corrélatifs des coordonnées tangentielles, bipolaires, triponctuelles, tripolaires, etc.

2° les équations de ces différents éléments dans les divers systèmes de coordonnées, et, en particulier, les équations de la droite ou du plan de l'infini, des points circulaires ou du cercle de l'infini, etc.

Il résulte d'ailleurs de ces considérations une extension toute naturelle du *principe de dualité*, que l'on peut formuler ainsi:

Principe de mutualité. *Toute propriété descriptive ou métrique exprimant une relation entre des points, des droites et des plans, s'applique au système plus général dans lequel on remplace les points, les droites et les plans par des cercles ou des sphères.*

Nous terminerons cet exposé par la solution du *Problème de Malfatti généralisé par Steiner*. Il s'agit de déterminer trois cercles tangents entre eux deux à deux et tangents à deux des cercles d'un système de trois cercles donnés.

Désignons par O_1, O_2, O_3 les trois cercles donnés, et par O_4, O_5, O_6 les trois cercles cherchés. On a, en désignant par u, v, w trois inconnues à déterminer, en supposant tous les contacts extérieurs,

$$\begin{array}{lll} a_{14} = u, & a_{24} = -1, & a_{34} = -1, \\ a_{15} = -1, & a_{25} = v, & a_{35} = -1, \\ a_{16} = -1, & a_{26} = -1, & a_{36} = w, \end{array}$$
$$a_{45} = a_{56} = a_{64} = -1.$$

L'application du théorème fondamental, ou du théorème de M. Casey, donne

$$\sin\frac{A_{14}}{2}\sin\frac{A_{25}}{2} = \sin\frac{A_{12}}{2} \pm 1,$$
$$\sin\frac{A_{25}}{2}\sin\frac{A_{36}}{2} = \sin\frac{A_{23}}{2} \pm 1.$$
$$\sin\frac{A_{36}}{2}\sin\frac{A_{14}}{2} = \sin\frac{A_{31}}{2} \pm 1:$$

si l'on pose

$$R = \left(\sin\frac{A_{12}}{2} \pm 1\right)\left(\sin\frac{A_{23}}{2} \pm 1\right)\left(\sin\frac{A_{13}}{2} \pm 1\right),$$

on tire

$$\sin^2\frac{A_{14}}{2} = \frac{R}{\left(\sin\frac{A_{23}}{2} \pm 1\right)^2}, \quad \sin^2\frac{A_{25}}{2} = \frac{R}{\left(\sin\frac{A_{31}}{2} \pm 1\right)^2}, \quad \sin^2\frac{A_{36}}{2} = \frac{R}{\left(\sin\frac{A_{12}}{2} \pm 1\right)^2},$$

par suite

$$u = 1 - 2\sin^2\frac{A_{14}}{2}, \quad v = 1 - 2\sin^2\frac{A_{25}}{2}, \quad w = 1 - 2\sin^2\frac{A_{36}}{2},$$

connaissant u, v, et w, on déterminera séparément le rayon ou l'équation des trois cercles cherchés, puisque l'on connaît la puissance mutuelle de chacun d'eux par rapport aux cercles donnés.

Oggetti preistorici calabresi del Catanzarese e del Cosentino.

Memoria del capitano G. RUGGERO

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 marzo 1878.

Senza esagerare l'importanza delle parziali raccolte di oggetti preistorici per la Paleoetnologia, specialmente ora che esistono in copia dovunque, e che tali studî hanno potuto giovarsene a progredire oltre la stretta cerchia dapprima assegnata tra difficoltà d'ogni sorta, credo però sempre nella utilità di quelle relative a località che non furono, o che furono solo imperfettamente esplorate. Le provincie calabresi spettano, secondo me, a questa seconda categoria, perchè le sfavorevoli condizioni di viabilità e di sicurezza pubblica non mutate che in questi ultimi tempi, hanno sempre opposto un argine difficilmente superabile alle esplorazioni scientifiche d'ogni specie; difatti malgrado gli studî generali o le esplorazioni parziali di un Philippi, del Tchihatcheff, dei Costa, del Von Rath e di altri, rimane fuori di dubbio che i cultori di qualunque ramo delle scienze naturali vi troveranno più che altrove facile ed abbondante materia di studio. E qui ricorderò a modo di esempio, come le mie ricerche mineralogiche nel 1877, sebbene limitate a breve estensione di terreno, siano state coronate da successo avendo trovato giacimenti svariati ed interessanti per le specie, dovuti specialmente ai fenomeni di metamorfismo tanto singolari ed intensi, nella zona estesa del contatto delle roccie eruttive colle sedimentarie: e come nel 1871 e 1872 avendo cominciato con altri ufficiali una raccolta entomologica per incarico di persona competente in questa materia, ci sia riuscito di avere alcune specie e varietà nuove, cosa ben difficile per le altre provincie.

Fin dal novembre del 1872 al ritorno di Calabria in Verona venni a sapere che armi di pietra erano state scoperte a Decollatura: scrissi immediatamente ad un amico a s. Pietro Apostolo perchè raccogliesse per me oggetti e notizie, ma sebbene avessi la conferma del rinvenimento, non mi fu possibile ottenere un soddisfacente risultato, ed in quell'anno dovetti rinunziare ad altro che non fosse la sola cuspide di lancia in bronzo di Bisignano. Nel nuovo distaccamento in Calabria del 1874 non mancai di ricercare armi di pietra, pietre del fulmine, ma non riuscii più di prima, nè avrei mai sognato di riconoscerne la causa nell'ignoranza mia sul nome calabrese di simili oggetti. Deluso nel primo tentativo, distratto da altre occupazioni, trascurai le ricerche e quasi vi rinunziai, e ricordo che interrogato se non avessi mai pensato ad occuparmi di questo argomento, risposi negativamente anzichè confessare un insuccesso. Stava per terminare l'ultimo mio distaccamento del 1876 quando conobbi per caso il nome col quale venivano colà designate le pietre lisciate ad ascie, parola magica che doveva finalmente schiudermi la via a raccoglierne un

certo numero e relativamente in breve tempo, e tale nome è *truoni* o *cuogni di truono*. Era imminente la partenza: poco feci sul sito, assai più in seguito da lungi; da quel momento non lasciai tregua o riposo a quanti conoscevo sul Catanzarese e nella regione limitrofa del Cosentino; fu un succedersi e replicarsi di lettere, circolari, promemorie ed eccitamenti alle persone che conoscevo nei diversi comuni, ai comandanti dei diversi distaccamenti, a chi per ragione d'ufficio doveva periodicamente compiere il giro di gran parte di quelle regioni, e mediante gli sforzi di tutti riuscii a mettere assieme una cinquantina di pezzi, e più ancora le notizie ordinate relativamente alle località esplorate. Giunto a questo punto, pensai se dovessi o no far conoscere il risultato delle mie ricerche, ma questo dipendeva da quanto fosse già stato fatto da altri relativamente alle provincie calabresi. Il chiarissimo Nicolucci che aveva già raccolto, studiato e pubblicato a più riprese una gran quantità di oggetti preistorici italiani, massime della parte meridionale, ne aveva già di calabresi; nella sua Memoria del 1871 (1) egli cita 37 oggetti di pietra lisciata di 11 comuni dei circondarî di Nicastro e Montelone, ma nessuno di selce; in quella del 1874 (2) ha nuovi oggetti di Calabria; finalmente nel suo catalogo del 1877 (3) riassume tutto il materiale della sua ricca collezione nella quale figurano 58 tra scuri, cunei, sgorbie, mazzuoli ed ascie-martelli calabresi, tra i quali una sola punta di freccia in diaspro rosso: i comuni rappresentati son 20 del Catanzarese e 3 del Cosentino. Il Nicolucci trovò per il primo il bel tipo delle ascie-martelli di Calabria, e le piccole scuri ad uso di amuleto. Le pietre lisciate sono graniti, sieniti, dioriti, affaniti, serpentini diaspro: la fibrolite vi è rappresentata da un piccolo oggetto solamente, la selce piromaca vi manca affatto. Egli determina per neolitiche le pietre lisciate di Calabria colla scorta unica di tal metodo di lavoro.

Ma la selce lavorata che era sfuggita alle ricerche del Nicolucci in quelle provincie, venne ritrovata dall'ingegnere Vincenzo Rambotti in oggetti rozzamente scheggiati, ed in nuclei unitamente a cocci di stoviglie nella valle dell'Alessi a Squillace (4). In ultimo, dirò che qualche altro oggetto preistorico di quelle provincie trovasi nel Museo paleoetnologico di Roma.

Considerando che la metà degli oggetti della mia raccolta provenivano da località non ancora esplorate, che alcuni distinti per forma, materia o dimensioni meritavano di essere conosciuti, che le mie ricerche erano condotte in modo da suggerire qualche considerazione sulle diverse regioni, avendo tenuto conto dei comuni esplorati, sebbene per la brevità del tempo o per altre difficoltà non mi avessero ancora fornito oggetti, mi sono determinato a far noto il risultato di queste ricerche mie; se non servirà ad altro, accrescerà il numero dei dati materiali relativi alla Paleoetnologia calabrese.

(1) G. Nicolucci, *L'età preistoriche nelle provincie pugliesi e calabresi* (Inserta nell'Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia, anno 1).

(2) G. Nicolucci, *Ulteriori scoperte relative all'età della pietra nelle provincie napoletane* (Dagli Atti della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche. Napoli, 1874).

(3) G. Nicolucci, *Catalogo della collezione* ecc. Napoli, 1877.

(4) Bollettino di Paleoetnologia italiana. Anno 2, pag. 222.

Descriverò adunque progressivamente ogni oggetto in ordine alla forma, accennando brevemente ai caratteri, roccia, luogo di rinvenimento: dirò in seguito quelle altre considerazioni che mi sarà dato azzardare in seguito all'esame degli oggetti e delle altre circostanze relative. — Ma prima mi sia permesso dire di un fatto positivo del quale ho dovuto convincermi malgrado che le apparenze non lo confermino, e questo è la straordinaria quantità di pietre lavorate in Calabria; il contrasto di questa mia osservazione col numero limitato per ora dei pezzi della mia raccolta, verrà spiegato facilmente quando si sappia che la superstizione fu l'ostacolo maggiore che ho dovuto affrontare in queste mie ricerche: e se non fosse stata la convinzione dei contadini di avere in casa loro uno o più Dei tutelari delle domestiche pareti e fattori di miracoli in molte circostanze, io avrei potuto in minor tempo e con minor fatica e spese riunire i *truoni* a centinaia. La massima parte delle famiglie di contadini e molte di quelle agiate dei comuni interni ritengono qualcuno di questi amuleti trovati nei loro poderi, e se tutti i *truoni* non sono precisamente armi preistoriche, lo sono però per la gran parte; il rimanente di tali oggetti sono ciottoli di mare o di fiume ai quali viene assegnata identica origine che alle vere scuri, perchè differenti dai detriti delle roccie circostanti, e da quelli contenuti nei conglomerati terziari.

Ho accennato alle superstizioni che avvolgono in Calabria la presenza dei *truoni*, e sebbene non sia molto confacente al carattere e scopo di questo scritto l'entrare in argomento più adatto a descrizioni d'altro genere, voglio però enumerarne le principali per confermare l'importanza che si attribuisce a tali oggetti, e la difficoltà di raccoglierne in maggior numero malgrado la loro abbondanza; e non intendo con questo di biasimare quella regione a confronto di altre, perchè anche altrove sono comuni ancora nelle campagne simili o differenti credenze. Vuolsi dunque che tali pietre sieno gli stessi fulmini che si sprofondano nel terreno e poi si risollevano a poco a poco (vedi il Nicolucci nelle Memorie citate): che sospesi sul fuoco ad un filo, questo non possa abbruciare e sia la prova della loro virtù (vedi come sopra); nè per quanti fili si saranno consumati, si decideranno mai a cambiare opinione, e non saprei come spiegare la persistenza di certe credenze a dispetto dei fatti, ammenochè non sia l'effetto della stessa fede cieca che dispone la prova di questi fatti in modo che abbiano a riuscire. Vuolsi ancora che messi nel fuoco al minacciare di un temporale valgano a scongiurarlo: altri mi diceva seriamente che escono di sotterra in abbondanza ogni sette anni: finalmente si ricorre perfino ai *truoni* nei parti difficili, ed esiste un vecchio a Soveria del Simmeri possessore di una bellissima scure di pietra, il quale rifiutò di cederla ad un prezzo elevato, perchè doveva servirsene per questo uso nel quale pare superi la virtù delle altre.

Nè solo ai *truoni* si limita la superstizione, ma sibbene in modo diverso si occupa anche dei bronzi preistorici e di quelli dell'epoca storica; non è veramente generalizzata nelle due provincie, anzi la ritengo limitata a poche persone ed a poche località, ma non è men vero che io potessi averne la prova seguente. In un comune capo di mandamento del Cosentino dove mi trovavo di passaggio nel 1871, feci come al solito ricerca di antichità, e seppi che in quel territorio si trovavano in abbondanza armi, utensili ed ornamenti in bronzo. La persona che mi diede tali notizie, la quale

non apparteneva al volgo, mi apprese che qualche tempo prima avea trovato molti bronzi in un suo podere, ma per la mancanza di ricercatori di tali oggetti, avea dovuto far riseppellire quelli avanzi. L'espressione del mio volto dovette allora tradurre la mia sorpresa unitamente alla domanda che mi veniva alla bocca, perchè l'altro soggiunse: « capirà bene, sig. Capitano, erano utensili di gente pagana, nè poteva ritenerli presso di me ».

Hanno favorito le mie ricerche procurandomi oggetti e notizie le seguenti persone appartenenti a quelle provincie: signor Giuseppe Soluri verificatore metrico; sig. Provenzano Domenico fu Gio. Battista; sacerdote Giuseppe Asturino; cav. Andrea Cefali deputato al Parlamento; sotto-tenente Berardelli del 7° bersaglieri; furiere Tromby id. id.; dottor Giuseppe Caiola; sig. Aiello Francesco farmacista; sig. Jenzi Girolamo maestro elementare; ed i seguenti ufficiali del mio reggimento: capitano Galliano; tenente cav. Morelli di Popolo; tenente Issautier e finalmente il capitano Adami ora alla 13ª compagnia alpina. Ricevano tutti i miei ringraziamenti, ma specialmente la gentilissima sig.ª Enrichetta Soluri da Catanzaro, la quale a prezzo di costanti e noiose ricerche mi procurò la gran parte degli oggetti e mi fu cortese di continui incitamenti ad intraprendere questo modesto lavoro.

I. — Descrizione degli oggetti.

N.° d'ordine	Forma — Conservazione Misure — Peso	Densità	Caratteri della materia della quale son fatti	Luoghi ed elevazione	ANNOTAZIONI
I Vedi n. corrispondente nella Tav. I.ª	Ciottolo allungato con taglio stretto ad una estremità - Superficie mediocremente lisciata (Lungo mm. 128, largo 43, alto 31, taglio 24). Peso gram. 277,91.	3,035 (1)	Struttura granitica - Grani di feldispato bianco di quasi 1 mm. alquanti prominenti in massa lamellare nerastra, la quale fonde al cannello in smalto nero lucente magnetico - Durezza da 5,5 a 6 a seconda degli elementi - Polvere grigia - Diorite (2).	Territorio di Cicala - Tra 600 e 900 metri (3).	
II V. Tav. II.ª	Accetta a fianchi quasi rettilinei, taglio quasi retto - Levigata e lucente - Solco incavato e levigato come il rimanente, su di una faccia vicino ad alcune asperità della roccia non levigate (139 - 51 - 32). Peso 331,83.	2,958	Colore verde variabile traente in qualche parte al giallo rossastro - Lucentezza cerea - Piccole laminette lucenti nella massa - Struttura scagliosa - compatta ma tenace - Dur. da 3 a 5,5 c. sopra - Schegge sottili fondono = 2,5 ribollendo in sm. vetroso chiaro-verdognolo; altre = 3 in sm. giallastro; il rimanente della massa non fonde ma scolorasi. Nel tubo ch. legg. traccia di umidità - Roccia serpentinosa con elementi accessorî.	Terr. di Feroleto - Tra 200 e 800.	Non saprei dare una spiegazione soddisfacente circa l'uso del solco; traccia di solco, alquanto curvo vedesi pure sul fianco del n. 46.
III	Altra come sopra, ma più piccola - Levigata quasi a lucido - Ha una piccola scanalatura attorno la punta fatta da poco per sospenderla (86 - 41 - 27). Peso 142,92.	3,000	Bigio oscuro con tendenza al verdognolo - Struttura affanitica a 2 elementi - Dur. da 5,5 - 6. Polv. grigiastra - Schegge fusibili in miscuglio di bollicine bianco-grigie e sm. nero magn.° - Diorite a minutissimi elementi che passa all'affanite.	Terr. di Fossato-Serralta - Tra 400 e 800.	
IV	Altra - Superficie scabra ma levigata a lucido verso il taglio (102 - 42 - 28). Peso 181,43.	3,020	Come il n. 1 ma l'elemento bianco è in XX più angolosi - qualche rara pagliuzza di mica bianca - Diorite.	Tiriolo - Regione Malfone - Tra 300 e 400.	

(1) Mancando di mezzi di precisione per la determinazione delle densità, dovetti ripetere molte volte le pesate per la media, ed usare molte cautele massime per quelle alquanto porose alla superficie. Dalle differenze appena sensibili nei diversi esperimenti, e dalle prove fatte su esemplari di densità conosciuta, mi convinsi che l'errore non poteva superare due o tre unità della 3ª cifra decimale al maximum.

(2) Non ho creduto di limitarmi a dare la semplice determinazione della roccia, ma ho accennato quasi sempre ai caratteri della densità, fusibilità al cannello secondo la scala di Kobell, della durezza ecc. Sono talmente variate le roccie calabresi con tanti passaggi dall'una all'altra e per l'instabilità dei caratteri esterni, che è facilissimo di sbagliare nella determinazione. Queste indicazioni guideranno dunque il lettore quando dubitasse della mia determinazione, e l'aiuteranno a determinarle se mi sono trovato incerto come è avvenuto per alcune. Devo far presente che la superficie di molte è alterata per lunga esposizione al fuoco: che di alcuni non ho potuto avere senza guastarli che piccolissime schegge, e talora la sola polvere. Trovai anche un ostacolo nella mancanza di un microscopio ad ingrandimento sufficiente per distinguere i varî elementi e riunire quelli di egual aspetto per procedere agli assaggi per le diverse specie, massime dei feldispati.

(3) Non sorprenda la differenza nei limiti massimo e minimo delle elevazioni; chi conosce quelle regioni, o le ha esaminate sulla carta al 50000 dello Stato Maggiore colle curve di 10 in 10 metri, saprà che a pochi metri orizzontalmente, corrispondono quote differentissime. Quando potei avere indicazioni sulla distanza e direzione dai paesi anche approssimativamente, ho potuto dare i limiti più ristretti; quando mi si indicò la regione ristretta, la citai e diedi una quota sola: quando non ebbi che l'indicazione del territorio di un comune, allora dovetti citare limiti differenti di molto.

V	Accetta più lunga, più larga alla punta, e fianchi più rettilinei - Era levigata quasi a lucido, ma rimane poco della superficie lavorata, essendo scrostata e guasta massime al taglio (115 - 55 - 37). Peso 487,22.	3,002	Grigio nerastro - Struttura XX^{na} scistosa di feldispato e amfibolo - Dur. da 5,5 - 6. - Varietà di diorite alquanto scistosa.	Terr. Cicala - Tra 600 e 900.	
VI V. Tav. II.ª	Un fianco è più curvo - Levigata, ma non a lucido. Ha rotta la punta e parte del taglio (168 - 76 - 48). Peso 939,72. - Intera, doveva passare i 200 mm. di lunghezza.	2,984	Bigio oscuro tendente al verdognolo - Str. affanitica scistosa - Traccie di colorazione rossastra tra i piani di scistosità dovuti all' alterazione dell' amfibolo - Dur. = 5 - 6 polv. grigia chiara - Affanite dioritica.	Terr. di Cortale - Tra 250 e 800.	È l'accetta più grande che si conosca per ora di Calabria.
VII	Altra ma con taglio più rettilineo, largo, e molto grossa e attondata alla punta - Poco levigata (83 - 47 - 33). Peso 193,72.	2.751	Struttura granitica quarzo, feldispato rossigno e amfibolo - Sienite.	Terr. di Savelli - Tra 400 e 1000.	
VIII V. Tav. II.ª	Altra piccola - Levigata perfettamente e lucente nella parte lavorata, ma appena ottenuto il taglio, non si curarono di levigare le parti rientranti del ciottolo. Taglio guasto da un lato (59 - 38 - 18). Peso 65,94.	2,986	Bianco e grigio-azzurrognolo confusi in macchie o venature fibrose intrecciate - Struttura fibro-scistosa ma tenace - Lucentezza sericea - Alla punta e di fianco avvi una piccola massa di quarzo - In altre parti, macchie e venature ferruginose - Translucida al taglio e nelle schegge - Inattaccabile da acidi - Infusibile al can. ma s'imbianca, e coll' azotato cobalto si colora intensamente in azzurro - Dur. compresa tra 6,5 e 7 - Sillimanite.	Terr. di Fossato-Serralta - Tra 400 e 800.	
IX	Altra con fianchi più curvi e taglio idem. - Dovea essere molto levigata ma è corrosa profondamente in modo che non rimane che qualche traccia della superficie (133 - 45 - 31). Peso 289,50.	2.857	Sienite ad elementi piuttosto piccoli.	Feroleto - nel torrente alla quota 350.	
X	Altra rotta alla punta - fianchi più retti, ma taglio molto tondo e conservato - Poco levigata (98 - 50 - 33). Peso 256,59.	3,087	Strutt. granit. a picc. elementi con tendenza a scistosità - Feldispato, amfibolo e poca mica chiara - Qualche vena di XX^{ni} bruni metallici che sembrano magnetite colla lente - Diorite.	Terr. Cortale - Tra 250 e 800.	
XI V. Tav. II.ª	Altra a taglio tondeggiante e molto largo, e terminante in punta più acuta - Levigata e lucente (102 - 52 - 28). Peso 201,40.	2.972	Bigio-giallognolo con piccole venature verdastre e macchiettine verdi nella massa - Struttura affanitica scagliosa - Dur. da 5 a 6 - polvere quasi bianca - Schegge fondono ribollendo in sm. giallognolo. Pare composta di due elementi indiscernibili ma che sembrano feldispato e amfibolo grammatite, e aver qualche analogia colle saussurriti e giade.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XII	Altra - Superficie scabra (90 - 48 - 29). Peso 201,78.	3,115	Bigia - Strutt. granit. a minutissimi elementi bianchi, bigi e rosei con poca mica e qualche grano giallo diafano piccolissimo - Schegge danno al cannello un miscuglio che alla lente mo-	S. Pietro Apòstolo - Tra 600 e 900.	

			strasi formato di puntini chiari, e sm. nero magnetico. Granulite granatifera?		
XIII V. Tav. III.ª	Accetta molto larga - Superficie quasi levigata a lucido (67 - 49 - 21. Taglio 47). Peso 112,67.	3,093	Nerastro uniforme con alcuni piccoli grani color d'olio di dur. 6 - Colla lente vedonsi piccolissimi XX^ni allungati e chiari sparsi nella massa - Struttura quasi compatta e tenace. Non potei aver schegge - Dur. circa 5,5 - Polvere bigia che al cannello fonde in gocciolíne nere magnetiche - La pietra non è magnetica - Affanite con minerali accessori.	Pietraffitta, vicino al Convento di san Franc. - Circa 600.	
XIV V. Tav. IV.ª	Altra larga e molto sottile - Fianchi curvi - Sup. levigata quasi a lucido - Guasta superiormente - Taglio poco conservato (76 - 48 - 10. Taglio 42). Peso 62,51.	2,964	Verde bruno e variabile - Per il rimanente vedi il n. 2 - Serpentina, prevalente con minerali accessori.	Savelli - Tra 400 e 1000.	Malgrado il taglio più stretto del corpo, non posso persuadermi per l'estrema sottigliezza che abbia servito da cuneo.
XV V. Tav. I.ª	Altra grande ma un po' curva lateralmente per difetto del ciottolo impiegato - Una faccia molto incavata per far scomparire in parte le asperità della pietra - Molto levigata - Taglio conservatissimo (153 - 65 - 3. Taglio 55). Peso 543,04.	2,935	Bigio giallognolo come al n. 11 ma le venature sono appena visibili e non hanno che lieve tendenza al verdognolo - Durezza intorno a 6 - Polvere quasi bianca - Struttura come al n. 11 - Fonde ribollendo in vetro giallognolo. Pare composta di feldispato e grammatite.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	Uno dei migliori oggetti della raccolta per la grandezza e conservazione. Malgrado il taglio più stretto, non so persuadermi a ritenerlo un cuneo.
XVI V. Tav. I.ª	Altra a taglio un poco più stretto del corpo - Levigata e lucente inferiormente, scabra superiormente (118 - 45 - 33. Taglio 43). Peso 269,47.	3,065	Colore verde oscuro tigrato di nero verdastro, e verde-giallognolo confusi insieme - Strutt. sub-cristallina a elementi indistinti - Dur. da 5 a 6 - Polvere biancastra - Schegge fondono = 4 in sm. biancastro con qualche piccola bollicina di sm. nero magnetico.	Catanzaro - alla fornace di mattoni sulla via per Gagliano - Circa 320.	
XVII	Altra mediocremente levigata (90 - 43 - 33. Taglio 40). Peso 216,39.	3,049	Bigio-oscuro - Come al n. 3 - Diorite che fa passaggio all'affanite.	Gimigliano - Tra 300 e 600.	
XVIII	Altra meno levigata - Taglio un poco guasto (95 - 48 - 34. Taglio 44). Peso 242,50.	3,038	Colore bigio-oscuro - Tutto come al n. 3 - Passaggio della diorite alla affanite.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XIX	Altra - Superficie poco levigata, meno che verso il taglio (95 - 45 - 31. Taglio 41). Peso 209,00.	2,995	Colore oscuro prodotto da alterazione, ma internamente è più chiaro assai - Strutt. come al n. 1 - Diorite.	Cicala - Tra 600 e 900.	
XX	Altra, mediocremente levigata - Guasta verso il taglio da un lato (85 - 47 - 33. Taglio 43). Peso 179,16.	2,653	Bigio - È una leptinite granitica.	Gimigliano - Reg. Mangani - Tra 500 e 600.	
XXI	Altra ma più tonda sopra - Mediocremente levigata (66 - 41 - 21. Taglio 38). Peso 97,72.	3,108	Grigio scuro - Strutt. granitica ad elementi molto minuti bianchi e bruni che fondono in sm. bianco, bigio, e sm. nero magnetico - Dur. 5,5 a 6 - polv. grigia - È una diorite a minuti elementi.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XXII	Altra - Superficie mediocremente levigata (75 - 41 - 25. Taglio 37). Peso 128,78.	3,053	Grigio chiaro - Struttura XX^na scistosa a piccoli elementi con molti granati alterati - Gneiss granatifero.	Nicastro - Reg. Foresta - Tra 400 e 700.	

XXIII	Accetta - come sopra (75 - 43 - 24. Taglio 39). Peso 117,80.	2,871	Bigio-oscuro - Affanite.	Cortale - Tra 250 e 800.
XXIV	Altra con fianchi e taglio più curvi - Piuttosto ben levigata - Guasta superiormente (69 - 40 - 24. Taglio 34). Peso 113,33.	3,022	Diorite a minuti elementi con poca mica.	Savelli - Tra 400 e 1000.
XXV	Altra a faccie irregolari e scabre: levigate verso il taglio (127 - 52 - 31. Taglio 48). Peso 344,39.	2,810	Struttura porfiroide - Pasta bigio-verdognola che si fonde = 3 in sm. vetroso bigio macchiato di nero - Piccoli XX^{ni} neri e chiari di 1 m m. circa, sparsi nella massa - Piriti alterate - Varietà di sienite porfirica.	Savelli - Tra 400 e 1000.
XXVI	Altra - Superficie mediocremente levigata - Taglio guasto (113 - 44 - 31. Taglio 40). Peso 295,15.	3,065	Tutto come al 24.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.
XXVII	Altra - Poco levigata - Guasta al taglio (106 - 46 - 34. Taglio 41). Peso 284,57.	2,926	Gneiss granatifero ad elementi piccolissimi.	Presso l'abitato di Platania - Tra 700 e 800.
XXVIII	Altra - Superficie ben levigata (113 - 51 - 33. Taglio 44). Peso 327,86.	2,996	Diorite a piccoli elementi - Pare vi sia un po' di quarzo.	Gimigliano - Reg. s. Felice - Tra 600 e 700.
XXIX	Altra - Sufficientemente levigata (117 - 46 - 34. Taglio 39). Peso 313,51.	3,051	Come al n. 3.	Cicala - Tra 600 e 900.
XXX V. Tav. I.^{a}	Altra più tondeggiante (88 - 36 - 28. Taglio 25. Peso 143,97.	3,084	Come al n. 24.	Belsito - Tra 400 e 700.
XXXI	Altra, ma più stretta superiormente - Poco levigata - Guasta massime al taglio (92 - 46 - 35. Taglio 38). Peso 220,50.	2,914	Diorite a minuti elementi con mica bianca, e alquanto scistosa.	Cicala - Tra 600 e 900.
XXXII	Altra più tonda - Rotta superiormente (102 - 45 - 36. Taglio tondo 35). Peso 274,67.	2,990	Come al n. 4 - Diorite.	Terr. Cicala - Reg. Montagna - Tra 800 e 900.
XXXIII V. Tav. III.^{a}	Altra quasi tonda, con superficie piana superiormente - Poco levigata - Taglio guasto (77 - 39 - 32. Taglio 28). Peso 181,37.	3,198	Granito a piccolissimi elementi e con poca mica bianca - Traccie di un elemento nero (mica o amfibolo) - È zeppo di graniti alterati dai più piccoli a quelli di 6 mm.	Cicala - Tra 600 e 900.
XXXIV	Altra come sopra, ma grande - Superficie scabra - Da un lato pare siasi usata per lisciatoio - Taglio molto usato (104 - 48 - 41. Taglio dovea essere di 35). Peso 390,13.	3,031	Struttura granitica - Feldispato bianco, e rossigno alla superficie per alterazione - Amfibolo nero verdastro - Dur. 5,5 e 6 - Diorite a minuti elementi.	? ?
XXXV	Altra terminante quasi a punta - Taglio guasto, ma alquanto arcuato a sgorbia - Una faccia molto convessa, dalla parte concava del taglio - Superficie levigata (103 - 49 - 34. Taglio 46). Peso 262,26.	3,129	Bigio oscuro omogeneo - Struttura affanitica - Un elemento bianco-grigio, si mostra evidente in qualche rara massa XX^{na} sparsa nella pasta - Come al n. 6 - Affanite.	Fossato-Serralta - Tra 400 e 800.
XXXVI V. Tav. II.^{a}	Altra rotta a metà - Pare dovesse essere molto lunga - Sup. levigata a lucido - Taglio con tendenza	2,960	Come al n. 24, con poca mica.	S. Pietro Apostolo - Tra 600 e 900.

	alla curva della sgorbia. (? - 33 - 21. Taglio 28). Peso 73,36.				
XXXVII V. Tav. III.ª	Accetta con faccia più curva dell'altra - Taglio come sopra - Liscia e lucente 75 - 39 - 23. Taglio 35). Peso 111.70.	3,000	Come al n. 24, con poca mica.	Feroleto - Tra 200 e 800.	
XXXVIII V. Tav. III.ª	Come sopra ma molto piccola - Levigata a lucido (43 - 23 - 11. Taglio 21). Peso 19,64.	3,248	Verde macchiettato di bianco-verdognolo - Strutt. finamente granosa - Durezza circa 6,5 - Non potei aver schegge, ma solo pochissima polvere biancastra che al cannello si fa magnetica.	In un piccolo rivo a Monterosso C. - Tra 250 e 350.	Deve aver servito come amuleto.
XXXIX	Altra come sopra, ma termina a punta più acuta - Taglio sempre come sopra (92 - 41 - 27. Taglio 39). Peso 160,40.	2,978	Come al n. 24.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	
XL	Altra ma colle faccie più eguali - Taglio guasto - Sup. ben levigata (79 - 40 - 24. Taglio 36). Peso 119,70.	2,920	Bigio oscuro - Tutto come al n. 3.	Fossato-Serralta - Tra 400 e 800.	
XLI V. Tav. III.ª	Altra molto sottile e larga - Una faccia più tondeggiante - Taglio netto e conservatissimo con leggera curvatura a sgorbia - Sup. molto levigata e lucida (90 - 62 - 16). Peso 146,06.	3,175	Bianco, bianco-grigio più o meno oscuro confusi in macchie e venature fibrose intrecciate - Lucentezza sericea - Struttura fibro-lamellare - Translucida al taglio e nelle schegge - Infusibile, ma si comporta come al n. 8 - Nella massa son disseminati cristalli rossastri di egual durezza 7, e macchiette nero-verdognole - Sillimanite.	Avuta da Gimigliano, ma trovata fuori del Comune da chi lavorava alla ferrovia.	Ornamento della collezione per forma e materia.
XLII V. Tav. III.ª	Utensile più volte ritilato - La superficie di lavoro levigata a lucido, lasciò a nudo alcune asperità del ciottolo - Taglio con leggera curvatura a sgorbia (61 - 42 - 18). Peso 70,40.	3,065	Verde macchiato di verde più chiaro e più oscuro a sfumature - Struttura finamente lamellare - Lucentezza meno cerea del 38 - È magnetica - Durezza 3 e 5,5 - Polvere biancastra magnetica, che al cannello si fa grigia e fonde = 5 in sm. bruno magnetico - Le schegge si scolorano e fondono sui margini come sopra.	Gimigliano - Reg. Difesa - Tra 600 e 900.	
XLIII V. Tav. III.ª	Accetta a fianchi quasi retti e paralleli - Levigata mediocremente (87 - 39 - 26). Peso 188,28.	3,043	Grigio oscuro - Come al n. 6 - Affanite.	Feroleto - Reg. s. Michele - Tra 300 e 700.	
XLIV	Altra più grande con i fianchi più curvi - Rotta in un fianco al taglio - Lisciata ma non lucida (100 - 48 - 32). Peso 311,08.	3,183	Bigio-verdognolo - Struttura affanitica - Dur. 5 e 6,5 - Polvere biancastra - Schegge fondono sui margini = 3 in sm. nero lucente magnetico.	Savelli - Tra 400 e 1000.	
XLV V. Tav. III.ª	Altra ma più corta e sottile - Levigata a lucido (59 - 39 - 15). Peso 68,35.	2,983	Color nerastro sparso di piccoli puntini lucenti come mica dorata - Polvere rossastra alla superficie alterata. Internamente è meno oscura e i punti son grigio-metallico - È magnetica - Dur. 5 e 5,5 - Polvere grigia - Struttura sub-lamellare - Schegge si comportano come al n. 42 - Serpentina prevalente con anfibolo e magnetite.	Sorbo s. Basile - Tra 500 e 800.	

XLVI V. Tav. IV.ª	Accetta a due tagli mal conservati - Superficie levigata e lucente - Solco curvo poco incavato in un fianco (70 - 35 - 32. Taglio 25 e 28). Peso 96,32.	2,980	Come al n. 2 - Roccia serpentinosa.	Gimigliano - Reg. Cottura - Circa 800.	
XLVII V. Tav. IV.ª	Altra come sopra - Il taglio più largo è rotto dall'uso - Quello stretto, quantunque rettilineo è lavorato come quelli a sgorbia ed è conservatissimo - Levigata e lucente (? - 35 - 13. Taglio 35 e 19). Peso 49,65).	2,999	Verde piuttosto chiaro a macchie con venature tendenti al bluastro - Strutt. scagliosa-compatta - Lucentezza un po' grassa come quella della giadeite - Dur. 5 e 5,5 - Polvere bianca - Fonde 2,5 ribollendo in sm. biancastro e vetro giallognolo.	Cotronei - Tra 300 e 900.	
XLVIII V. Tav. IV.ª	Ascia - martello - Superficie scabra - Taglio leggermente arcuato a sgorbia (141 - 101 - 61). Peso 1471,63.	2,943	Strutt. granitoide a due elementi di grossezza da 1 a 4 mm., ma molto intralciati e confusi - L'amfibolo bruno-verdastro con i soliti caratteri è in prevalenza - Il feldispato bianco-bigio in nuclei a struttura XX^{na} è alterato alla superficie - Diorite.	Terr. di Taverna - Tra 500 e 900.	Più grande di quelli calabresi della collezione Nicolucci.
XLIX V. Tav. IV.ª	Accetta a doppio uso di taglio e punta - Questa ultima è rotta - Sup. levigata quasi a lucido alle estremità, ma poco nella parte centrale (86 - 40 - 29). Peso 150,50.	3,008	Come il 24 - Diorite a piccoli elementi.	Spezzano grande a 500 m. verso ovest - Circa 700.	Interessantissimo oggetto per forma, della quale non s'avea conoscenza per ora.
L V. Tav. IV.ª	Utensili a sezione triangolare, della quale due vertici corrispondono ai lati del disegno, l'altro al centro, tondeggiante in modo che par lisciato - La faccia posteriore è quasi piana e finita a leggere scheggiature superficiali - lungo 73, largo alla base 14, alto 6 dalla base alla metà.		Selce biondo-cinerea.	Terr. Vena - Tra 100 e 300.	Pare una cuspide o un punteruolo (La punta è rotta).
LI V. Tav. IV.ª	Frammento di accetta stata tagliata e messa sul fuoco da un fabbro.		Bronzo - Manca quasi del tutto la patina.	Feroleto.	
LII	Cuspide di lancia di forma solita - lunga 170, larga alle alette 36, alla base 25.		Bronzo con meno stagno che nella precedente - Bella patina.	Bisignano.	
LIII V. Tav. IV.ª	Altra ma molto lunga colla costa faccettata - È rotta in due pezzi e manca della punta - Lunghezza che dovea superare per lo meno i 280 o 300 m. m.		Come sopra - Bella patina - Nella superficie di frattura vedesi la lega molto porosa ed ineguale per fusione difettosa.	Feroleto.	

(1)

(1) Al termine del lavoro mi viene annunziata la spedizione di altre 3 accette da Cortale, ed una da Cicala: quest'ultima sebbene guasta è lunga 20 centimetri.

II.

Le diverse epoche preistoriche in Calabria.

Epoca della pietra.

Delle epoche preistoriche calabresi non abbiamo rappresentate da questa raccolta che quella della pietra ed accennata quella del bronzo. La suddivisione della prima generalmente adottata in archeolitica e neolitica, non può far buona prova in Italia [1] dove o si trovano riunite in certe stazioni armi scheggiate e levigate, oppure per mancanza o scarsità di selce in alcune regioni, si dovettero adoperare fin dai primi tempi ciottoli lisciati. Per questo la Calabria trovasi nelle condizioni identiche del Piemonte, Liguria e regioni circostanti, cioè vi manca la selce che abbonda in noduli ed arnioni nei sedimenti cretacei e giuresi, terreni che mancano in Calabria; solamente verso il litorale all'altezza di Squillace comincia a mostrarsi la selce in certi calcari che aumentano poi in estensione nella provincia di Reggio, ed anche ad ovest di Cosenza se ne trova alquanto. Fin ora non mi fu dato scoprire altro oggetto di selce calabrese che il n. 50 della Tav. IV, il quale fu trovato nelle vicinanze di Vena fin dal 1870 circa, e venuto in possesso del capitano G. B. Adami, dal quale lo ebbi in dono in questi ultimi giorni. Per quanto abbia incaricato chi dovesse ricercare altri oggetti di selce nella stessa località, appena conobbi l'esistenza di questo, non ebbi altro, nè se ne conoscono altri da quei terrazzani. Dal carattere del lavoro non esiterei a metterlo tra quelli che vengono designati per neolitici, ma finchè rimarrà solo non ci autorizzerà certamente a far altre deduzioni. Della scoperta dell'ing. Vincenzo Rambotti (vedi introduzione) nella valle dell'Alessi, non posso dir nulla per ora non conoscendone altro che quello che se ne dice nel Bollettino citato; quantunque egli abbia designato quegli oggetti per rozzamente scheggiati, non mi attenterei, prima di averli visti o conosciuti meglio per nuove informazioni, a dire che dovessero caratterizzare l'epoca archeolitica calabrese, specialmente dopo che sappiamo che furono trovati insieme a cocci di stoviglie. Il piccolo numero di oggetti di selce in confronto alla straordinaria quantità di pietre lisciate, parmi che ci dimostri che l'uomo preistorico calabrese avesse dovuto servirsi fin dai primi tempi dei ciottoli levigati, ma che in pari tempo avesse scoperto quella poca selce e se ne fosse giovato per un numero limitato di piccoli oggetti come frecce, punteruoli, coltellini ecc. per i quali non si prestavano le altre roccie.

Le solite pietre lisciate non possono darci da sole un criterio per la distinzione della quale si tratta; la sola selce, e della qualità adatta, si prestò sempre egualmente bene allo scheggiamento, e quindi in epoca posteriore si potè ottenere una maggior finitezza col levigamento, ma questo non dovette succedere colle altre roccie. La differenza della forma dei ciottoli che si avevano sotto mano, la qualità, durezza,

[1] B. Gastaldi, *Iconografia di oggetti di remota antichità* ecc. (Dagli Atti dell'Accademia R. delle scienze. Torino, 1869). Ho preso da quest'ottimo scritto, questa e qualche altra considerazione, che mi pare avrebbero dovuto convincere chiunque, in Italia specialmente, si occupa di tale materia.

tenacità, e struttura della roccia dovevano essere le sole condizioni della riuscita del lavoro, e non si aveva che un solo mezzo di eseguirlo, cioè mediante levigatura con sabbie dure sopra roccie dure; potrebbe quindi succedere che oggetti meglio levigati fossero stati eseguiti durante la prima epoca e viceversa. Non sarà però irragionevole di assegnare ad un' epoca più recente quegli oggetti di forma più ricercata, e specialmente quelli destinati a più usi contemporaneamente quali sarebbero i n. 48 e 49. In questi ed in molti altri, vedesi uno spreco di lavoro non indifferente che ci fa considerare come tal lusso fosse poco adatto ai bisogni delle età più remote, quando potea bastar una rozza scure ben immanicata per tagliare, ed una pietra qualunque o tondeggiante o a punta per martello: solo in tempi più recenti, quando abbondarono gli utensili rozzi e primitivi, si dovette ricorrere ad una maggior ricercatezza compatibilmente con i mezzi disponibili.

Essendo impossibile adunque di ricorrere al carattere della levigatura per distinguere le due età, carattere che sarebbe troppo convenzionale anche se fosse possibile, è d'uopo rimettersene a scoperte più importanti e decisive che non dubito si potranno fare in seguito su quella regione, cioè di vere stazioni; in queste, gli oggetti ed utensili che accompagneranno le armi di pietra, e specialmente i fossili delle specie animali, ci forniranno quei criterî che ci abbisognano.

Epoca del bronzo.

Non sono che tre gli oggetti in bronzo di Calabria che ho potuto avere: una cuspide di lancia tipo solito al n. 52; un'altra ma di fattura molto più accurata ed elegante al n. 53, e di una lunghezza poco comune. Sì l'una che l'altra sono di lega piuttosto rossa per la prevalenza del rame al confronto di quella dell'ultimo oggetto ossia il frammento di accetta, che è di bronzo più giallo. Altri oggetti di bronzo preistorici rinvenuti colà, e dei quali ebbi notizia, sono i seguenti: alcune cuspidi di lancia del tipo e grandezza del n. 52, trovate in Valle Fiumarella verso Catanzaro; sono possedute dal sig. prof. Rambotti a Desenzano, tanto conosciuto per la ricca e stupenda raccolta degli oggetti della torbiera di Polada presso Lonato, condotta con tanto amore, classificata con ordine ammirabile, e della quale prepara una illustrazione che promette essere degna della raccolta stessa.

Un'accetta in bronzo trovata su quel di Cortale e posseduta un tempo dall'onorevole Andrea Cefalì Deputato al Parlamento; quest'accetta, se le informazioni avute sono esatte, dovea essere un paalstab.

In molti comuni catanzaresi e cosentini si trovarono e si trovano tuttavia bronzi d'ogni sorta che vengono acquistati da forestieri, o rimangono, sebbene in numero più ristretto in raccolte private. Alcuni vennero in mie mani ed erano della Magna Grecia, ma mi è lecito supporre che una certa porzione di tali bronzi che sono in raccolte calabresi, siano dell' epoca preistorica. Mi riservo a nuove indagini nella mia nuova gita in Calabria.

Passo sotto silenzio l'epoca del ferro, ultima delle età preistoriche che forma l'anello di congiunzione coi tempi storici e che forse spetta più a questi che a quelli. È questione troppo difficile a toccarsi da noi, dove son poche le località che abbiano

fornito monumenti ben accertati appartenenti a quest'epoca ed anche se avessi oggetti in ferro per la Calabria non ne parlerei certamente, eccetto che le circostanze del rinvenimento non autorizzassero a supporli veramente preistorici.

III.

Luoghi di provenienza degli oggetti in pietra.

Daremo prima uno sguardo alla configurazione generale della regione della quale ci occupiamo, e che per la sua costituzione è distinta affatto dal rimanente della penisola.

La catena apenninica terminando col Monte Pollino scende con ripido pendìo a perdersi nella pianura del Crati a sud di Castrovillari. Di qui ricomincia ad alzarsi il terreno verso quel nucleo centrale granitico della Sila che forma gran parte delle due provincie, con un altipiano ondulato tra 1300 e 1600 metri e con una elevazione di oltre i 1900 metri ad est di Cosenza, ed altra di 1785 al Gariglione. Questa regione centrale silana è circondata da una fittissima frangia di contrafforti e diramazioni frastagliata e profondamente solcata da innumerevoli valli e burroni talvolta inaccessibili, che vanno perdendosi ad est e sud-est verso il litorale ed il marchesato, a sud verso il litorale e l'istmo, ad ovest verso Cosenza e la catena del litorale mediterraneo colla quale si confondono. Tutta questa catena montuosa è formata di graniti, gneiss micascisti, talvolta così alterati alla superficie da esser trasformati in sabbie feldispatiche e quarzose da rassomigliare ai sedimenti.

Verso ovest, sulla sinistra della valle del Crati, segue il litorale una catena secondaria di terreni apenninici soprapposti agli scisti, la quale a sud di Cosenza si confonde con i contrafforti della Sila sulla destra del Savuto. La catena principale segue colla dorsale fino a Tiriolo, dove sostiene un monte di calcare isolato e poi si abbassa nuovamente per scomparire sotto i terreni pliocenici dell'istmo Squillace e s. Eufemia, e ricomparire quindi al di là di questo. L'istmo suddetto divide in due regioni distinte la Calabria: la depressione è molto forte, perchè la massima elevazione della dorsale strettissima dalla quale si dipartono gli affluenti di destra del Corace e qualche piccolo rivo di sinistra del Lamato, non supera i 250 metri tra Caraffa e Settingiano.

Malgrado gli sforzi per generalizzare le mie indagini a tutto il territorio delle due provincie, non riuscii che ad avere per ora notizie oppure oggetti dalla massima parte dei comuni compresi tra il parallelo di Cosenza e l'istmo di Catanzaro, in modo che devo considerare questa zona solamente per meglio esplorata in questo breve tempo, e con i mezzi limitati dei quali potevo disporre [1]; però ho potuto anche aver notizie di molti comuni del restante della provincia catanzarese a nord, e di molti altri a sud dell'istmo.

Ho creduto bene di unire a questa parte della presente Memoria, una tabella dimostrante il risultato materiale delle ricerche fatte in più di 90 comuni, completata

[1] Per questa regione, limitata come si è detto, ho le indicazioni relative a più che i due terzi dei comuni compresi; per le due provincie, ho indicazioni sopra un terzo dei rispettivi comuni.

colle notizie avute dagli scritti del Nicolucci e col numero degli oggetti che so positivamente essersi scoperti in alcuni, ma che andarono in possesso di altri, o dispersi, o nascosti con gelosa cura dal proprietario. Forse qualcheduna delle indicazioni avrà bisogno di conferma o di correzione, ma in complesso credo di poterne tener conto, ed ampliarla in seguito ([1]).

Come si è potuto vedere nella descrizione degli oggetti ho cercato di dare le meno inesatte indicazioni sul sito ove furono rinvenuti e sulle quote di altitudine relative; nessuno fu trovato, che io mi sappia, in vere stazioni; sono dunque da ritenersi tutti di provenienza sporadica. L'azione continuamente demolitrice degli agenti esterni su quei terreni granitici e scistosi singolarmente favorita dal diboscamento, la quale riesce evidente anche per il corso di pochi anni a chi conosce quelle provincie, può dare una certa idea dei cambiamenti che avranno dovuto subire nell'esterna loro configurazione dai tempi preistorici in poi. E da questa causa ne sarà derivata la dispersione delle reliquie preistoriche di molte stazioni non sufficientemente al riparo dalle corrosioni del terreno, venendo trasportate in una o più direzioni differenti: e quindi motivo d'incertezza e di errori per chi ora volesse sulla scorta di tali rinvenimenti, ricercare il sito delle primitive stazioni. Ma potendosi continuare le ricerche sul sito stesso, tenendo conto di tutte le circostanze relative, e massime delle condizioni topografiche circostanti alle zone più fertili di tali prodotti, e potendo finalmente contare anche per una certa parte sulla fortuna, si potrà fare qualche cosa di più positivo. Per ora non cercherò che di fissare bene i dati che ho potuto riunire, e se ne scaturirà qualche considerazione, non tralascerò di accennarla.

Ho sentito ripetermi da alcune persone che la maggior parte delle pietre in questione si trovino alla Sila centrale; dovremo prestar fede a questa asserzione, o ritenerla un errore? Stando agli oggetti da me posseduti furono rinvenuti tutti in prossimità dei luoghi abitati, o al più distanti di 5 a 6 chilometri, e tra i 200 e 900 di elevazione. Alcuno di questi mi fu dato coll'indicazione «trovato alla Sila» ma assunte nuove e più esatte informazioni, risultò che fosse stato trovato sulle diramazioni silane e non più di 900 o 1000 metri al massimo. Non è a dire che si trovino solamente in vicinanza dei comuni o villaggi in conseguenza di una coltivazione più estesa attorno tali centri, perchè la coltivazione stessa si spinge a molte parti dell'altipiano centrale, e se realmente vi esistessero tali oggetti non rimarrebbero occulti. Il sottotenente Berardelli del mio reggimento essendo in licenza a Belsito sua patria, ha attraversato la Sila da Rogliano a s. Giovanni in Fiore domandando continuamente notizie dei *truoni,* ma dalle risposte avute ha potuto darmi nuova conferma del fatto già conosciuto per altre indagini, cioè che non si trovino tali oggetti nell'altipiano centrale oltre i 900 o 1000 metri al più. Se confrontiamo questo fatto coll'abbondanza delle pietre lavorate nei territorî dei comuni tra i 600 e 900 metri di altitudine, possiamo ridurre l'asserzione di quelle persone summentovate a questa:

([1]) In questa tabella ho messo alcuni comuni nella colonna indicante che vi si trovano alcuni oggetti, perchè sapevo solamente che se ne trovano, senza essere abbastanza informato sulla quantità relativa.

« i truoni si trovano per la gran parte alla Sila » ed è in questi termini che l'udii ripetere da altri, intendendo per Sila la zona tra i 600 o 700 e i 900 circa.

Se ci allontaniamo dalla zona suddetta scendendo verso i comuni situati più in basso, vediamo in complesso che va scemando la quantità degli oggetti, in modo che giunti alle vicinanze del litorale e nel marchesato non se ne trovano più ; ed anzi in alcuni comuni di questa ultima regione non si conoscono neppure. Possiamo dunque ammettere che i limiti di tali rinvenimenti stiano tra i 900 e 200, ma che la zona più fertile sia quella vicina al limite superiore.

Lo stesso fatto si verifica, almeno per il limite superiore, nella regione a sud dell'istmo, e nella regione montuosa del litorale mediterraneo, ma non posso accertarlo per il limite minimo, chè anzi suppongo che lungo il litorale da Paola ad Amantea si debbano ritrovare anche al livello del mare ([1]).

Considerando la regione intorno alla Sila tra i 200 e i 900 metri nella quale si rinvengono le ascie di pietra dovremo noi ritenerla per quella delle stazioni preistoriche? Parmi non sia da accettarsi per questa gli stessi limiti di quella, per le modificazioni che devono aver subìte da due cause, cioè dall'azione stessa degli abitanti d'allora i quali devono necessariamente aver disseminato tali oggetti oltre i luoghi abitati, e dalle erosioni e trasporti operati dalle acque. La prima di queste cause avendo esteso i due limiti, e la seconda avendone modificato l'inferiore, noi dovremo ridurre di molto questo ultimo e di poco il superiore. Credo dunque di poter dedurre da queste considerazioni, che la popolazione antistorica avesse scelto le sue stazioni nella zona montuosa che ricinge la Sila preferibilmente tra i 400 e 800 metri di altitudine: e che lo stesso sia avvenuto nella catena del litorale mediterraneo e a sud dell'istmo, facendo però eccezione per ora della spiaggia mediterranea e di quella jonica a sud dello stesso istmo sulle quali non ho dati sufficienti. Il clima invernale troppo rigido dell'interno della Sila e la probabile esistenza di foreste abitate da belve che ne avrebbero impedito l'accesso all'uomo non provveduto di armi adatte: la mancanza nel litorale dell'est al di qua dell'istmo di luoghi che presentassero le condizioni volute per sicurezza e difesa, sono altre ragioni in appoggio alla succitata opinione.

Non indicherò luoghi meglio determinati come quelli che dovessero guidarci nelle indagini dirette a scoprire qualche stazione ; in terreni come questi, dove ad ogni passo si presentano situazioni tali che la fantasia accetterebbe per altrettanti veri ricoveri da selvaggi, è difficile la scelta. Solamente accennerò alle adiacenze del Monte di Tiriolo, ed alle caverne che si trovano nei territorî di Grimaldi e Belsito.

([1]) Il Nicolucci ha avuto 29 oggetti dal mandamento di Sambiase, comuni di Gizzeria, Platania e Sambiase, e molti di questi oggetti furono trovati quasi al piano, anzi alcuni vicino alla marina di s. Eufemia. Questo fatto non contradice alle considerazioni che farò in seguito, avuto riguardo alle frequentissime erosioni nei fianchi di quelle valli e vicino alle vette di quei monti, per le quali quella regione trovasi ogni anno ricoperta dalle piene di quei corsi d'acqua: queste vi lasciano sedimenti molto estesi di materiali trasportati da distanza breve, ma da altitudini elevate.

Tabella dei Comuni

nei quali si trovarono armi di pietra, o dai quali ho potuto avere notizie relative all'argomento.

Provincia	Circondario	Mandamento	Comune	Quota di elevazione media dell'abitato	Vi si trovano oggetti in pietra			Numero di quelli	
					Nessuno	Alcuni	Molti	Avuti da me	Conosciuti per informazioni
Catanzaro	**Catanzaro**	Borgia	Girifalco	450	—	1	—	—	—
»	»	Catanzaro	Catanzaro	330	—	1	—	1	—
»	»	Cropani	Andali	620	—	—	1	—	—
»	»	»	Belcastro	500	—	1	—	—	—
»	»	»	Cerva	800	—	—	1	—	—
»	»	»	Cropani	340	—	1	—	—	—
»	»	»	Sersale	800	—	—	1	—	—
»	»	Soveria	Sellia	620	—	1	—	—	3
»	»	»	Simmeri (e Crichi) .	300	—	1	—	—	—
»	»	»	Soveria	390	—	1	—	—	3
»	»	»	Zagarise	570	—	1	—	—	—
»	»	Taverna	Albi	730	—	1	—	—	—
»	»	»	Fossato-Serralta . .	730	—	—	1	4	7
»	»	»	Pentone	700	—	1	—	—	1
»	»	»	Sorbo s. Basile . . .	570	—	—	1	7	—
»	»	»	Taverna	550	—	1	—	1	—
»	»	Tiriolo	Amato	500	—	1	—	—	—
»	»	»	Caraffa	370	—	1	—	—	2
»	»	»	Marcellinara	350	—	1	—	—	—
»	»	»	Miglierina	560	—	1	—	—	—
»	»	»	Tiriolo	680	—	—	1	1	5
»	»	»	Settingiano	250	—	1	—	—	—
»	**Cotrone**	Cirò	Cirò	340	1	—	—	—	—
»	»	»	Cruccoli	370	1	—	—	—	—
»	»	»	Melissa	280	—	1	—	—	—
»	»	Cotrone	Cotrone	0	1	—	—	—	—
»	»	»	Cutro	250	1	—	—	—	—
»	»	»	Isola di C. Rizzuto .	80	1	—	—	—	—
»	»	Petilia Policastro . .	Mesuraca	370	—	1	—	—	—
»	»	»	Petilia-Policastro . .	400	—	1	—	—	—
»	»	»	Petronà	890	—	—	1	—	—
»	»	S. Severina	Cotronei	500	—	—	1	1	—
»	»	»	Rocca Bernarda . . .	240	1	—	—	—	—
»	»	»	S. Mauro Marchesato	290	1	—	—	—	—
»	»	»	S. Severina	320	1	—	—	—	—
»	»	»	Scandale	350	1	—	—	—	—
»	»	Savelli	Caccuri	690	—	1	—	—	—
»	»	»	Casino	900	—	—	1	—	—
»	»	»	Cerenzia	640	—	1	—	—	—
»	»	»	Pallagorio	540	1	—	—	—	—
»	»	»	Savelli	970	—	—	1	5	—
»	»	»	Umbriatico	450	1	—	—	—	—
»	»	Strongoli	Belvedere Spinello . .	330	—	1	—	—	—
»	»	»	Casabona	310	1	—	—	—	—
»	»	»	Rocca di Neto . . .	170	1	—	—	—	—
»	»	»	S. Nicola dell'Alto . .	560	—	1	—	—	—
»	»	»	Strongoli	320	1	—	—	—	—
»	**Monteleone**	Mileto	Mileto	350	—	1	—	—	2
»	»	Monteleone	Monteleone	470	—	1	—	—	3
»	»	Monterosso Calabro	Monterosso (Calabro)	300	—	1	—	1	2
»	»	»	S. Nicola di Crissa .	520	—	1	—	—	1

Provincia	Circondario	Mandamento	Comune	Quota di elevazione media dell'abitato	Vi si trovano oggetti in pietra			Numeri di quelli	
					Nessuno	Alcuni	Molti	Avuti da me	Conosciuti per informazioni
Catanzaro	**Monteleone**	Serra s. Bruno . . .	Brognaturo	750	—	—	1	—	1
»	»	»	Serra s. Bruno . . .	760	—	—	1	—	5
»	»	Soriano	Sorianello	470	—	1	—	—	1
»	»	»	Soriano	270	—	1	—	—	2
»	**Nicastro**	Cortale	Cortale	430	—	—	1	6	4
»	»	»	Jacurso	440	—	1	—	—	—
»	»	Feroleto	Feroleto	350	—	—	1	4	10
»	»	»	Feroleto piano . . .	270	—	1	—	—	—
»	»	Gimigliano	Cicala	830	—	—	1	8	5
»	»	»	Gimigliano	580	—	—	1	5	11
»	»	»	S. Pietro Apostolo .	770	—	—	1	2	—
»	»	Maida	Maida	260	—	1	—	—	2
»	»	»	Vena	250	—	1	—	1	—
»	»	Martirano	Conflenti	570	—	1	—	—	1
»	»	»	Martirano	420	—	1	—	—	1
»	»	»	Motta s. Lucia . . .	600	—	1	—	—	2
»	»	Nicastro	Nicastro	260	—	1	—	1	6
»	»	Sambiase	Gizzeria	600	—	—	1	—	5
»	»	»	Platania	760	—	—	1	1	4
»	»	»	Sambiase	200	—	—	1	—	22
»	»	Serrastretta	Decollatura	780	—	—	1	—	10
»	»	»	Serrastretta	840	—	—	1	—	—
Cosenza	**Cosenza**	Aprigliano	Aprigliano	680	—	1	—	—	—
»	»	»	Pietrafitta	650	—	1	—	1	—
»	»	Dipignano	Dipignano	640	—	1	—	—	—
»	»	»	Domanico	720	—	1	—	—	—
»	»	»	Paterno Calabro . .	610	—	1	—	—	—
»	»	Grimaldi	Altilia	560	—	1	—	—	—
»	»	»	Grimaldi	650	—	1	—	—	—
»	»	»	Malito Grimaldi . .	700	—	1	—	—	—
»	»	Rogliano	Belsito	660	—	1	—	1	—
»	»	»	Rogliano	640	—	1	—	—	—
»	»	S. Giovanni in Fiore	S. Giovanni in Fiore	950	—	1	—	—	1
»	»	Scigliano	Bianchi	830	—	—	1	—	3
»	»	»	Carpenzano	580	—	1	—	—	—
»	»	»	Panettieri	920	—	1	—	—	—
»	»	»	Pedivigliano	620	—	1	—	—	—
»	»	»	Scigliano	640	—	1	—	—	3
»	»	Spezzano grande . .	Spezzano grande . .	800	—	1	—	1	—
»	»	»	Spezzano piccolo . .	720	—	1	—	—	—
»	**Paola**	Aiello	Serra d' Aiello . . .	340	—	1	—	—	—
»	»	»	Terrati	300	—	1	—	—	—
»	»	Amantea	Lago	450	—	1	—	—	—

IV.

Delle roccie che furono adoperate.

Si è detto che il nucleo di questa regione consta di roccie granitiche e scistose: oltre ai graniti gneiss micascisti si hanno quasi tutte le specie e varietà di roccie che ne dipendono, ed anche alcune emersioni di roccie dioritiche e serpentinose. Una raccolta litologica calabrese sarebbe interessantissima, e sono pentito di non averla fatta perchè ora mi sarebbe utilissima; ho raccolto invece pochissimi esemplari di alcune località, e alcuni ciottoli dei fiumi riservandomi a ricercare in posto le roccie corrispondenti. Quelle che ho meco o che ricordo di aver vedute sono le seguenti:

Graniti — Bianchi, bigi con mica bianca o con biotite, differentissimi per dimensione d'elementi, per disposizione variata degli stessi, per prevalenza dell'uno sugli altri, o per mancanza di qualcuno. Densità trovate da 2,60 a 2,76. Varietà con mica a ventaglio. Pegmatiti, leptiniti ecc. Varietà zeppa di graniti trapezoedrici, dens. da 2,80 a 3. Graniti sienitici, tormaliniferi, protoginici, porfiroidi.

Gneiss — Infinite varietà, densità media = 2,66. Gneiss granatifero, dens. = 2,80. Molti trovanti di questa varietà con altri minerali accessorî, molto tenace, e zeppa di granati in grani di forma indistinta, hanno densità di 3,12. Gneiss sienitico ed altri.

Micaschisti — Molte varietà e passaggi ad altre roccie. In alcuni scisti alla mica si sostituisce il talco; si hanno anche scisti filladici, ecc.

Sieniti — Bigia, bianco-verdognola, rossa. Di questa ne vidi con poco amfibolo dens. = 2,56; altra nero-rossastra con molto amfibolo, dens. = 2,80 e 2,88. Sienite porfirica verdognola, rosea, ecc.

Dioriti — Diorite ad elementi piuttosto grossi, medî, minuti, appena discernibili; affaniti, amfiboliti. Densità 2,94 qualcuna con mica, ma le altre 3 e quelle passanti all'amfibolite 3,11. — Diorite porfirica. Il Von Rath ha designato per porfido dioritico una bellissima roccia caratteristica di Calabria, nella valle della Fiumarella, ma pare che non tutti dividano la sua opinione, e vogliono che sia una sienite porfirica; gli elementi sono quarzo e feldispato con prismi di mica e di amfibolo disseminati nella massa: le densità che avrei trovate sono 2,61-2,66.

Serpentina — Diverse emersioni, e distinta tra queste è quella di Gimigliano che forma il bellissimo marmo oficalce di quella località. Vi si trovano esemplari di bella serpentina nobile verde e nera, altri con elementi accessorî cioè amfibolo, diallagio, asbesto, amianto, crisotilo, ecc. Dn. = 2,60 a 2,66. Trovanti di serpentina ricca in diallagio, dens. 2,66 e durezza 5 ½. Finalmente alcuni ciottoli di eufotide. È da avvertirsi, che l'orneblenda delle roccie calabresi è sempre caratterizzato da prevalenza del ferro sulla composizione ordinaria, per cui dopo fusione è molto magnetico.

Rimane dunque accertato dal confronto degli oggetti preistorici che si conoscono fino ad ora trovati in Calabria colle roccie del paese, che quasi tutti furono lavorati servendosi di queste roccie stesse; e se dico quasi tutti e non tutti, è perchè non essendosi finora scoperto in Calabria giacimento alcuno di fibrolite, giadeite ed altri minerali rappresentati forse in queste raccolte, non si può ancora affermare per tutti

una tale origine. Lasciando dunque da parte qualche oggetto la cui natura non seppi determinare, parliamo solamente di quelli fatti di materie non ancor scoperte in quella regione. Due dei miei, uno del Nicolucci ed uno che so essere posseduto da altra persona, sono di *fibrolite* o *sillimanite,* cioè di quei minerali andalusitici molto somiglianti tra loro, che vennero riconosciuti la prima volta come adoperati per questi oggetti antistorici, dagli assaggi dell'illustre chimico Damour [1]. Un altro pure posseduto dalla persona suddetta è di giadeite.

Nè l'una nè l'altra di queste specie non è ancora stata scoperta in Calabria, e senza escludere la possibilità che vi possono essere rappresentate, credo tuttavia che si debba ammettere anche la contraria ipotesi. Se poi oltre alla possibilità, dobbiamo considerarne la probabilità, parmi che almeno per le fibroliti, quest'ultima condizione non si verifichi. Difatti queste specie minerali furono rinvenute fino ad ora in piccole porzioni, in fibre, in fasci bacillari nei graniti e gneiss di qualche parte della Francia, del Tirolo, della Boemia, Moravia, Baviera e dell'America; se per quante varietà di queste roccie ho potuto osservare in Calabria non mi occorse vedere neanche la minima traccia di queste specie, potrà sembrare probabile che vi si possano trovare esemplari delle dimensioni del n. 41 nella Tav. III? Ammettendo adunque o l'uno o l'altro caso, vediamo di spiegare la provenienza di questi oggetti. Nel caso che questi minerali esistano in quella regione, avranno servito agli abitanti d'allora come le altre roccie, ma per limitato numero di oggetti stante la rarità dei pezzi abbastanza grandi da poter esser lavorati. Ma se tali materie non esistono in Calabria, e perciò non vi si potessero mai scoprire, sarebbe indispensabile credere che questi oggetti vi fossero importati o da popolazioni invadenti o per cambî e relazioni di commercio. In generale non si ammettono queste invasioni o queste relazioni durante l'epoca della pietra, e sta bene, ma si è ancora proclivi a negare l'importazione di certi oggetti fatti di minerali che non si riconobbero ancora esistenti in quella regione, quasichè questo fatto potesse infirmare l'opinione succitata. Or bene, non si potrebbero conciliare, supponendo questa importazione avvenuta in epoca più recente cioè contemporaneamente a quella del bronzo? Oramai si è d'accordo sulla scarsità del bronzo e sull'uso degli utensili ed armi di pietra continuato ancora per molto tempo durante questa nuova epoca; senza entrare nelle diverse opinioni circa all'origine del bronzo in Italia, ma citandole solamente è facile vedere come nel caso che il bronzo sia stato composto sul sito, le armi di giadeite, sillimanite ed altre possano esservi state importate per le relazioni tra le popolazioni, già cominciate: se il bronzo fu importato o per invasione o per queste relazioni, le dette armi l'abbiano accompagnato, e debbono l'onore della scelta ai caratteri importanti dei minerali dei quali erano fatte.

Una ultima osservazione circa la scelta dei ciottoli di alcune roccie per la fabbricazione di queste armi, e specialmente per quelli di roccie serpentinose. Come si può vedere nella descrizione di questi oggetti, sono tutti di un peso specifico superiore a tutti quanti gli esemplari presi da me in posto oppure nei trovanti, eppure

[1] A. Damour, *Sur la composition des haches en pierre*, ecc. Paris, 1865 (Ext. des Comptes rendus de l'Acad. des sciences).

gran parte di questi sono perfettamente eguali per i caratteri esterni e perfino nella durezza. Non voglio dire con questo che non siano anche queste ascie fatte in paese, anzi credo che tale differenza sia dovuta alla maggior proporzione di elementi accessorî, ma son tratto ad ammirare la facilità di quegli abitanti primitivi nello scegliere i pezzi di maggior densità, anche quando si potea difficilmente avvertire, per la somiglianza degli altri caratteri esterni.

V.

Dei diversi tipi di forma.

Avrei desiderato di seguire la distinzione usata dal Nicolucci per la forma, in cunei, accette, sgorbie, ma incontrai qualche difficoltà dipendente forse dagli oggetti della mia piccola raccolta. Non sempre queste differenze sono chiaramente determinate, anzi numerose gradazioni dell'una all'altra, generano incertezza. Dovrei designare per accette, quelle che hanno il taglio più largo del corpo dell'istrumento: per cunei quelle che l'hanno più stretto; però non so decidermi a riconoscere un' accetta nel n. 7 quantunque di taglio largo più del corpo, perchè talmente ingrossata superiormente da rendere difficile l'immanicatura. Così pure non mi sembrano cunei i n. 14 e 15 (Tav. I e IV) quantunque con taglio più stretto del corpo, e basta dare uno sguardo alla loro forma e sottigliezza specialmente della prima, per convincersene. Finalmente la scure-martello n. 48 Tavola IV, ha il taglio leggermente arcuato a sgorbia come i numeri 35 al 39, e non si può dire che abbia servito a quest'uso: nè l'oggetto al n. 41 Tav. III cesserà di esser considerato un' accetta, quantunque abbia il taglio come sopra. Per togliere di mezzo ogni causa d'errore, designai tutti gli oggetti per accette, ma dalla forma, misure ed altri caratteri, potrà il lettore farsi un criterio per spiegarne l'uso. Ho messo prima quella allungata a taglio strettissimo che pare uno scalpello, indi da quelle a taglio largo più del corpo passai a quelle di taglio più stretto, poi a quelle col taglio leggermente arcuato e finalmente a quelle con i fianchi paralleli: in ultimo ho descritto quelle a doppio taglio, e poi le altre a doppio uso.

Parlando di tipi di forma, non si creda che io voglia stabilire per la Calabria una distinzione da quelle altre provincie italiane dove abbondano le pietre lisciàte. Anche qui manca quella costanza di tipo ed anche di dimensioni resa impossibile dalla forma e natura dei ciottoli adoperati; ma se c'è differenza da questa alle altre provincie suddette, la farei consistere nelle seguenti:

1.° Maggiore abbondanza in Calabria di simili oggetti, e specialmente di alcuni tipi più rari, come i martelli-scure: difatti se ne conoscono 7 posseduti dal Nicolucci, due da me, ed uno stato raccolto per me, ma caduto poi in mano di altra persona.

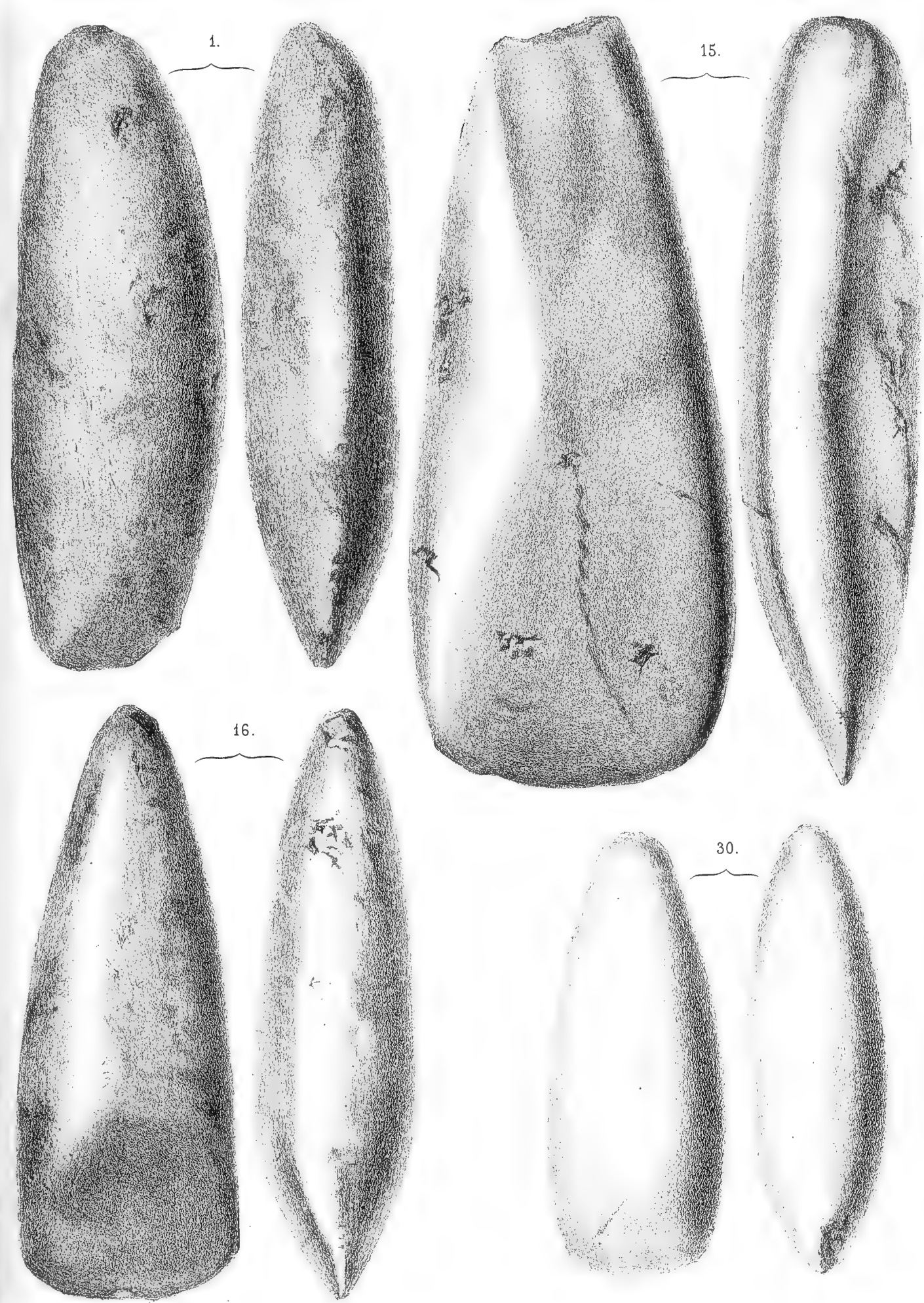
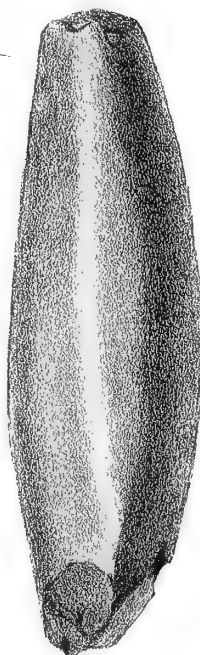
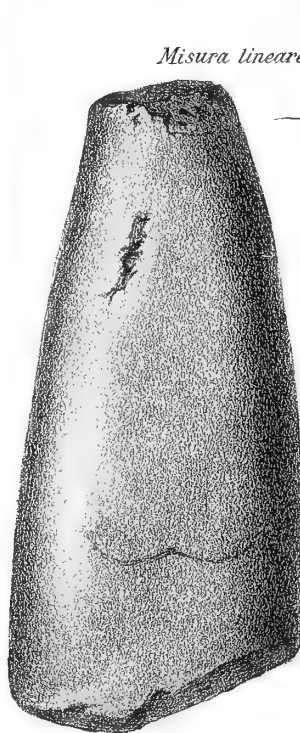
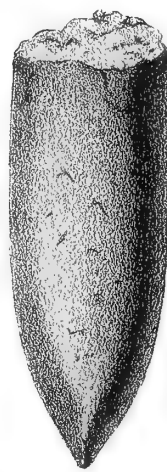
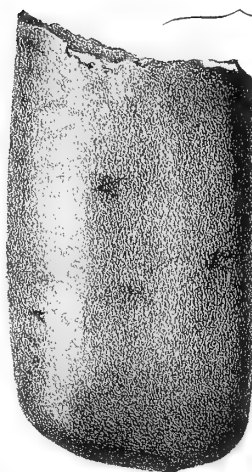
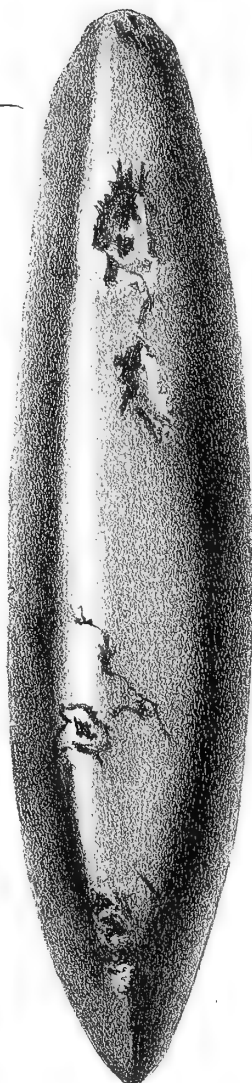
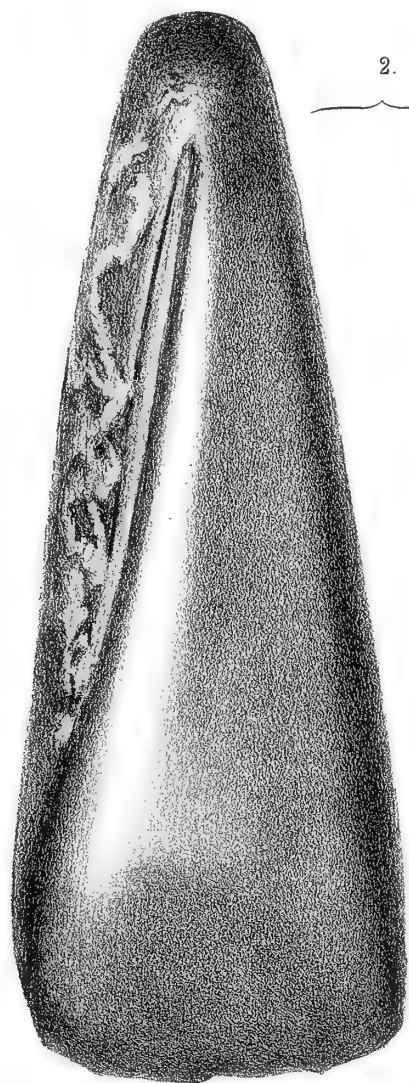
2.° Dimensioni straordinarie di alcune accette o cunei, che trovano riscontro nei tipi nordici; difatti il Nicolucci ne ha di 170 mm. per 49; la mia al n. 15 Tav. I è di 153 per 65, peso 543: quella al n. 6 Tav. II, è di 168 per 76, ma dovea essere molto più lunga, e pesa 939,72: e da pochi giorni seppi che a Cicala se ne trovarono due della lunghezza di 200, delle quali una è destinata per la mia collezione.

3.° Rarità di quelle di roccie non ancora scoperte in paese; difatti mentre sono abbondanti nelle provincie specialmente dell'alta Italia quelle di cloromelanite, giadeite e simili, di Calabria non ne conosciamo che una di giadeite e 4 di fibrolite.

Il lettore avrà già rilevato l'importanza della forma del n. 49 Tav. IV. Mi consta che sono stati rinvenuti in Calabria e specialmente nella regione ad ovest e sud-ovest di Cosenza dei pesi a forma sferoidale allungata con un solco a metà per tutta la circonferenza, ma per quanto abbia fatto, non mi è ancora riuscito di averne. Non ho ancora trovato dei mazzuoli forati, ma dalle notizie avute sembra che non siano mai stati scoperti in questa regione.

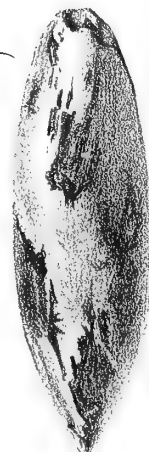
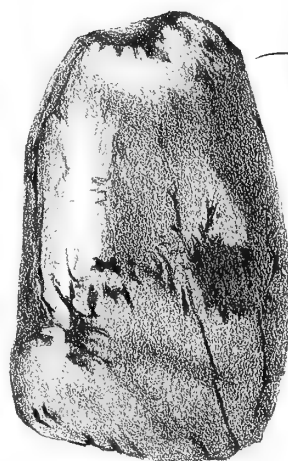
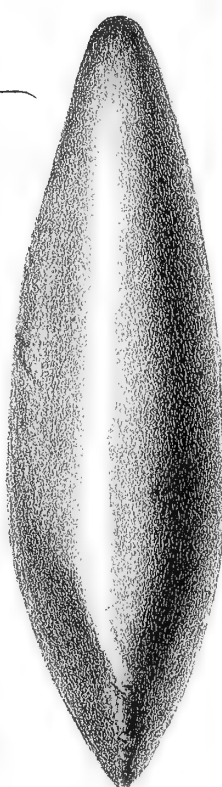
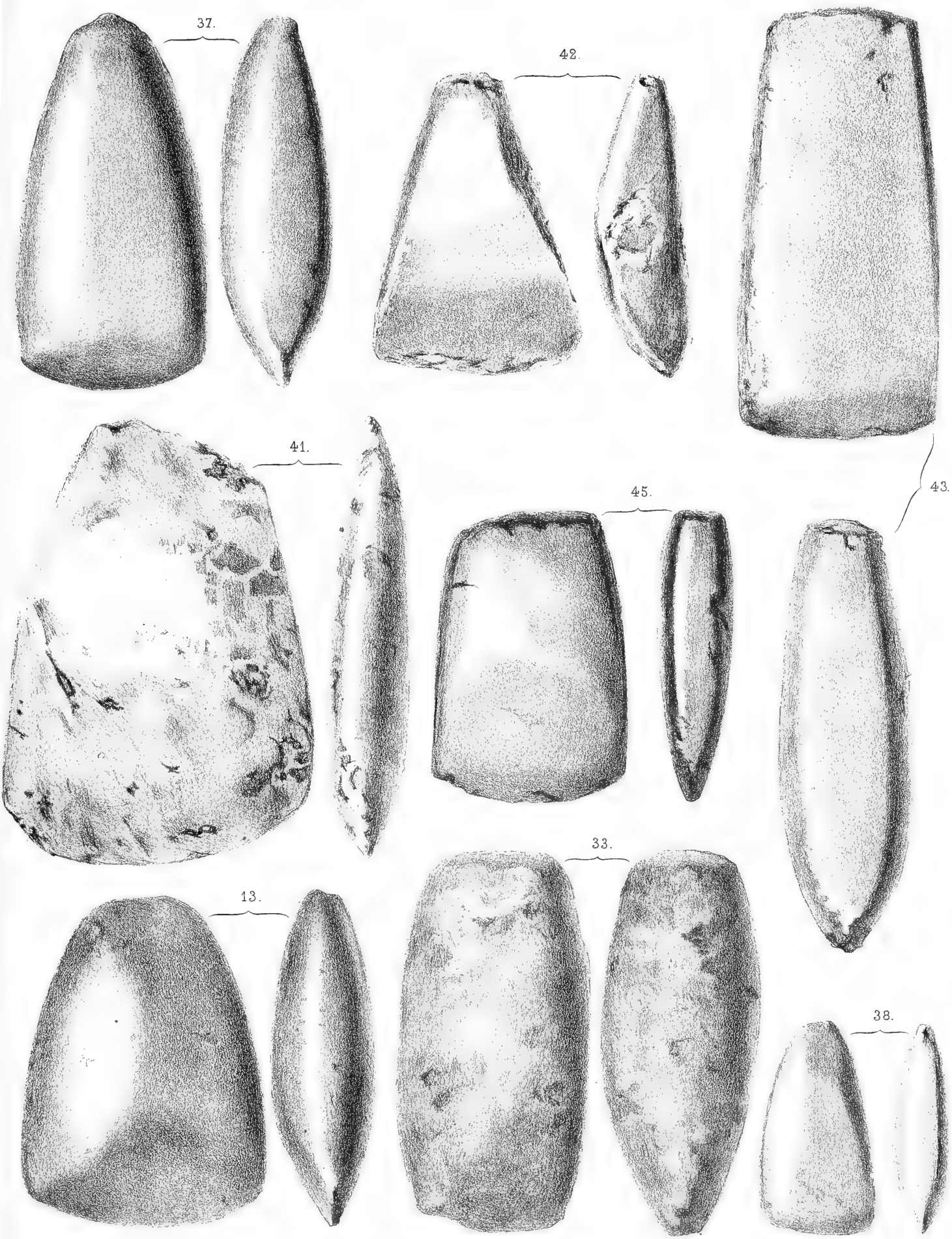
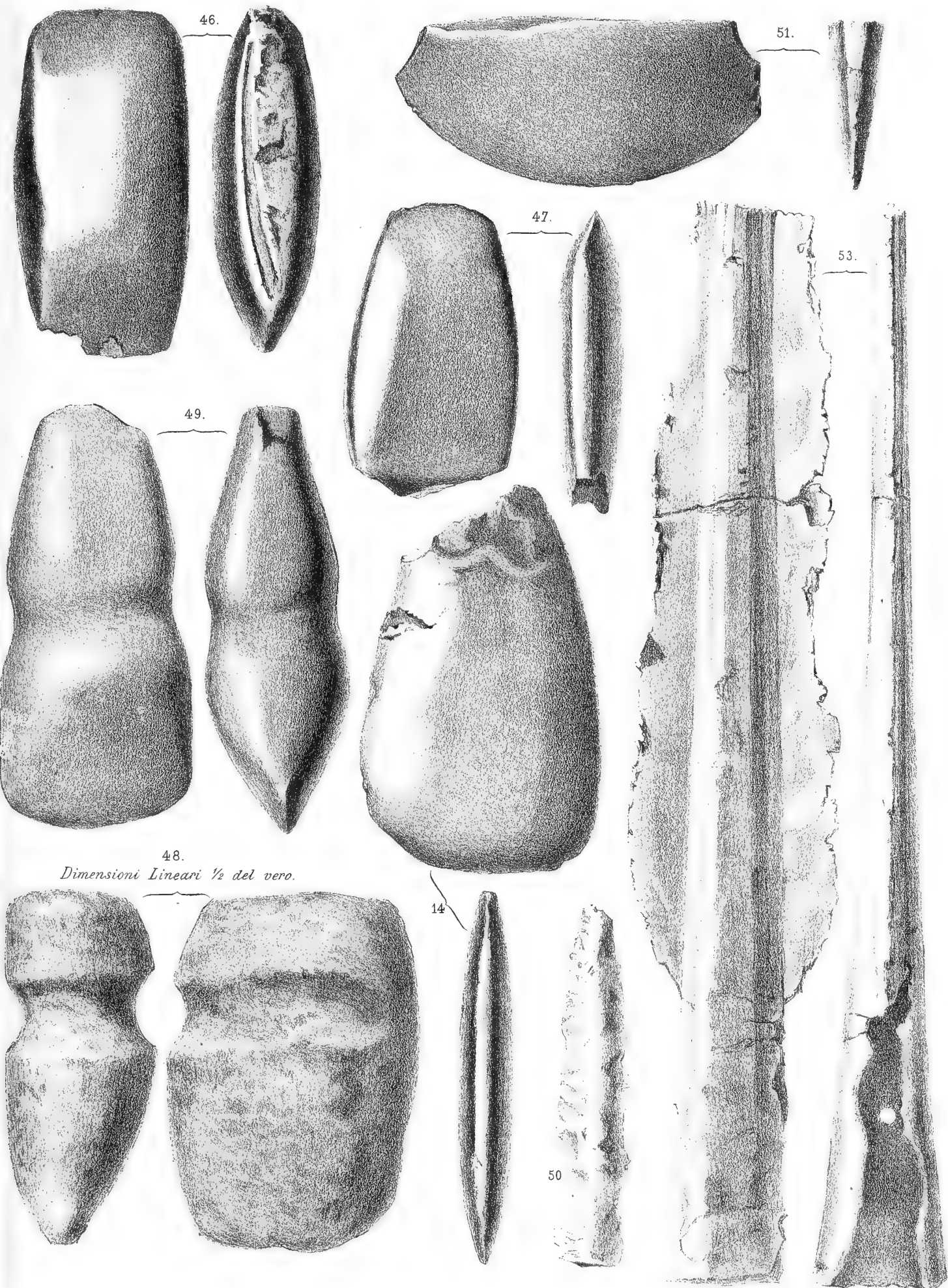
Ho detto nell'introduzione, che si trovano in Calabria ciottoli che sono ritenuti dai contadini come aventi eguale origine dei *truoni*, che hanno la stessa importanza e vengono designati con lo stesso nome. Ne ho avuto circa una ventina di tondi oppure ovali, discoidali, di ovoidali più o meno allungati: alcuni leggermente scabri. ma per la gran parte molto lisci ed alcuni lucenti; sono di granito, gneiss, arenaria scistosa, quarzite bianca o grigio-rossastro ed alcuni di roccia serpentinosa simile ai n. 2, 14 e 46. Non presentando alcun carattere che li distinguesse decisamente dagli altri ciottoli, non ho creduto tenerne conto, e raccomandai sempre a chi faceva laggiù le mie veci di ricercare le vere scuri. Ma se non conviene accettare ad occhi chiusi fatti e notizie che non siano scrupolosamente accertate nella loro autenticità, non conviene, credo io, cadere nell'esagerazione opposta, riggettandoli totalmente quando o la tradizione o l'opinione popolare richiama sovra essi la nostra attenzione. Ritengo adunque che non si debbano per ora considerare come adoperati effettivamente nelle epoche preistoriche per pietre da fionda o per altro fine, ma che siano state ritrovate fuori del loro naturale giacimento, come lo provano la credenza popolare ed i luoghi di provenienza nei quali si distinguono facilmente dagli altri ciottoli dei corsi d'acqua o dei conglomerati. Se per ora questo fatto può trovare spiegazione nel trasporto operato e per qualche fine durante l'epoca storica, in seguito a nuove indagini ed alla scoperta di qualche stazione, si potrà decidere la questione. Tra gli altri ne ebbi uno a forma di scure ricurva lateralmente ma tondeggiante nella parte larga: questo è lisciato e lucente a striscie nel fianco concavo, in modo da rendere evidente l'uso al quale era destinato, cioè di lisciatoio. Ma sebbene mi sia stato dato come *truono,* non mi son permesso di metterlo nella raccolta, sulla considerazione che potea aver servito benissimo a quell'uso anche in altre epoche non esclusa la presente.

Giunto al termine di questo lavoro dovrei riassumere le poche conclusioni che traggono origine dall'esame degli oggetti calabresi, dalle notizie che ho potuto riunire e dalle considerazioni che mi hanno suggerito; ma queste conclusioni son poche per ora e talmente ovvie che non saranno sfuggite ad alcuno nel seguito della lettura. Se non ho potuto ottenere un risultato che fosse pari al desiderio, ma superiore alle forze mie ed ai mezzi che avevo disponibili, basterà la convinzione che qualche notizia o indicazione relativa alla paleoetnologia della regione che abbiamo considerata, non sia totalmente inutile. Ed in questa speranza, intendo, per quanto me lo permetteranno le circostanze, proseguire nelle ricerche da lungi, e completarle poi sul luogo nel miglior modo che sarà possibile.

1.
15.
16.
30.

2.
36.
6.
Misura lineare metà del vero
11.
8.

G. Ruggero dis.

Torino Lit. f.lli Doyen

G. Ruggero dis. Torino, Lit. f.lli Doyen

Sull'applicabilità delle superficie degli spazî a curvatura costante.

Nota del dottor LUIGI BIANCHI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Le considerazioni seguenti mi sono state suggerite dallo studio della Memoria di Klein sulla geometria non-euclidea (Mathematische Annalen, IV Band, p. 573). Esse sono un primo tentativo di ricerche, che forse potranno condurre a risultati ulteriori.

1. — Chiamo *applicabili* due superficie dello stesso spazio o di due spazî diversi a curvatura costante, quando le espressioni dei loro rispettivi elementi lineari, calcolate nella *determinazione metrica* (*Massbestimmung*) dello spazio in cui esistono, sono eguali o si possono render tali con un conveniente cambiamento di coordinate.

Un essere, le cui cognizioni geometriche non si estendessero oltre le due dimensioni, che vivesse successivamente sopra due così fatte superficie applicabili, effettuando sopra di esse le misurazioni colle leggi delle rispettive determinazioni metriche degli spazî, in cui quelle superficie sono collocate, le troverebbe identiche; almeno per quelle regioni dell'una, che hanno corrispondenti regioni sull'altra.

Ciò che segue è relativo alle *superficie di rivoluzione* di uno spazio a curvatura costante $-\frac{1}{4c^2}$, chiamando con questo nome una superficie luogo di cerchi, i cui centri siano sopra una retta r (*asse*) e i cui piani siano tutti perpendicolari alla r stessa. Questi piani passano tutti per la conjugata r' di r rispetto all'*assoluto* [1], e poichè la corda di contatto fra uno di tali cerchi e la sezione del suo piano coll'assoluto è la polare del centro del cerchio rispetto a questa sezione, cioè la retta r', segue che tutti i cerchi suddetti toccano l'assoluto nei punti A, B, ove la r' incontra l'assoluto stesso. Le tangenti ad uno qualunque di questi cerchi uscenti dal centro sono le rette, che vanno ai punti A, B. Una superficie di rivoluzione è dunque bitangente all'assoluto e la corda di contatto è la conjugata r' dell'asse rispetto all'assoluto.

Si costruisca ora una determinazione metrica speciale prendendo a *conica fondamentale* quella in cui un certo piano P (fissato ad arbitrio) passante per r' interseca l'assoluto; allora si potrà far *accordare* la determinazione speciale colla generale in quel punto di r che è il polo di P, in modo cioè che gli angoli intorno

[1] Cfr. per es. D'Ovidio, *Studio sulla Geometria projettiva* (Annali di Matematica, Serie 2ª. Vol. VI, pag. 72).

a questo punto e i segmenti infinitesimi uscenti da esso abbiano nelle due determinazioni la stessa misura, con una scelta conveniente delle costanti della determinazione speciale (Cfr. Klein, § 7, 14).

Una superficie di rivoluzione S, intorno all'asse r, nella determinazione generale, è ancora di rivoluzione nella speciale, intorno al medesimo asse. Infatti i piani passanti per r' sono perpendicolari ad r anche nella determinazione speciale, perchè il punto ove r incontra il piano all'infinito P della determinazione stessa, è il polo di r' rispetto alla sezione di P coll'assoluto, la quale è la conica fondamentale della determinazione metrica speciale. Inoltre le sezioni di P con S si appoggiano in due punti A, B a questa conica fondamentale e quindi sono cerchi anche per la suddetta determinazione, i loro centri trovandosi manifestamente sulla retta r.

Nella determinazione metrica speciale così costruita prendiamo tre assi ortogonali, vale a dire, tre assi passanti per i vertici di un triangolo conjugato rispetto alla sezione di P coll' assoluto, dei quali l'asse z sia la retta r. Assumendo come coordinate di un punto le coordinate cartesiane relative alla detta terna di assi, poichè nella determinazione speciale l'assoluto diviene una sfera di raggio $2c$, dovrà la sua equazione prendere la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4c^2 = 0$$

e l'elemento lineare dello spazio secondo la determinazione generale sarà dato dalla formola (Cfr. Klein, § 14):

$$(1) \qquad ds^2 = \frac{4c^2\left\{(xdx + ydy + zdz)^2 + (4c^2 - x^2 - y^2 - z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\right\}}{(4c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

Consideriamo ora una superficie S, che sia di rivoluzione intorno all'asse z (ossia r) nella determinazione generale e quindi anche nella speciale. Le coordinate di questa superficie saranno date dalle formole:

$$(2) \qquad x = \rho\cos\omega\,, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,, \quad z = \varphi(\rho),$$

mediante le quali vogliamo ora calcolare l'elemento lineare di S nella determinazione generale. Dalle (2) si ricava:

$$xdx + ydy = \rho d\rho\,, \quad dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

quindi la (1) ci darà per il quadrato dell'elemento lineare richiesto:

$$(3)\ ds^2 = 4c^2\,\frac{4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho)}{\left(4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)\right)^2} + \frac{4c^2\rho^2}{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}d\omega^2.$$

Ma questa forma dell' elemento lineare conviene anche alle superficie di rivoluzione dello spazio euclideo, quando si prendano a linee coordinate i meridiani ed i paralleli; si ha dunque il teorema:

Le superficie di rivoluzione degli spazî a curvatura costante sono applicabili sulle superficie di rivoluzione dello spazio ordinario; ai meridiani ed ai paralleli delle une corrispondono i meridiani ed i paralleli delle altre.

Da quest'ultima parte del teorema vanno però escluse le superficie di curvatura costante.

È noto inoltre che nello spazio ordinario una superficie di rivoluzione può deformarsi in infiniti modi, pur restando di rivoluzione, e in questo caso i meridiani ed i paralleli restano tali per le successive deformate, escluse solo le superficie di curvatura costante. Potremo quindi enunciare l'altro teorema:

Le superficie di rivoluzione degli spazî a curvatura costante si dividono in infinite classi di superficie applicabili le une sulle altre ed, escluse quelle di curvatura costante, in quelle appartenenti ad una stessa classe i meridiani ed i paralleli dell'una corrispondono ai meridiani ed ai paralleli dell'altra.

Mediante la formola (3) si potranno determinare le superficie di rivoluzione ordinarie applicabili sopra una data superficie di rivoluzione dello spazio non-euclideo, e viceversa, data una superficie di rivoluzione dello spazio ordinario, si potranno trovare quelle pur di rivoluzione dello spazio non-euclideo applicabili sopra di essa. La risoluzione di questi problemi dipende dall'integrazione di un'equazione differenziale di 1° ordine, che nel primo caso si riduce subito alle quadrature.

2. — Consideriamo ora qualche caso particolare ed in primo luogo cerchiamo l'elemento lineare di una sfera col centro nell'origine O degli assi il cui raggio misurato nella determinazione speciale sia r, essendo evidentemente le sfere di centro O tali per le due determinazioni. L'elemento lineare (1) espresso in coordinate polari ρ, θ, φ della determinazione speciale suddetta è dato da:

$$ds^2 = 4c^2 \frac{\rho^2 d\rho^2 + (4c^2 - \rho^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \cos^2\theta d\varphi^2)}{(4c^2 - \rho^2)^2}; \tag{4}$$

ponendovi $\rho = r$, $d\rho = 0$, si avrà l'elemento lineare richiesto della sfera colla formola:

$$ds^2 = \frac{4c^2 r^2}{4c^2 - r^2}(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2);$$

ma questa espressione del quadrato dell'elemento lineare appartiene anche ad una sfera di raggio $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$ dello spazio ordinario. Dunque:

La sfera degli spazî di curvatura costante è applicabile sopra la sfera ordinaria.

Si può osservare che il raggio $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$ è reale (essendo r reale) tanto per la geometria iperbolica, quanto per l'ellittica (Klein, § 11, 12). Infatti, se c è immaginario $= ic_1$, l'espressione precedente diviene $\frac{2c_1 r}{\sqrt{4c_1^2 + r^2}}$ e, se c è reale, siccome $2c$ è il raggio della sfera assoluta misurato nella determinazione speciale, per i punti accessibili dello spazio iperbolico si ha sempre $r < 2c$. Si noti ancora che nella espressione $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$, che dà il raggio della sfera ordinaria applicabile su quella dello spazio non-euclideo, si può sostituire ad r il raggio di quest'ultima sfera misurato

nella determinazione metrica del suo spazio (Klein, pag. 619, nota). Indicando con R questo raggio, dalla (4) ponendovi $d\theta = d\varphi = 0$ si avrà;

$$dR = \frac{4c^2}{4c^2 - \rho^2} d\rho,$$

da cui: $R = 2c \text{ sett tang h } \frac{r}{2c}$, $r = 2c \text{ tang h } \frac{R}{2c}$, $\frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}} = 2c \text{ sen h } \frac{R}{2c}$;

sicchè si può dire che sopra una sfera di raggio R di uno spazio a curvatura costante $-\frac{1}{4c^2}$ vale la geometria di una sfera ordinaria di raggio $2c \text{ sen h } \frac{R}{2c}$.

3. — Poniamo ora la condizione che la superficie di rivoluzione, il cui elemento lineare è dato dalla (3) sia applicabile sul piano ordinario, ossia che abbia una curvatura nulla. È noto che, se l'elemento lineare di una superficie è dato dalla formola:

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2,$$

quando E, G siano funzioni della sola u, la curvatura K è data da:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{d\sqrt{G}}{du} \right).$$

Esprimendo quindi che la curvatura della superficie il cui elemento lineare è dato dalla (3) è nulla, si avrà la equazione di condizione

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}{\sqrt{4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho)}} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{\sqrt{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}} \right\} = 0,$$

ossia, facendo una prima integrazione:

$$\frac{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}{\sqrt{4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho)}} \frac{d}{d\rho} \frac{\rho}{\sqrt{4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho)}} = k,$$

dove k è una costante arbitraria. Eseguendo la derivazione, si trova:

$$(5) \quad 4c^2 - \varphi^2(\rho) + \rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) = k^2 \left\{ 4c^2\left(1 + \varphi'^2(\rho)\right) + 2\rho\varphi(\rho)\varphi'(\rho) - \rho^2\varphi'^2(\rho) - \varphi^2(\rho) \right\} \left\{ 4c^2 - \rho^2 - \varphi^2(\rho) \right\}.$$

Integrando questa equazione differenziale del 1° ordine si avranno tutte le superficie di rivoluzione dello spazio non-euclideo applicabili sul piano ordinario. Cerchiamo se fra queste superficie ne esistono di quelle del 2° ordine. Nella determinazione speciale la curva meridiana di una tale superficie di rivoluzione dovrà essere un'ellisse, un'iperbola od una parabola. Quest'ultimo caso non è possibile, perchè, se si prende

$$z = \varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{2p}$$

la (5) non può essere soddisfatta. Restano dunque i primi due, che si possono compendiare nella formola:

$$\varphi(\rho)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2}\,,$$

dove le due costanti a, b sono reali, od una di esse è puramente immaginaria. Con questo valore di $\varphi(\rho)$ si trova facilmente che la (5) diviene:

$$(6)\qquad a^4(4c^2-b^2)(a^2-\rho^2)=k^2\left\{4c^2(b^2-a^2)\rho^2+a^4(4c^2-b^2)\right\}\left\{(4c^2-b^2)a^2+(b^2-a^2)\rho^2\right\}.$$

Trasportando tutti i termini nel 2° membro dovrebbero essere nulli i coefficienti delle diverse potenze di ρ; ora il coefficiente di ρ^4 è: $4c^2k^2(b^2-a)^2$, dunque si dovrà avere:
$$k=0 \quad\text{oppure}\quad b^2=a^2\,.$$

Ma se $b^2=a^2$, dovrà anche essere nullo il coefficiente di ρ^2, cioè $a^4(4c^2-b^2)$, ossia:
$$b^2=a^2=4c^2$$
e si avrebbe quindi per soluzione l'assoluto, che è da escludersi perchè i coefficienti dell'elemento lineare (3) diverrebbero allora infiniti.

Resta dunque il caso di $k=0$. Allora, perchè la (6) sia soddisfatta, sarà necessario e sufficiente che si abbia: $b^2=4c^2$. Questa è una vera soluzione, perchè, restando a arbitrario, l'espressione (3) non presenta alcuna singolarità.

Le superficie del 2° ordine, che abbiamo così trovato, hanno nella determinazione metrica speciale per lunghezza dell'asse di rotazione $2c$, che è anche il raggio dell'assoluto nella determinazione stessa. Quindi esse sono tangenti all'assoluto nei punti C, D, nei quali r lo incontra (possono essere cioè pensate come superficie di rotazione tanto intorno ad r quanto intorno ad r'). Ne segue che quelle superficie e l'assoluto si segano lungo quattro generatrici, poichè il loro piano tangente comune in C le taglia amendue lungo le generatrici CA, CB e parimenti quello in D lungo le DA, DB. Reciprocamente è facile vedere che ogni superficie del 2° ordine, avente a comune coll'assoluto quattro generatrici, appartiene alla classe trovata ed è quindi applicabile sul piano ordinario.

Inoltre si vede che le sezioni di una tale superficie con piani passanti per r, r' sono due sistemi di geodetiche ortogonali, poichè esse sono le linee ρ, ω della (3); esse corrispondono quindi a due sistemi di rette ortogonali del piano, su cui la superficie è applicabile.

4. — Le cose precedenti stanno in una notevole relazione colla teoria dei movimenti nello spazio non-euclideo ([1]). Un movimento in un tale spazio non è altro che una trasformazione omografica, che lascia invariato l'assoluto, cangiando ciascuna generatrice in un' altra generatrice dello stesso sistema. Vi sono poi quattro generatrici, due di un sistema e due dell'altro, che restano affatte invariate per il movimento, e con esse e coll'assoluto restano pure invariate le superficie del 2° ordine del fascio che passa per quelle quattro generatrici. I risultati, che abbiamo precedentemente ottenuto, possono dunque enunciarsi così:

([1]) Cfr. la Memoria di Lindemann nel T. VIII dei Math. Ann. p. 56.

Le superficie dello spazio non-euclideo che restano invariate per un movimento dello spazio stesso, sono applicabili sul piano ordinario.

Inoltre per ciò che precede: Esse sono le uniche superficie di rivoluzione del 2° ordine che godono di questa proprietà.

Come soluzione limite si presenta anche l'assoluto, che già comparve nella discussione della (6).

Se delle quattro generatrici le due di ciascun sistema coincidono, le rette r, r' passano per il punto comune alle due uniche generatrici e giacciono nel piano ivi tangente all'assoluto; le superficie del fascio suddetto toccano l'assoluto lungo le due generatrici e si possono riguardare come sfere, il cui centro è nel punto $r\,r'$ sull'assoluto, ossia all'infinito ([1]). Queste superficie si chiamano orisfere o sfere limiti. Come caso particolare del teorema generale enunciato si ha quindi l'altro:

Le orisfere sono applicabili sul piano ordinario ([2]).

Se c diventa infinito lo spazio non-euclideo degenera nell'ordinario e quelle superficie del 2° ordine divengono cilindri circolari, che hanno per asse l'asse di rotazione e traslazione del movimento.

([1]) Lindemann, l. c. p. 113.

([2]) Cfr. Beltrami. *Teorica degli spazî di curvatura costante.* Annali di Matematica, Serie 2ª, Tomo II.

Intorno al mal di gomma degli agrumi
(*Fusisporium Limoni*, Briosi).
Memoria dell'ing. GIOVANNI BRIOSI

direttore della Stazione chimico-agraria sperimentale di Roma,

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Nel 1862, per la prima volta, avvertivasi in Sicilia una nuova malattia negli agrumi, destinata ad acquistarsi di poi fama ben triste.

Oggidì a tutti son noti i guasti immensi cagionati dal così detto *mal di gomma*, che ha distrutti gli agrumeti di intere provincie, ed ha gettato nella miseria centinaia di famiglie che da pochi ettari di terreno ricavavano a sufficienza per condurre vita non solo agiata, ma lauta e ricca. Gli agrumi costituiscono la coltivazione più rimuneratrice che si conosca in agricoltura; quel che essa rende sembrerebbe favoloso se non fosse vero. A Messina si calcolava che un albero di limone in pieno sviluppo produceva in media 2000 frutti all' anno; ora se si tien conto che fra un albero e l'altro non corre distanza maggiore di 4 a 5 metri, e che i limoni si vendono ad un prezzo che oscilla fra 20 e 40 lire al migliaio, rilevasi facilmente quale rendita enorme ricavavasi da un ettaro di terreno messo ad esperidi.

I danni già cagionati si possono calcolare a diecine di milioni di lire, ed il mal di gomma che invase oltre gli agrumeti della Sicilia, quelli del Napoletano, della Liguria (*mal degli agrumi*), del lago di Garda ecc. prese tale estensione da raggiungere le proporzioni d'una sventura nazionale. Non solo gli agricoltori ed i proprietarî direttamente danneggiati, ma anco i comuni, le provincie ed il Governo fortemente se ne preoccuparono; e diverse giunte di scienziati, in epoche diverse, vennero nominate per eseguire in proposito studî e ricerche. Ultimamente ancora, è noto, il Ministero d'Agricoltura, con lodevole iniziativa offriva in premio 25 mila lire a chi avesse trovato un rimedio efficace.

Detto flagello nemmeno è limitato al nostro paese, poichè sino dal 1832 fu avvertito alle Azzorre nelle cui aranciere (dell'isola san Miguel particolarmente) sembra abbia avuto origine, ed ove verso il 1840 raggiunse il massimo d'intensità e distrusse un quarto degli aranci dell'isola come asserisce il Fouquè nella *Revue des Deux Mondes* (1); nel 1845 sviluppossi nel Portogallo ove infierì specialmente dal 1858 al 1861 come fan fede i migliori agronomi del paese (2) ed i rapporti dei consoli

(1) Annali d'agricoltura siciliana n. 60. Palermo, 1874.

(2) Lopes Mendes che ne scrisse nel vol. II dell'*Archivo Rural:* Josè Joaquim de Arevedo Junior ne parlò nel *Faylense:* il dott. Josè Maria Grande nel suo *Manuale del coltivatore:* Joao Ignacio Ferreira

italiani interrogati in proposito per cura del nostro Ministero d'Agricoltura. Nel 1871 l'illustre prof. Wöhler lo trovò alle isole Balearie ove faceva e fa tuttora strage non lieve (1), e sembra, da quanto affermasi, non sconosciuto in Grecia ed in diverse isole dell'Arcipelago (2).

Quello che siasi dal pratico tentato non è credibile, può dirsi che non vi è unguento o polvere fra le tante che offre la farmacia, o che mette sotto mano l'economia domestica, la cui azione non sia stata esperimentata, assieme alle operazioni le più varie sugli agrumi presi dalla gomma. Però malgrado i saggi consigli suggeriti da una giunta di distinti scienziati nominata dal Governo nel 1868 (3), consigli diretti più a prevenire che a curare il male, e le pregevoli osservazioni e ricerche dei professori, Gasperini (4), Froio (5), Thorpe, Garovaglio e Cataneo (6), De Luca (7), Silvestri e Tornabene (8) ecc. può dirsi che oggidì ancora oscilliamo in mezzo ai

Lapa nell'*Archivo Rural*, anno VII, n. 9 ecc. Vedi Alfonso, *Trattato sulla coltivazione degli agrumi*, 2ª ediz., pag. 463, *Annali d'agricoltura siciliana* (Inzenga).

(1) Nel novembre scorso infatti l'illustre prof. A. de Bary mi scrisse che il dr. W. era occupato all'isola Maloria nello studio di tale malattia.

(2) In una visita da me fatta nel 1874 all'isola di Malta non trovai invero una coltivazione di agrumi molto estesa; però negli agrumeti esistenti non si aveva contezza di mal di gomma, cosa che mi venne anco confermata dal nostro Console Generale, il quale più tardi mandavami la lettera seguente, a lui indirizzata dal signor Torregiani, e che pubblico perchè in essa si fa cenno d'un'altra malattia causata da un verme fra noi fortunatamente non ancora avvertito. Eccola:

« Onorevole signor Console

« Valletta 14 settembre 1874.

« Intorno al quesito fattomi da V. S. ho l'onore di esporle:

« Che la malattia della gomma non si ebbe mai in Malta, poichè di essa nessuno della presente « generazione si ricorda, e non è menzionata nè dal prof. Carlo Giacinto che nel 1811 pubblicava « l'*Agraria di Malta*, nè dal prof. Ierafa, tanto minuzioso in quanto concerne le nostre coltivazioni.

« Abbiamo però avuto qualche raro caso della malattia che noi chiamiamo *canchero*; ma dessa « non è la malattia della gomma, si bene l'*esastosi cancheriforme* del prof. Cuppari della R. Univer- « sità di Pisa.

« L'anno passato poi a mezzo maggio, le arancie tutte avevano uno o più vermi fra la buccia « e gli spicchi, simili a quelli che talvolta esistono nel formaggio; tutti i frutti così tocchi cadevano; « cosicchè d'estate era impossibile di procurarsi un'arancia, anche pagandola a qualunque prezzo, per « un ammalato per esempio.

« Questo è quel poco che posso dire a V. S., però stia certa, che ne garantisco l'esattezza, essen- « domi per l'occasione consultato coi migliori giardinieri e coltivatori di agrumi dei nostri principali « centri produttori. Ho l'onore ecc. Della S. V.

« Devmo F. M. TORREGGIANI

« Segretario delle esposizioni della Società economico-agraria ».

(3) *Rapporto della Commissione per studiare la malattia degli agrumi in Sicilia a S. E. il sig. Ministro d'Agricoltura e Commercio.*

(4) *Osservazioni sopra alcune malattie degli organi vegetativi degli agrumi.* Napoli (Memoria che non potei procurarmi).

(5) *Idem.* Memoria ridotta ad uso dei coltivatori ed accresciuta di altre esperienze. Napoli, 1868.

(6) *Studî sulle principali malattie degli agrumi.* Milano, 1875.

(7) Vedi Flühler dott. Ad., *Die Krankheit der Agrumen in Sicilien.* Stans in *Central-Blatt für Agrikulturchemie* ecc. von Biedermann, vol. V, 1874, pag. 368 e seguenti.

(8) *Rapporto al Ministero d'Agricoltura* ecc.

dubbî ed alle incertezze; e che nulla, o quasi, ci è di veramente assodato, tanto riguardo alle cause del male, quanto rispetto ai rimedî per guarirlo.

Il male continua, e l'agricoltore dai suoi attacchi si difende unicamente coll'allevare accanto agli alberi già grossi ed in piena forza, pianticelle giovani, destinate a rimpiazzare le antiche che possono morirgli da un anno all'altro. Chi gira pei giardini di agrumi adulti sente bene spesso ripetersi dal contadino: *Eccellenza, il vero rimedio poi, sono questi testimonî*, indicandovi col dito i giovani albereti (*i testimonî*) messi nel controsesto fra gli alberi vecchi già ammalati o destinati ad esserlo fra breve.

Per quanto riguarda l'avvenire, cioè pei giardini giovani che si vanno formando, un primo ristoro, non rimedio radicale, sembra trovato, ed è la pratica che ce lo ha fornito. L'esperienza infatti ha dimostrato che il melangolo (*Citrus bigaradia*, R.) è molto più resistente alla gomma del portogallo (*Citrus aurantium*, R.), e del limone (*Citrus limonum*, R.). Provengono questi da talee o da seme, donde la conseguenza di adottare per le nuove piantagioni il melangolo e di innestare su di esso tutte le altre specie più delicate [1]. Non va però taciuto che il melangolo è piuttosto lento nello sviluppo, specialmente nei primi anni di vita, che i frutti delle varietà sopra

[1] Secondo me gli unici consigli che nello stato attuale delle nostre conoscenze possonsi dare all'agricoltore pratico, sono:

1° Le nuove piantagioni farle esclusivamente di melangoli (arancio amaro, arancio forte *Citrus bigaradia*, R.), innestati o da innestarsi a limone od a portogallo, almeno ad 1 metro sopra il suolo; e ciò per impedire che nel caso di attacco dell'oggetto il morbo raggiunga le radici.

2° Nell'impianto di nuovi agrumeti preferire terreni piuttosto sciolti e porosi, specialmente nel sottosuolo, nei quali l'acqua non si fermi e ristagni.

3° Non abbondare mai oltre misura colle irrigazioni; essendo fuori dubbio che la molta acqua favorisce lo sviluppo del male.

4° Seguire l'uso di forzare le piante a dar frutti fuori stagione col negare l'acqua prima, ed irrigarle poi quando si sono ridotte a morire quasi di sete (pratica colla quale si riesce, come è noto, a far fiorire il limone in qualunque epoca), solo allorquando si è decisi a voler perdere l'agrumeto.

5° Sorvegliare continuamente gli agrumeti, e tosto che un albero viene attaccato, tagliare colla massima cura nel sito di sgorgo tanto la corteccia che il legno sottostante, sino a che non si arrivi al legno sano e bianco; estendere anzi il taglio della corteccia in ogni senso, in special modo verticalmente, sino a che il legno sottoposto (volgarmente *alburno*) non si mostri perfettamente bianco, del colore cioè che presenta, quando si fa un taglio in ramo sano, posto lontano dal punto in cui si manifestò la gomma. È buona precauzione, nell'incertezza in cui siamo sulla causa vera del male, di portar fuori dell'agrumeto il legno tagliato e bruciarlo, e nella piaga, non è forse male applicare qualche sostanza leggermente caustica.

6° Quando il male si manifesta sulla parte sotterranea dell'albero, ciò che si avverte per l'improvviso ingiallire delle foglie (fenomeno però che può essere dovuto anco ad altre malattie), il caso è molto più grave, e l'albero più difficilmente si salva; ad ogni modo, scoprire subito le radici e tagliare accuratamente quelle che trovansi attaccate (la loro corteccia è rammolita, mucillaginosa, nerastra e puzzolente), ricoprire di poi le rimanenti piuttosto leggermente per poterle riesaminare all'occorrenza, indi sospendere per certo tempo le irrigazioni.

7° Tenere sempre nell'agrumeto un vivaio di piante giovani da avere pronte, per sostituire a quelle che muoiono.

8° Infine tentare su larga scala l'adozione di concimi minerali (in Sicilia quasi del tutto sconosciuti), almeno a titolo di esperimento.

esso innestate non riescono mai così perfetti nella qualità e nella forma, come quelli innestati sopra limone o portogallo, e che inoltre esso pure non è risparmiato dalla gomma ma solo meglio se ne difende ([1]).

Una sostanza fluida, scura, per lo più torbida, puzzolente, che rammenta la gomma, ma una gomma *sui generis* che si direbbe alterata e guasta, presentasi abbondante e più o meno all'improvviso al pedale degli alberi, o direttamente sulle radici; la corteccia della parte per tal modo attaccata si screpola, si solleva, secca o marcisce (radici), e la pianta da prima ingiallisce, poi a poco a poco perde le forze e muore. Tali in poche parole sono i sintomi esterni con cui periscono gli agrumi attaccati dal *mal di gomma* ([2]).

Questo scolo gommoso, come è naturale, fu quello che attirò mai sempre l'attenzione tanto dell' agricoltore, che dello scienziato, e ad esso di preferenza si sono rivolti studî e cure. Secondo me però la maggior parte degli osservatori si occuparono del fenomeno dello scolo della gomma, in modo troppo esclusivo e direi quasi superficiale, giacchè in fondo esso non è che la manifestazione esterna, che l'effetto ultimo della malattia, e trascurarono troppo d'investigare le cause che lo determinano.

([1]) Diversi proprietarî a Catania, e fra questi alcuni dei migliori, pur riconoscendo che i melangoli meglio dei limoni resistono al male. mi mostravano or sono tre anni giardini nuovi formati interamente di limoni da seme innestati, adducendo, *che tanto tornava lo stesso, perchè quanto si guadagnava coi melangoli in maggiore durata, perdevasi in ritardato sviluppo.* L'esempio però, secondo me, non è da seguirsi.

([2]) « La malattia consiste in uno scolo gommoso che si fa vedere per lo più in primavera od « in autunno al pedale dei fusti degli alberi a breve distanza dal suolo, oppure sulle radici diretta- « mente. Il male incomincia a manifestarsi coll'apparire di alcune gocce di gomma sopra la corteccia « del tronco apparentemente ancor sana, poi lo scolo gommoso cresce, la corteccia si fende, o si buca, « e la gomma si fa copiosa, fluida, torbida, scura e puzzolente.

« Finito o rallentato lo scolo, nel cuore dell'estate o dell'inverno, si trova la corteccia per buon « tratto tutto all'ingiro dei centri d'infezione distaccata dal legno e morta, che secca si solleva, dive- « nuta dura e fragile. La parte più superficiale del legno sottostante trovasi pure alterata, onde per « un solo attacco del male buona porzione dei tessuti periferici e più vitali del tronco, tanto verti- « calmente che orizzontalmente, viene sottratta senza altro alle funzioni della vita vegetativa. Ed « in pochi anni per successivi attacchi la pianta perisce, consumandosi ad ognuno di essi nuova « porzione di strato libroso-cambiale, e della rimanente sovrastante corteccia sino a che compiuto il « giro del tronco, il male arriva ad interrompere del tutto la comunicazione fra la parte aerea e la « sotterranea della pianta, in quei tessuti più particolarmente destinati alla circolazione dei succhi « vegetali più elaborati e perfetti: ed è questo in generale il caso degli alberi innestati sopra melan- « goli a non forte distanza dal suolo.

« Altre volte invece il male non si sofferma al pedale, arrestato dall'innesto, ma scende addi- « rittura dal tronco alle radici, oppure si manifesta direttamente su queste senza nulla lasciare appa- « rire al di fuori, ed il deperimento della pianta allora è più sollecito, la corteccia delle radici « rapidamente infracida, e la perdita dell'albero può seguire in meno di un anno; ed è il caso parti- « colarmente degli alberi di limone proveniente da talee o da seme.

« Non torna superfluo ancora far notare come le alterazioni della zona cambiale, di quello strato « cioè di tessuto tenerissimo che sta fra legno e corteccia, e da cui traggono origine i tessuti non « primordiali, e perciò essenzialissimo alla vita vegetale, si estendono molto al di là dei centri di « scolo cioè sino a qualche metro (in certi casi) più sopra sul tronco, ove tutto sembra assolutamente « sano ». Vedi mia Memoria: *Alcune esperienze* ecc., *per guarire gli agrumi attaccati dal mal di gomma.* Palermo, pag. 2 e 3.

È invece a queste ultime che, per quanto possa sembrare difficile bisogna tentare di risalire, fa d'uopo cercare di non essere più costretti di andare a tentoni, e cessare di affidarsi unicamente ai mezzi empirici, i quali finora a ben poco condussero. Incaricato dal Ministero d'Agricoltura di occuparmi di tale malanno, fu con questi intendimenti che mi misi all'opera, e ne incominciai lo studio col porre a me stesso le seguenti domande:

Come muore la pianta? quali sono gli organi, quali le sostanze, quali gli elementi istiologici che dapprima si guastano e disorganizzano? quale la natura delle alterazioni, l'epoca in cui cominciano, l'ordine ed il modo loro di procedere? in una parola come avviene patologicamente questa disorganizzazione così profonda e violenta che sospende e toglie la vita a piante per loro natura tanto piene di vigore e di forza che poche possono reggere al loro paragone? Ed una volta studiate e constatate le alterazioni e la loro natura, quali possono essere le cause vere od almeno probabili che le producono?

Coi lavori di Karsten, Wiegand, Frank, Sorauer, Prilleur, non poca luce, al certo, fu fatta intorno alla malattia della gomma dei vegetali; oggidì è noto il modo come tale sostanza si forma in diverse piante, ma è egli provato che negli agrumi le cose procedano in maniera del tutto identica a quella che si avverte nei peschi, nei mandorli, nei ciliegi ecc.; alberi sui quali di preferenza tali indagini vennero intraprese? Io non credo si possa, per ora almeno, affermarlo con sicurezza.

Nei ciliegi, peschi ecc. la *gommosi* (nome con cui si designa detta malattia) è dovuta a soverchio accumulamento di sostanza plastica in parti della pianta ove non trova sfogo sufficiente a normale organizzazione, ed a contemporaneo eccesso d'acqua nei tessuti corrispondenti, per cui ha luogo da prima precaria formazione di tessuto speciale e patologico, e poi susseguente disorganizzazione di questo e formazione in mezzo ai tessuti normali di ammassi di sostanza amorfa e pseudo-fluida che uscendo attraverso la corteccia a contatto dell'atmosfera ci fornisce la così detta gomma.

Nella compagine degli alberi di agrumi io ho constatato invero alterazioni e fenomeni simili ai sopra descritti e spesso su larga scala, la qual cosa in realtà addimostra che per un lato ci dobbiamo trovare in condizioni analoghe a quelle dei peschi, ciliegi ecc.; ma dall'altro lato se si considera il processo, l'andamento generale del morbo, manifestansi tali differenze, da rendere il giudizio molto dubbio e da mostrare la necessità ancora di ulteriori e più accurate ricerche.

Non è facile infatti darsi conto del perchè la *gommosi* nei peschi, ciliegi ecc. debba avere per così dire un procedimento quasi regolare, in modo che la sua apparizione è connessa a condizioni specialissime e per così dire costanti di clima, di coltura, di natura di terreno, di età, di piaghe e tagli mal fatti sui tronchi ecc., del come cagioni ad essi danni relativamente lievi e sempre limitati a quelle determinate condizioni, e negli agrumi invece il mal di gomma non segua regola di sorta.

Gli agrumeti che prima perirono in Sicilia furono in generale quelli ove le irrigazioni erano più abbondanti, ma non va dimenticato che quelli pure in cui l'acqua scarseggiava non si salvarono, e che non furono risparmiati nemmeno i giardini a secco, cioè quelli ove mancava addirittura l'acqua d'irrigazione; in questi il male fece solo minor danno o procedette più lentamente.

A Messina gli agrumi si riproducevano per talee, e sulle prime si volle vedere in tale pratica la causa della strage menata dal male in quella provincia, ma nelle altre parti dell'isola ove gli alberi si moltiplicavano per seme, più tardi il morbo sviluppossi egualmente, e per tal modo da non lasciare ivi pure in alcuni agrumeti un sol albero vivo o sano. Si è pure parlato della natura del suolo, della giacitura, della esposizione, della coltura, dei concimi ecc.; ma alla lunga tutto fu contraddetto, e gli agrumi in terreni compatti o leggeri, esposti a mezzogiorno od a mezzanotte, in piano od in collina, molto o poco coltivati e concimati, tutti furono attaccati ed in molti luoghi tutti distrutti.

Inoltre come spiegarsi perchè il mal di gomma si abbia dovuto sviluppare così ad un tratto, quasi repentinamente e ad epoca fissa per così dire (anno 1862 per la Sicilia), mentre la *gommosi* ordinaria nei peschi, ecc. ed anco negli agrumi (questi pure sono alberi che hanno sempre sofferto la gomma, ma la gomma ordinaria o sporadica) è malattia antica forse quanto le specie stesse, e tale che non uccide o uccide solamente qua e là qualche albero posto in cattive condizioni, e mai fu morbo da svilupparsi addirittura sopra migliaia e migliaia di piante sino allora floridissime, poste in condizioni agrariamente eccellenti e molto varie, ed in paesi lontanissimi? Come rendersi ragione, colle alterazioni dovute alla semplice *gommosi* e colle cause solite che la producono, del perchè agrumeti posti nella stessa contrada ed in condizioni simili di terreno, di clima, di coltura ecc. siano fortemente travagliati dal male, mentre altri vicini o contigui non lo siano punto o ben poco, anzi, come qualche volta di uno stesso agrumeto appartenente al medesimo proprietario, sopra terreno di eguale natura, sottoposto alle stesse cure, una parte si ammali e muoia, e l'altra divisa solo da semplice sentiero o da altro simile ostacolo, rimanga sana, o si ammali solo molto più tardi?

E poi, perchè il male si è propagato da paese a paese incominciando per es. in Sicilia da Messina, estendendosi indi in poco tempo in tutte le provincie dell'isola; perchè quando in un giardino un albero si ammala, raramente i vicini restano sani, ma si formano per lo più specie di centri d'infezione da cui il male direbbesi quasi che irradiasse, centri che possonsi constatare anco più tardi alle larghe piazze, benchè non sempre regolari, che veggonsi negli agrumeti ammorbati, ma non ancora del tutto distrutti? L'andamento del male, in poche parole, è tale che non corrisponde al procedimento ordinario della *gommosi* solita e sporadica, e che anco astraendo dalle esperienze colle quali molti hanno creduto dimostrare direttamente la sua contagiosità, si corre involontariamente col pensiero al sospetto che si abbia a fare con qualche parassita microscopico, animale o vegetale, finora sfuggito all'osservazione.

È così che, contemporaneamente allo studio istiologico di tutti gli organi della pianta ammalata in paragone di quelli della pianta sana, intrapresi una minuziosa ricerca per vedere se fosse stato possibile scoprire esseri estranei e parassitici.

Da questo lavoro non per anco compiuto perchè molte ed urgenti occupazioni mi costrinsero sempre ad interromperlo, tolgo ora quanto riguarda una nuova crittogama che rinvenni quasi costantemente sulle radici e sui tronchi dei limoni affetti di mal di gomma. Le osservazioni ed indagini che faccio seguire non sono complete; e se mi decido a pubblicarle dopo qualche anno che dormivano sul mio tavolino, è

solo perchè avendo abbandonato la Sicilia mi veggo allontanata la probabilità di poterle fra breve riprendere, e perchè non è forse male che siano note a coloro che in seguito si dedicheranno allo studio di tale malattia, non fosse altro, per dimostrare con certezza (certezza che ora manca malgrado le molte affermazioni in contrario) che di parassitismo non è punto questione.

Il fungo di cui vado a tener parola lo trovai da prima sopra alberi di limone ammalati in diversi agrumeti (Salvatore Nicastro, Spagna ecc.) di Siracusa, di poi lo rinvenni sopra radici e pezzi di fusto raccolti a Catania, e più tardi sulle stesse parti di alberi di limone ammorbati di gomma dei giardini dei dintorni di Palermo (agrumeto del cav. Luigi Siciliano a Ficcarazzelli, agrumeto del conte Tasca a Camastra ecc.); e del resto a quanto afferma il prof. Alfonso Spagna (a cui questi studî eran noti) nella seconda edizione del suo *Trattato della coltivazione degli agrumi* (1); altri ripeterono queste mie osservazioni ottenendo identico risultato.

È un fungo non solo microscopico, ma minutissimo, che si sviluppa con una rapidità prodigiosa, come sarà manifesto per quanto verrà più sotto esposto.

Eccone la descrizione.

Consta di un micellio cilindrico, bianco, incolore (fig. 1, 3, 5, 6, 13), qualche volta molto sviluppato e ramificato (sino ramificazioni di 3° ordine) con diramazioni ora opposte, ora alterne (fig. 6) e diviso da diaframmi. Il micellio ha grande tendenza ad anastomizzarsi, tanto se giovane, come può vedersi nella fig. 24, quanto se già adulto ed in pieno sviluppo. Nelle anastomosi in principio possonsi scorgere le pareti trasversali, che più tardi vengono assorbite e scompaiono interamente. Il micellio è generalmente pieno di plasma che si colora in giallo per l'azione di soluzione di iodo in ioduro di potassio; spesso presentansi nel plasma vacuole.

Dal micellio nascono cellule a riproduzione pure bianche ed incolori, di forma allungata e leggermente conica alle estremità, o fusiforme (fig. 4), più o meno incurvate, che dividonsi per lo più per mezzo di tre diaframmi, o pareti trasversali, in 4 scompartimenti o cellule figlie pressochè uguali (*a* in fig. 3) fra loro, e che possonsi considerare come altrettante spore. Qualchevolta nella cellula madre non si formano diaframmi (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. *g*, ecc. in fig. 4), oppure invece di tre ne sorgono 1, 2, 4, 5 e persino 7 (rari).

Queste cellule conidiiche piene comunemente di protoplasma finamente granulare, si sviluppano o direttamente alla estremità di portaspore semplici, cilindrici, o leggermente conici (*a*, in fig. 1, 2, 13), oppure sorgono sopra specie di sterigmi più o meno raggruppati, corti, di forma conica irregolare, ed adunchi come vedesi in (*b* fig. 3). Le dimensioni di queste cellule conidiiche sono varie come vedesi in fig. 4, e tanto le piccole che le grandi, tanto quelle con nessuno od un solo diaframma, come quelle con 2, 3, 4 . . . 7 diaframmi posseggono la facoltà di germinare (fig. 29. 7, 8, 9, 10, 11, 12). Le spore o cellule figlie mai si separano, e germinano stando attaccate in serie fusiformi come se costituissero una sola spora. Generalmente la germinazione ha luogo colla formazione di un solo o di due budelli od otricelli cilindrici, ialini e più o meno sottili, che escono da una o da ambe le cellule figlie

(1) Pag. 470.

terminali; cellule figlie intermedie a me non fu mai dato di vederne germinare, come trovò per es. Schacht nel *Fusisporium solani* [1]; il contenuto del fuso però nella germinazione passa per intero, cioè compreso quello delle spore intermedie, nei budelli terminali senza che le pareti intermedie vengano primieramente sciolte e quindi per azione diosmotica.

Una sol volta mi venne fatto di trovare un fuso nel quale una delle cellule terminali era da un lato leggermente staccata dalle rimanenti (fig. 9), il che dimostra come le pareti di separazione delle cellule figlie debbano constare veramente di due lamelle.

Questi otricelli possono divenire lunghissimi senza ramificarsi, mentre qualche volta si ramificano a breve distanza dalla spora madre, e spesso danno anco luogo ad organi di riproduzione, od almeno a cellule che tali sembrano, come si vedrà più sotto, di forma diversa dei sopra descritti.

Questo micellio si interna nei tessuti corticali, nel cambio, ed anco nei raggi midollari delle parti di tronco affette dal mal di gomma.

L'asta o ramo micellico che si prepara a produrre conidii, generalmente si ingrossa alla estremità libera e superiore, assumendo forma leggermente clavata, indi alla parte inferiore del rigonfiamento si sviluppa una parete trasversale, che lo separa dal suo basidio, e quando è maturo si stacca e cade. E mentre una cellula conidiica matura, l'estremità sottostante del supporto comincia a gonfiare alla sua volta e prepara una nuova spora come vedesi nella fig. 1 e 2. Rarissimamente a me fu dato trovare cellule conidiiche ancora attaccate al micellio in cui si potessero scorgere già i diaframmi trasversali. Sembra, e dico sembra, perchè oggidì non ho più materiale da sottoporre all'osservazione per accertarmene, che queste pareti trasversali si possano formare anche dopo che la spora si è staccata dal micellio. Nella germinazione delle spore, qualche volta invece di uno sorgono due budelli direttamente dalle cellule terminali come vedesi in fig. 29.

Oltre i conidii sopra descritti, si formano dallo stesso micellio altre cellule speciali sulla cui natura e sulla cui funzione non potei acquistare un'assoluta certezza. Sono cellule sferiche, incolori, a superficie liscia (*x* in fig. 5, 10, 12, 13, 27 ecc.) che nascono alla estremità di aste o basidii cilindrici, e qualche volta anco direttamente sulle diramazioni principali del micellio, le quali sferucce posseggono parete propria, e contengono generalmente altri corpicini rotondi, bianchicci, piccolissimi, in numero vario (ne contai sino 15) che rifrangono fortemente la luce e nei quali non è possibile distinguere parete di sorta.

Il processo di formazione di queste sferucce *x* non è molto dissimile da quello dei conidii. L'asta o ramo destinato a produrle, comincia coll'empirsi di abbondante protoplasma, che richiama dalle parti contigue del micellio, o dalle spore stesse germinanti, poichè qualche volta si formano subito sugli otricelli di germinazione (*x* in fig. 10). Poi l'estremità libera del rametto si gonfia, e si ingrossa, formando una specie di piccolo bottone rotondo o leggermente oblungo, e quando questo è alquanto

(1) Schacht H., *Bericht an das Königliche Landes - Oeconomie - Collegium über die Kartoffelpflanze und deren Krankheiten*. Berlin. Tavola X.

cresciuto sorge una parete trasversale alla base del rigonfiamento, il quale per tal modo diviene una cellula a sè, e distinta dal suo supporto.

Da principio questi rigonfiamenti sono pieni semplicemente di protoplasma uniforme, che più tardi si intorbida, diviene finamente granulare (*z* in fig. 13), poi a poco a poco sembra dividersi per dar luogo alla formazione dei corpicini rotondi o granelli che costituiscono il contenuto delle sferucce mature.

Formatasi una sferuccia *x*, l'estremità dell'asta supporto comincia a gonfiarsi di nuovo, formando sotto di essa da prima una specie di calice (fig. 20, 22), che poi sviluppasi in sfera con processo simile al descritto; e mentre la nuova ed inferiore si forma, la vecchia e superiore si stacca e cade. Altre volte invece il bottoncino sino da principio prende forma leggermente oblunga, e quando ha raggiunto certo grado di sviluppo, una nuova parete trasversale si organizza verso la sua metà, in senso più o meno normale all'asse dell'asta supporto, e la cellula si divide in due (fig. 13, 14, 27 ecc.), ma esternamente, sul principio, la parete rimane liscia e continua e solo più tardi si forma un'insenatura, e le due cellule prendono forma pseudo-sferica e distinta. Intanto sull'estremità del supporto si ripete la formazione di una nuova sfera la quale alla sua volta si divide, e se le prime non sono cadute come qualche volta avviene, puossi avere una serie di 4 sferucce attaccate in fila l'una sopra l'altra, il cui raggruppamento però spesso ricorda il loro modo gemino di formazione come vedesi abbastanza chiaramente nella fig. 18. Il caso rappresentato nella fig. 21 unico fra migliaia e migliaia osservati, accenna inoltre alla possibilità di potersi avere due serie separate di cellule sferiche sullo stesso supporto.

Le aste che portano le sferucce sorgono in generale verso il mezzo delle cellule nelle quali pei diaframmi rimane diviso il micellio (*h* fig. 13) e non ad una delle estremità come ordinariamente vedesi avvenire per quelle destinate a produrre i conidii fusiformi. Però qualche volta trovasi che una stessa asta supporto si divide in due, ed una diramazione produce conidii fusiformi, e l'altra sferucce, come scorgesi nella fig. 5; il che dimostra come la differenza sopra accennata fra le diramazioni del micellio che producono conidii fusiformi e quelle che producono sferucce, soffra eccezioni.

Le sfere *x* allorchè si staccano sono perfettamente rotonde, ed avviene di frequente di trovarle a migliaia già completamente vuote (fig. 14 e 15). Ora accanto ad esse ed in mezzo all'ammasso formato da loro, dal micellio ecc. ho trovato spesso molti corpicini liberi, rotondi, incolori, piccolissimi, fortemente rifrangenti la luce, alla grandezza ed all'aspetto identici ai granelli contenuti nelle sferucce (*x*), come vedesi nella fig. 16; ed accanto a questi, altri corpicini rotondi, simili ma leggermente ingranditi e germinanti. Queste sferettine o sporucce germinano pure e caccian fuori od un solo budello (*d, c, e* fig. 17) oppure due budellini in direzione opposta, (*f, g* fig. 17) i quali qualche volta divengono lunghissimi, e dividonsi ben presto per mezzo di pareti trasversali; sventuratamente non mi fu dato seguire la germinazione di tali sporule o granelli in tutto il loro sviluppo per vedere se veramente avessero riprodotte le forme del fungo primitivo. Ho trattato diverse volte le sfere *x* contenenti i granellini con etere, con alcool assoluto, e con miscuglio d'alcool ed etere, entro vetri d'orologio, od in tubetto d'assaggio per $^1/_4$ d'ora, per $^1/_2$ ora ed anco

per più di un'ora, ma non avvertii mai alcun cambiamento; i granellini non si sciolsero. Altrettanto si ottenne trattando nello stesso modo i granellini liberi, isolati e fuori delle sferucce, solo in questo caso sembrò che, sotto l'azione dell'alcool assoluto, alla lunga subissero un leggero raggrinzamento.

D'altra parte debbo confessare che mai mi fu dato di sorprendere al microscopio le sferucce nell'atto del loro vuotamento, nemmeno di scoprire nelle sferucce vuote (x) alcuna apertura, come pure, che mi è avvenuto una volta di trovare diverse di queste sferucce staccate ed ancor piene di plasma finamente granulare, ma non diviso in granelli, che germinavano direttamente; diverse delle quali anzi erano riunite a due a due come vedesi nella fig. 28.

Ora per quanto sia difficile giudicare con certezza di oggetti di una minutezza così esagerata, pure dall'esposto sembrerebbe che queste sferucce si dovessero considerare come una specie di sporangi, similmente a quanto avviene nelle Peronosporee, benchè nelle sporule contenute nei sporangi del nostro fungo non abbia potuto vedere ciglia di sorta, nè alcun movimento autonomo, per cui non si possono, come nelle Peronosporee, avere per zoosporangi ed i corpicini rotondi in essi contenuti per zoospore. Il potere questi supposti sporangi certe volte germinare direttamente senza dar luogo alla formazione delle sporule interne, non costituirebbe alcuna anomalia, perchè qualcosa di simile avviene anco cogli sporangi delle Peronosporee.

Le cellule fusiformi o conidiiche più grandi misurano da $0^{mm},0264$ a $0^{mm},0274$ di lunghezza, e da $0^{mm},0024$ a $0^{mm},0028$ di diametro massimo. Le cellule sferiche od i supposti sporangi più grandi hanno un diametro che oscilla fra $0^{mm},0048$ a $0^{mm},006$.

Il miceto di cui ci occupiamo si riproduce sulle parti dei limoni attaccati dal mal di gomma, sempre nel modo sopra descritto, almeno a me non fu mai dato di trovare altri organi di fruttificazione. Così pure da coltivazioni artificiali sopra acqua, soluzione di zucchero, fette di patate ecc. più volte ripetute, non ottenni che le sferucce ed i conidii fusiformi di cui sopra.

La forma dei conidii, il loro modo di formazione e di germinazione accennano ad un fungo più complesso, ad un ascomiceto, di cui però pel momento non è noto che una parte del suo ciclo di sviluppo. È quindi un fungo imperfetto di cui, come per molti altri, rimane a cercare le vere forme di fruttificazione onde venire definitivamente classificato.

Così come è, la forma dei suoi conidii lo pone fra i *Fusisporii*, e lo designo quindi col nome di

Fusisporium Limoni, Briosi.

Rimarrebbe ora a sapere con sicurezza qual parte spetti a questo miceto nella malattia di cui ci occupiamo. Deve esso aver posto fra le cause che determinano il morbo, oppure essere considerato come semplice effetto, come un fungo saprofita attirato in luogo dallo stato di decomposizione in cui si trovano i tessuti ammalati? Ed in questo ultimo caso, la sua presenza sarebbe del tutto indifferente, o contribuirebbe essa pure ad aumentare ed estendere la disorganizzazione già per altre cause incominciata?

Io sono costretto di lasciare ad ulteriori ricerche la risposta definitiva a queste

importantissime domande non avendo osservazioni sufficienti a decidere. Trovai i micellii sopra ed anco entro i tessuti corticali dei tronchi attaccati, ma invero in quelle parti già ammorbate, ed ove il tessuto benchè conservasse le proprie forme non poteva affermarsi con certezza che fosse perfettamente sano. Che però la sua presenza debba accelerare la disorganizzazione dei tessuti e contribuire ad estendere il male, non credo vi sia dubbio alcuno.

Nella malattia delle patate come è noto, un Fusisporio, il *Fusisporium Solani Martius,* trovasi pure quasi costantemente negli organi affetti, ma quivi l'illustre prof. A. de Bary in un bellissimo lavoro ([1]) tolse ogni dubbio, e dimostrò che il morbo era invece dovuto alla presenza di un altro fungo, alla *Peronospora infestans* e che il *Fusisporium* nulla aveva a fare colla causa prima del male, benchè contribuisse fortemente ad aumentare la decomposizione dei tessuti (vedi anche Schacht, opera citata).

Tolgo da ultimo alle mie note alcune altre osservazioni ed esperienze che riguardano lo stesso fungo.

Sopra un pezzetto di corteccia di $0^{m},0005$ di lato, il microscopio mostra migliaia e migliaia di conidii.

Conidii immersi interamente nell'acqua germinano egualmente come quelli tenuti in aria umida sotto campana di vetro.

Seminati conidii sopra soluzione di zucchero, si ebbero micellii relativamente grossissimi ma le stesse forme di sporule sopra descritte.

Alla temperatura di $+ 25°$ C le spore conidiiche fusiformi incominciano a germinare dopo 2 ore, indifferentemente le grandi e le piccole, quelle con una o più pareti trasversali, e quelle senza. Dopo 3 ore alla detta temperatura (sopra acqua) se ne trovarono germinate circa $^{1}/_{20}$ del numero totale, però altre volte molto meno.

Seminate spore sopra porta-oggetti e messo questo fra due grandi vetri da orologio con acqua nell'inferiore ed il tutto entro cassetta di latta perfettamente chiusa ed oscura, trovato alla mattina susseguente, le spore germinate.

Esposti pezzi di radice infetti all'aria asciutta, alla temperatura ordinaria (da $+ 25$ a $+ 28°$ C) per essiccarli, ed osservati dopo 24 ore, si trovò circa $^{1}/_{20}$ delle spore alterate, cioè col protoplasma contratto e staccato dalle pareti delle cellule, e le rimanenti in buono stato. Messo a germinare le une e le altre, dopo 12 ore, molte delle intatte furono trovate in via di germinazione, delle altre, nessuna. Altre volte ripetuto lo stesso sperimento, e non riuscito; le spore esposte all'aria asciutta per più di 20 ore germinarono di poi discretamente: esigono forse maggior grado di essiccamento?

Spore prese da uno stesso preparato, seminate in parte sopra acqua pura, ed in parte sopra acqua di calce satura e limpida, dopo 24 ore le prime si mostravano germinanti a migliaia, mentre delle seconde nemmeno una era germinata, malgrado avessero conservato il loro aspetto primitivo e normale.

Spore prese dalla stessa coltivazione e seminate, porzione in acqua pura e porzione sopra leggerissima soluzione di ammoniaca, dopo 16 ore, le prime erano in pieno sviluppo di germinazione, delle ultime invece nessuna aveva germinato.

([1]) *Die gegenwärtig herschende Kartoffel Krankheit, ihre Ursache und ihre Verhütung.* Leipzig, 1861.

Di spore seminate sopra acqua contenente il 6 $^0/_0$ di acido solforico del commercio, dopo 24 ore, nessuna germinazione.

Sopra acqua con 8 $^{00}/_{00}$ di acido solforico, idem.

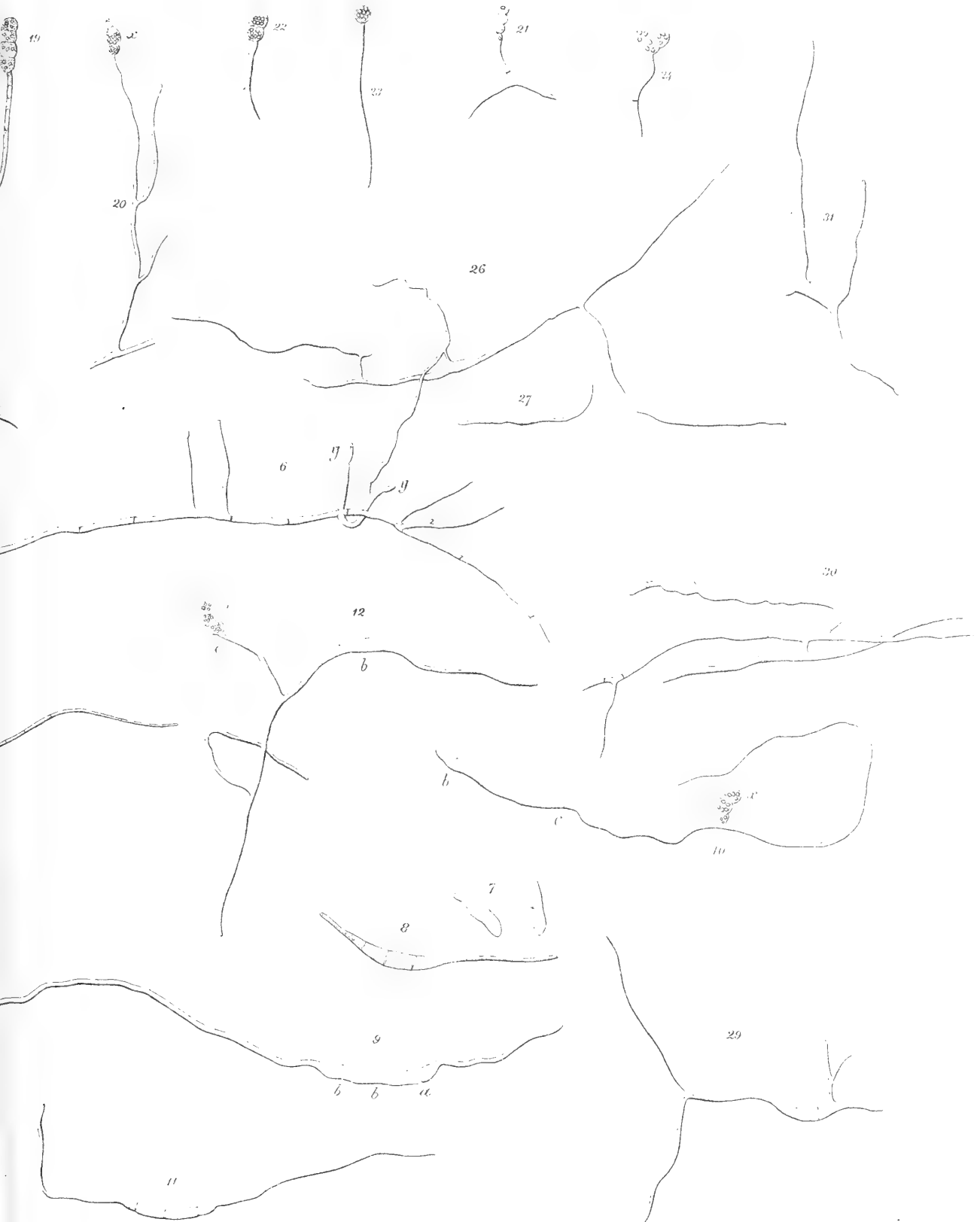
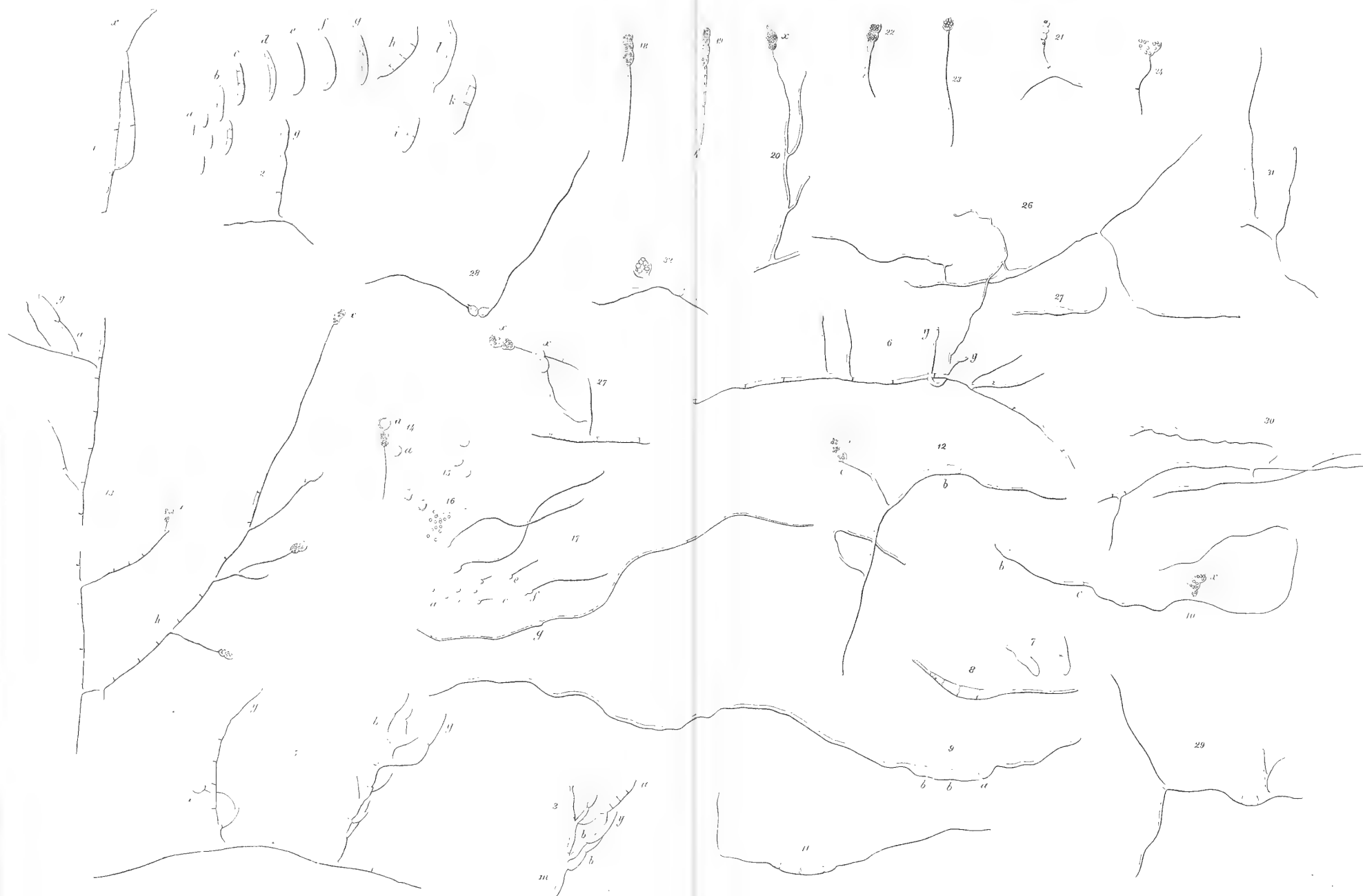
Sopra debolissima soluzione di solfato di rame, idem.

Sopra soluzione di solfato di zinco a 3 $^{00}/_{00}$, dopo 24 ore trovate alcune spore germinanti di aspetto però irregolare. Dopo 3 giorni dette spore erano allo stato di prima, cioè non si erano sviluppate ulteriormente.

Sopra soluzione con 6 $^{00}/_{00}$ di solfato di zinco dopo 48 ore alcune spore incominciarono a germinare, ma non seguitarono.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

FIG. 1 e 2. Porta conidii e conidii in via di formazione, ingrandimento 650D. circa.
» 3. Porta conidii con sterigmi, ing. 650D. circa.
» 4. Conidii di diversa forma e dimensione, ing. 650D. circa.
» 5. Micellio con asta diramata, in cui uno dei rami porta un conidio, l'altro un supposto sporangio, ing. 650D. circa.
» » Micellio con portaspore opposti, ing. 650D. circa.
» 7, 8, 9, 11, 27. Fusi conidiici con uno, con più, o senza pareti trasversali, ing. 650D. circa eccettuato quello della fig. 9 che è visto a circa 1300D.
« 13. Micellio che porta conidii e supposti sporangi.
» 10 e 12. Conidii germinanti che producono supposti sporangi (x), ing. 650D. circa.
» 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23. Supposti sporangi e loro supporti per dimostrare il vario modo di formazione, ing. 650D. circa, eccettuato la 21 che è 1300D. circa.
» 15. Supposti sporangi vuoti e staccati, ing. 650D. circa.
» 16. Sferucce o sporule dei supposti sporangi, ing. 650D. circa.
» 17. Idem che germinano, ing. 650D. circa.
» 26. Fusi conidiici i cui otricelli si anastomizzano, ing. 650D. circa.
» 30 e 31. Fusi coniidici di forma anormale(?), ing. 1300D. circa.
» 24. Porta supposti sporangi ramificati, 650D.
» 28. Supposti sporangi che germinano direttamente, ing. 650D. circa.
» 29. Fuso conidiico con 3 budelli di germinazione, ing. 650D.

19
x
22
23
21
24
20
31
26
27
6
g
g
30
12
b
b
c
x
10
7
8
9
b
b
a
29
11

Sulla diabase peridotifera di Mosso nel Biellese.

Nota del Socio ALFONSO COSSA

letta nella seduta del 3 marzo 1878.

Ho riassunto in questa Nota i risultati dello studio mineralogico e chimico che intrapresi intorno alla diabase peridotifera di Mosso, che mi venne fatta conoscere dal comm. Quintino Sella. Questa roccia è importante così per la presenza del peridodo associato ai componenti abituali della diabase, come per il pleocroismo molto spiccato dell'augite che essa contiene. D'altra parte credo che finora non fu pubblicato alcun lavoro chimico sulla composizione delle diabasi del Piemonte. Relativamente alle condizioni di giacitura della diabase e ad un fenomeno di particolare risonanza di cui essa è dotata, pubblico testualmente le seguenti notizie che mi furono cortesemente comunicate dal comm. Sella.

« Questa roccia si trova nel comune di Valle inferiore Mosso nella borgata *Bogge*, in un tratto non molto esteso limitato in alto da detta borgata, in basso dal torrente *Strona*, ed in direzione di questo dai torrentelli *Caranzana* a monte, e *Tolera* a valle. Essa è in massi rotondati di diametro che può giungere fino a circa un metro. La superficie loro è rugosa, in apparenza quasi corrosa. Il colore è nero traente all'azzurro cupo, cosicchè nel dialetto del luogo si dicono pietre *biove* (bleu). È notevolissima la loro durezza e tenacità. Si lavorano bene, e si possono nettamente spaccare. Sono singolarmente sonore, od a meglio dire, nella percossa col martello si sente un suono non senza analogia con quello che si ottiene battendo sull'incudine.

« I massi in discorso sono erratici sulla superficie del suolo, od a poca profondità, e quelli sono meglio conservati di questi, la cui parte esterna è più facile a rompersi ».

La diabase peridotifera di Mosso a primo aspetto sembra una diorite. Un occhio esercitato vi riscontra l'olivina, ma non si può acquistare un criterio sicuro sulla natura dei minerali che la compongono senza il soccorso dell'osservazione microscopica.

Questa roccia ha una tessitura cristallina a piccoli elementi. La sua frattura è scagliosa a superficie irregolare. Non presenta alcun indizio di decomposizione, e l'osservazione microscopica non vi ha riscontrato la presenza di carbonato calcare, di ossido ferrico, di materie terrose amorfe che sono solitamente indizio e conseguenza

della degradazione delle roccie. — Cinque esperienze eseguite per determinare la densità della roccia diedero i risultati seguenti:

con grammi	1.710	di roccia	2,973	a + 9° C
»	2.194	»	2,958	»
»	1.988	»	2,932	»
»	1.817	»	2,940	»
»	1.689	»	2,968	»

La concordanza di questi risultati ottenuti con frammenti staccati da diverse parti di un masso che pesava parecchi chilogrammi, dimostra che i minerali che la compongono sono distribuiti omogeneamente in tutta la massa della roccia. — L'osservazione microscopica e l'analisi chimica provarono che nella composizione della roccia prendono parte i minerali seguenti: un feldispato triclino e l'augite che predominano sugli altri componenti; l'olivina, la mica nera magnesifera, la magnetite contenente traccie di ferro titanato, qualche raro cristallo di orniblenda, l'apatite in microliti rinchiusi così nel feldispato come nell'augite. La roccia contiene inoltre in quantità assai piccola ed irregolarmente distribuiti dei cristalli di pirite e di calcopirite.

Nella diabase di Mosso manca affatto la clorite che da qualche scrittore di petrografia viene considerata come uno dei componenti essenziali delle diabasi, ed invece, secondo il Rosenbusch, è appena un prodotto della loro decomposizione.

Il feldispato triclino, che è l'elemento mineralogico che predomina nella roccia, si presenta nelle osservazioni microscopiche in cristalli nei quali la forma allungata prevale a quella tabulare. Le strie di geminazione caratteristiche di questo minerale occupano senza interruzione tutta l'estensione dei cristalli; solamente in qualche raro individuo, la metà di un cristallo geminato appare semplice, mentre nell'altra è manifesta la struttura polisintetica. Non si osservano nel feldispato traccie di decomposizione posteriore alla sua deposizione. Invece contrariamente a quanto si rilevò nelle diabasi finora studiate, questo minerale è ricchissimo di interposizioni che consistono specialmente in cristalli piccoli ma ben distinti di apatite, ed in corpuscoli neri, costituiti molto probabilmente da magnetite, disposti quasi sempre in serie parallele alle linee di geminazione.

Trattando una sezione sottile della roccia con acido cloridrico concentrato, il feldispato resiste affatto all'azione dell'acido mentre si disciolgono completamente i cristalli di apatite, e quasi per intero i corpuscoli neri ritenuti per magnetite. Mettendo dopo questo trattamento sul porta-oggetti qualche goccia di una soluzione nitrica di molibdato ammonico, si vedono formarsi sotto al microscopio dei cristallini ottaedrici e cubo ottaedrici di fosmolibdato ammonico che si disciolgono completamente quanto si bagnano con ammoniaca.

L'augite non è in cristalli ben determinati, ma piuttosto in frammenti che empiono le lacune lasciate dal vario modo con cui sono intrecciati i cristalli di feldispato che formano l'orditura della roccia. Pertanto si può ritenere che la deposizione dell'augite è posteriore a quella del feldispato.

Spesso occorre di osservare che diversi granuli di augite quantunque tra loro separati dal feldispato triclino, sono tra loro orientati in maniera da far sembrare che essi appartengano ad uno stesso individuo cristallino. Ciò che rende veramente interessante la diabase di Mosso è l'intensità del pleocroismo di cui è dotata l'augite. Questo pleocroismo è orientato in modo che sono rossi i raggi che vibrano nella direzione dell'ortodiagonale, e di un colore verde pallido quelli che vibrano nella direzione dei due assi di elasticità compresi nel piano di simmetria. Fa notare il Rosenbusch che questo pleocroismo frequente nell'augite delle trachiti e delle andesiti è assai raro nei pirosseni delle roccie più antiche.

L'augite contiene interposti dei microliti di apatite e dei granuli irregolari di magnetite; come il feldispato essa non presenta traccie di decomposizione.

L'olivina è in granuli cristallini compenetrati più frequentemente nell'augite che nel feldispato. Non manifesta alcun indizio di passaggio al serpentino.

Nulla di interessante si rileva nei pochi cristalli di mica magnesifera ed in quelli ancora più rari di orniblenda.

A motivo della struttura microcristallina della roccia è cosa assai difficile il separare meccanicamente i minerali che la compongono. Senza usare istrumenti di ferro, ridussi in polvere minutissima alcuni frammenti della roccia e separai ripetutamente nella polvere ottenuta la parte attirabile dalla calamita, la quale ammonta presso a poco all'uno per cento della roccia. Osservata però al microscopio questa polvere risultò non pura a segno da poterne eseguire un'analisi, i cui risultati potessero darci una idea precisa della composizione della magnetite. Immersi ripetutamente la polvere in una soluzione di solfato di rame per osservare se in essa contenevasi traccie di ferro allo stato metallico; il risultato fu negativo. Questa osservazione non dovrebbe mai ammettersi nello studio delle roccie per non correre il pericolo di lasciar sfuggire il ferro nativo, il quale, oltrechè nei basalti e nelle doleriti, può riscontrarsi anche nelle roccie dioritiche, nei serpentini ed in generale nelle pietre verdi. Riducendo in polvere finissima dei cristalli di magnetite fu osservato che essi qualche volta contengono un nucleo di ferro metallico, e ciò accade non raramente nelle roccie nelle quali alla magnetite è associata l'olivina.

La diabase di Mosso ridotta in polvere e trattata con acido cloridrico concentrato si decompone facilmente in parte con separazione di silice fioccosa, proveniente dalla decomposizione dell'olivina. Nei saggi che ho eseguito per conoscere la proporzione delle sostanze decomposte dall'acido, trattai il residuo insolubile con una soluzione bollente di carbonato sodico per esportare la silice isolata per l'azione dell'acido. La roccia così cimentata perde in media il 25 per cento del proprio peso, e questa perdita è prodotta dalla scomposizione completa della olivina, della magnetite, dell'apatite e dalla decomposizione parziale dell'augite. Per giudicare approssimativamente della proporzione di olivina contenuta nella roccia ho determinato la quantità di magnesia che si trovava nella parte della roccia solubile nell'acido cloridrico. Nella soluzione acida ottenuta con grammi 3,485 di diabase ho ottenuto grammi 0,1517 di ossido magnesiaco, quantità corrispondente a 4,35 per cento della quantità di roccia impiegata. Ritenendo ora che questa quantità di magnesia derivi se non in tutto almeno in massima parte dall'olivina, si viene a conchiudere che questo minerale

entra a comporre la diabase di Mosso nella proporzione di circa il dieci per cento. Si può pure acquistare un'idea approssimativa della quantità e del modo con cui l'olivina è disseminata nella roccia trattandone delle sezioni sottili con dell' acido cloridrico, il quale, come osservasi nel preparato che presento all'Accademia, lascia un deposito opaco bianco di silice gelatinosa nei punti che erano occupati dai cristalli d' olivina.

La diabase di Mosso riscaldata in tubo chiuso emette una piccolissima quantità d'acqua, altra prova della nessuna alterazione avvenuta nella roccia. Infatti la diabase di Mosso calcinata perde appena 0,45 per cento del proprio peso (media di tre osservazioni 0,46; 0,44; 0,45). La quantità d'acqua è certamente ancor minore di quella indicata da questa cifra, giacchè per la calcinazione contemporaneamente allo svilupparsi dell' acqua verificasi un aumento di peso prodotto dalla sovrossidazione del ferro che trovasi nella roccia per circa tre quarti allo stato di ossido ferroso.

Dai saggi qualitativi risulta che la diabase di Mosso contiene le sostanze seguenti: Acido silicico, allumina, ossido ferroso, ossido ferrico, calce, magnesia, soda, potassa, acido fosforico e traccie non determinate di acido titanico, ossido di manganese, di nichelio, di rame e di zolfo. Coll'analisi spettrale non potei rilevare indizio di litina, che mai non mancano nelle altre roccie feldispatiche del Biellese finora analizzate, e che trovasi in quantità relativamente grande nel melafiro di questa stessa regione.

Ho eseguito ripetutamente l'analisi quantitativa, determinandone sempre direttamente i componenti e mai per differenza. Nella separazione dell'ossido di ferro dall'allumina mi valsi del metodo di Rose. Ecco i risultati:

Anidride silicica	48.18
Anidride fosforica	0.37
Anidrite titanica.	traccie
Allumina	18.86
Ossido ferroso	6.22
Ossido ferrico.	2.27
Ossidi di manganese, di nichelio e di rame	traccie
Calce	9.95
Magnesia	8.46
Soda	3.88
Potassa	1.23
Perdita per calcinazione	0.45
	99.87

Il professore Rosenbusch al quale ho inviato un campione della diabase di Mosso confermò la diagnosi che io ne aveva fatto, e mi fece osservare che questa roccia presentava molta analogia con un' eufotide d'Ivrea che io gli aveva inviato lo scorso anno [1] e di cui egli descrisse brevemente la struttura microscopica alla pag. 466 della sua opera; *Die mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine.*

[1] Ho tolto la roccia inviata al prof. Rosenbusch da una bella collezione di pietre verdi d'Ivrea donatami dal collega prof. Gastaldi.

Nella roccia d'Ivrea l'augite è sostituita dal diallaggio, ma petrograficamente Rosenbusch non fa alcuna distinzione tra i due minerali. Lo stesso professore ebbe la cortesia di comunicarmi la seguente analisi chimica ancora inedita della eufotide d'Ivrea.

Composizione della eufotide d'Ivrea.

Anidride silicica	56.457
Anidride titanica	traccie
Allumina	20.188
Ossido ferrico	4.360
Ossido ferroso	5.002
Ossido di manganese	traccie
Calce	6.586
Magnesia	2.665
Potassa	1.000
Soda	2.951
Acqua	1.610
Anidride fosforica	2.420
	101.021

Raffrontando questa analisi con quella della diabase di Mosso si osservano delle differenze notevoli, specialmente nella quantità di silice e di magnesia, provenienti molto probabilmente dalla mancanza dell'olivina nella eufotide d'Ivrea.

Cannocchiale pensile per la misura degli angoli verticali ed orizzontali.

Memoria del Socio PAOLO di S. ROBERT

letta nella seduta del 3 marzo 1878.

Lo scopo che mi sono proposto nell'imaginare lo strumento (Tav. I. Figura d'insieme), che mi prendo la libertà di presentare alla R. Accademia de' Lincei, è il seguente:

Dato un cannocchiale da campagna, che abbia una croce di fili al foco dell'oculare, munirlo degli organi occorrenti per misurare con esso le distanze angolari al zenit, e gli angoli intorno alla verticale.

Imaginiamo che il cannocchiale sia sospeso ad un asse orizzontale, perpendicolare all'asse del cannocchiale, mediante una staffa, che porta un anello col nonio, entro al quale il tubo del cannocchiale sia scorrevole, nel modo che è indicato dalla figura 1.

Si disponga dapprima l'asse del cannocchiale orizzontalmente, dirigendolo verso una mira lontana allo stesso livello; e si segni, in questa posizione, uno zero sul tubo scorrevole, di contro allo zero del nonio. Partendo da questo zero, si segnino di poi lungo il tubo le divisioni del metro.

Facendo scorrere il tubo del cannocchiale nel suo anello di una certa quantità, segnata sul tubo, il sistema formato dal cannocchiale e dalla staffa girerà intorno all'asse orizzontale, e l'asse del cannocchiale s'inclinerà all'orizzonte di un angolo la cui tangente sarà data dal numero delle divisioni scorse dal cannocchiale.

In fatti sieno O (fig. 2) la projezione verticale dell'asse di rotazione, OB l'asse della staffa, ADCB l'asse del cannocchiale, che forma coll'orizzonte l'angolo α, A il centro di gravità del cannocchiale di peso P, G il centro di gravità della staffa di peso Q.

Essendo i due pesi P e Q in equilibrio intorno all'asse O, dovrà essere

$$\overline{\mathrm{AD}}\times P=\overline{\mathrm{DC}}\times Q,$$

e perciò

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DC}}\times\frac{Q}{P}.$$

Osservando che

$$\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{EG}}=\overline{\mathrm{OG}}\ \mathrm{tang}\,\alpha,$$

si avrà

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{OG}}\times\frac{Q}{P}\ \mathrm{tang}\,\alpha.$$

Ora la quantità di cui si è fatto scorrere il cannocchiale è uguale a

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DB}};$$

e poichè

$$\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{OB}}\ \mathrm{tang}\,\alpha,$$

si avrà

$$\overline{AB} = \left(\overline{OG} \times \frac{Q}{P} + \overline{OB}\right) \operatorname{tang} \alpha .$$

Le quantità $\overline{OG}$, $\overline{OB}$, P, Q sono costanti in uno stesso strumento, così che si può fare

$$\overline{OG} \times \frac{Q}{P} + \overline{OB} = k ,$$

essendo k una costante da determinarsi, o *a priori,* misurando le quantità $\overline{OG}$, $\overline{OB}$, P, Q, o *a posteriori,* misurando con un altro mezzo l'angolo α, corrispondente a un valore noto di $\overline{AB}$.

Ordinariamente non si ha neppur bisogno di conoscere k, trovandosi esso fattor comune nell'equazione finale.

L'espressione ottenuta

$$\overline{AB} = k \operatorname{tang} \alpha$$

mostra che la quantità scorsa dal cannocchiale è proporzionale alla tangente dell'angolo d'inclinazione del suo asse.

Il sistema adunque formato dal cannocchiale e dalla staffa somministra gli angoli che l'asse del cannocchiale fa coll'orizzonte.

È da notare che nello stesso tubo scorrevole nell'anello della staffa può adattarsi qualsivoglia cannocchiale, mediante sei viti, come è indicato nella fig. 3.

Ad ottenere la rotazione del cannocchiale, s'inserisce l'asse di rotazione fra due punte, l'una di contro all'altra, nella stessa guisa onde nel tornio si fa girare su di sè il corpo da tornire.

Ove non si abbia bisogno che di misurare gli angoli verticali, le due punte, attorno le quali si muove il cannocchiale, possono formar parte di un sostegno rappresentato nella fig. 4, il quale si fissa avvitandolo a uno stipite di una finestra, ad un albero, ecc., o sopra un bastone.

Quando occorra inoltre di tener conto degli angoli orizzontali, le punte intorno cui gira il cannocchiale formano parte di un sostegno (fig. 5) che può rotare attorno ad un asse verticale.

Per misurare gli angoli di rotazione descritti, si potrebbe far uso di un cerchio orizzontale diviso in gradi e frazioni di grado, come ne'teodoliti. Ho preferito un altro artifizio, cioè quello di far comparire all'occhio dell'osservatore il numero de'gradi percorsi, senza aver bisogno di leggere le divisioni del quadrante.

Ad un tal effetto l'asse verticale è munito inferiormente di una ruota dentata divisa in 40 parti, la quale imbocca in una vite perpetua la cui testa è divisa in 100 parti (fig. 6). Ad ogni giro compiuto dalla vite, la ruota s'avanza d'un dente; ond'è che le divisioni della testa della vite corrispondono alla 4000$^{\text{esima}}$ parte di una rivoluzione della ruota dentata, e quindi del cannocchiale intorno alla verticale. Se ne conchiude che ogni divisione della testa della vite corrisponde a un decimo di grado centesimale.

Per registrare il numero de'giri compiuti dalla vite, si adopera un contatore nel modo seguente. Sotto una lancetta fissa gira una mostra orizzontale (fig. 6 e 7) divisa in 10 parti, e montata sopra un asse che fa 4 giri ogni volta che l'asse della

ruota dentata fa un giro. La lancetta segna quindi sulla mostra sottoposta le decine de' gradi percorsi dal cannocchiale nella sua rotazione intorno alla verticale.

Un' altra lancetta è fissa sopra una seconda mostra orizzontale divisa in 4 parti, e montata sopra un asse che fa un giro mentre la mostra precedente delle decine fa 4 giri. Questa lancetta segna adunque le centinaia di gradi, ossia il numero dei quadranti percorsi.

Ciò posto, si vede che scrivendo successivamente: 1° il numero segnato sull' ultima mostra a sinistra; 2° il numero segnato sull' altra mostra delle decine; 3° il numero segnato sulla mostra verticale, fissata alla vite perpetua, si ottiene un numero di quattro cifre che rappresenta, in decimi di grado, l' angolo descritto nella rotazione del cannocchiale intorno alla verticale. Nella fig. 7 l' angolo segnato è di 368°, 2 centesimali.

Potendosi determinare in tal modo tanto gli angoli verticali quanto gli orizzontali, ne segue che il cannocchiale pensile si presta a tutte le operazioni nelle quali si adopera ordinariamente il teodolite.

Accennerò qui un' applicazione a cui intesi più particolarmente nell' ideare questo strumento.

Sia M la vetta d' una montagna inaccessibile di cui si vuol conoscere l' altezza (fig. 8). Si scelgano due punti O, N accessibili da cui si possa scorgere la vetta, ed i quali sieno visibili l' uno dall' altro.

Si misurino col cannocchiale pensile le distanze zenitali

$$\widehat{VON} = \alpha, \quad \widehat{VOM} = \beta, \quad \widehat{RNM} = \gamma,$$

e gli angoli orizzontali

$$\widehat{PQO} = \varphi, \quad \widehat{POQ} = \psi.$$

Di più, si misuri, per mezzo del barometro, la differenza di livello

$$\overline{NQ} = h.$$

L' altezza

$$\overline{MP} = H,$$

che si tratta di determinare sarà data da una delle formole seguenti:

$$H = h \frac{\cot\beta \operatorname{sen}\varphi}{\cot\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \psi)},$$

$$H = h \left\{1 + \frac{\cot\gamma \operatorname{sen}\psi}{\cot\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \psi)}\right\},$$

$$H = h \frac{\cot\beta \operatorname{sen}\varphi}{\cot\beta \operatorname{sen}\varphi - \cot\gamma \operatorname{sen}\psi},$$

$$H = h \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} \cdot \frac{\cot\beta(\cot\alpha + \cot\gamma\cos\varphi) \pm \cot\gamma\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\gamma + 2\cot\alpha\cot\gamma\cos\varphi - \cot^2\beta\operatorname{sen}^2\varphi}}{\cot^2\beta - \cot^2\gamma},$$

$$H = h \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} \cdot \frac{\cot\alpha\cot\beta - \cot^2\gamma\cos\psi \pm \cot\gamma\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta - 2\cot\alpha\cot\beta\cos\psi - \cot^2\gamma\operatorname{sen}^2\psi}}{\cot^2\beta - \cot^2\gamma},$$

ciascuna delle quali è soltanto funzione di quattro de' cinque angoli $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$.

Notisi che questi cinque angoli non sono indipendenti fra loro, ma che sono legati dall'equazione di condizione

$$\cot\alpha \operatorname{sen}(\varphi + \psi) - \cot\beta \operatorname{sen}\varphi + \cot\gamma \operatorname{sen}\psi = 0$$

Veggansi, per maggiori particolari, le due Note che ho pubblicate nel periodico inglese: *The Alpine Journal*. Vol. VI p. 414, e Vol. VII p. 204.

Allorchè (fig. 9) i due punti O, N si trovano in uno stesso piano verticale col vertice M della montagna da misurare, si ha

$$\varphi = 0, \quad \psi = \pi,$$

e quindi

$$H = h \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} \cdot \frac{\cot\alpha + \cot\gamma}{\cot\beta - \cot\gamma}.$$

È quasi sempre possibile di soddisfare alla condizione che i tre punti M, N, O, sieno compresi nello stesso piano verticale.

Ad un tal effetto, stabilito un segnale in fondo della valle, si cercherà, mediante un filo a piombo, percorrendo il pendìo della montagna, rimpetto alla vetta da misurare, un punto compreso nello stesso piano verticale che questo vertice ed il segnale inferiore.

In questo caso, tutti gli strumenti occorrenti per misurare una montagna inaccessibile si riducono al barometro, e ad un cannocchiale montato col nostro sistema.

Questo strumento sarà giudicato assai grossolano per avventura da taluno. È certo che la sua precisione è di gran lunga inferiore a quella che danno i grandi teodoliti che si fabbricano a'dì nostri. Ma tale come è può rendere servigî da non disprezzarsi ad un osservatore isolato. Sovente per correre dietro ad una precisione inutile si trascurano risultati preziosi che potrebbero bastare in certe circostanze.

Non credo inutile avvertire che molte volte, nella misura degli angoli, si aspetta da un teodolite una precisione che non può esser data dal suo cannocchiale. In fatti, l'ingrandimento che quest'ultimo somministra ordinariamente non corrisponde alla picciolezza delle ultime divisioni del circolo graduato. Se, per esempio, il circolo graduato dà l'approssimazione di un secondo sessagesimale, sarà d'uopo che il cannocchiale ingrandisca almeno sessanta volte l'oggetto, poichè quando un oggetto sottende un angolo di un minuto primo, la sua imagine sulla retina diventa così picciola da non produrre più verun effetto, almeno nella massima parte degli uomini [1]. Badisi che questo è un limite inferiore, e che in campagna, guardando oggetti molto lontani si commettono errori che ascendono talvolta fino a quattro minuti primi e più. Onde che per rendere sensibile un angolo di un secondo occorrerebbe, nel cannocchiale del teodolite, un ingrandimento di dugentoquaranta volte.

I cannocchiali che per lo più si adoperano ne'teodoliti sono troppo deboli. Si direbbe che il loro uffizio debba restrignersi a quello di dirigere la visuale. Laddove il loro scopo dev'essere quello d'ingrandire gli angoli che gli oggetti lontani sottendono, in guisa da fare scoprire spazî che ad occhio nudo sarebbero insensibili.

[1] L'Arago, nella sua *Astronomie populaire*, t. 3, p. 430, ammette 60″ pel limite della visione distinta di un oggetto rotondo o quadrato, e 6″ per quello di un oggetto allungato.

Lit. Martelli Roma

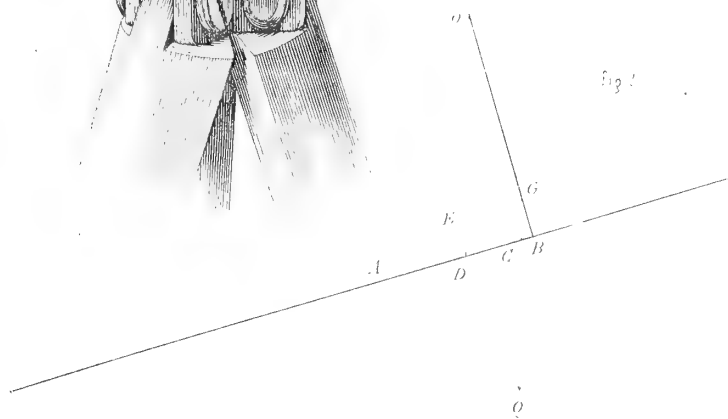
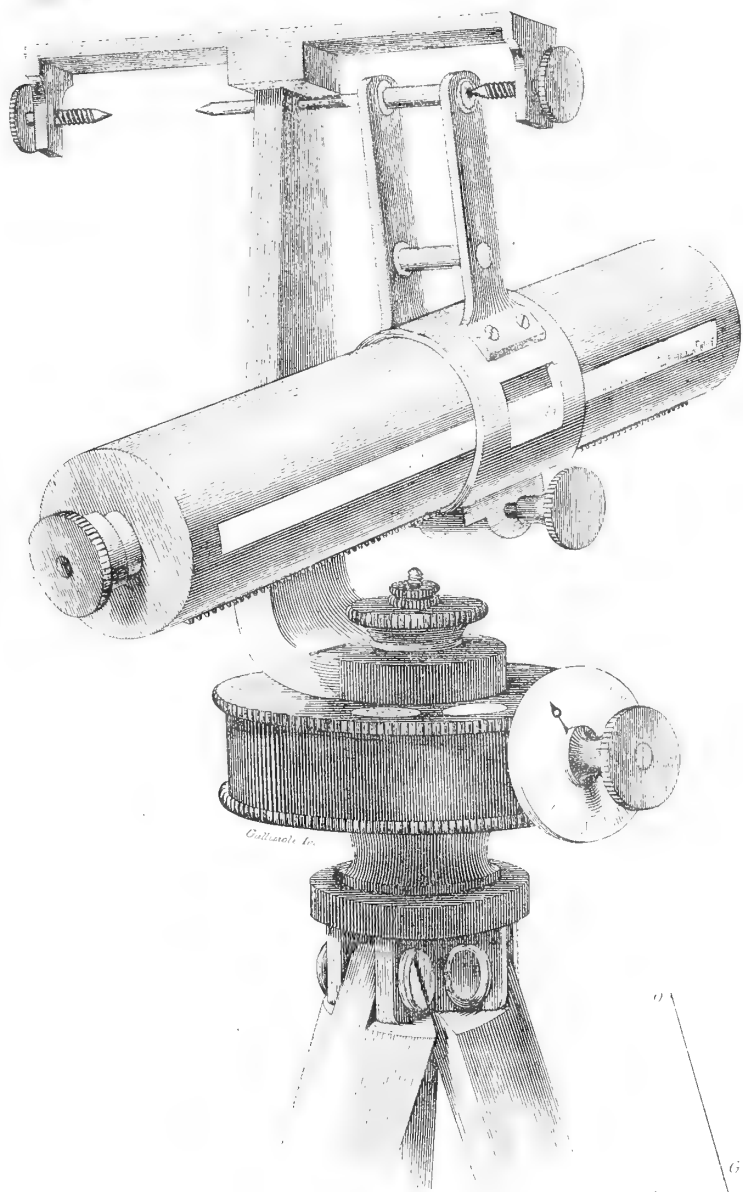
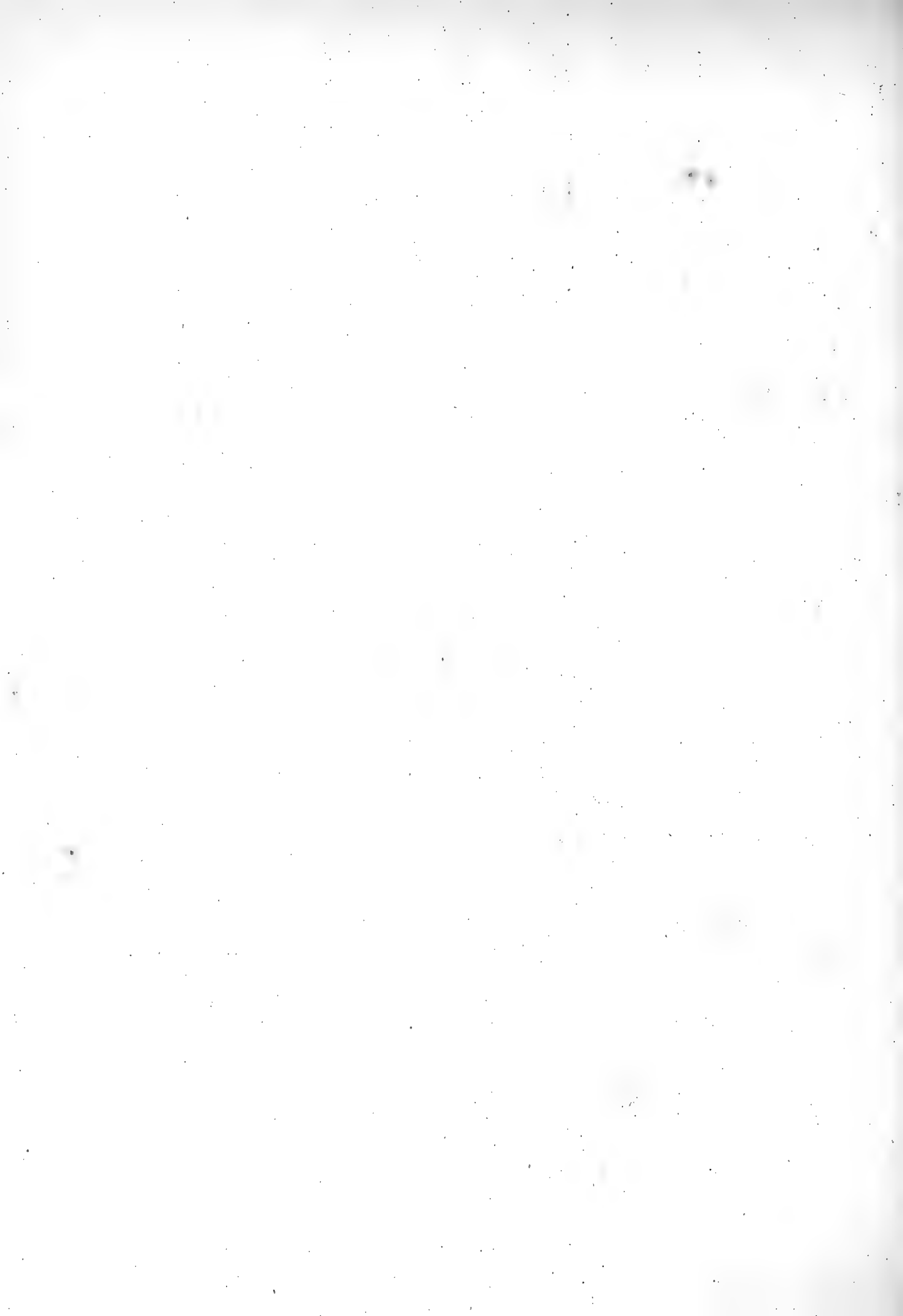
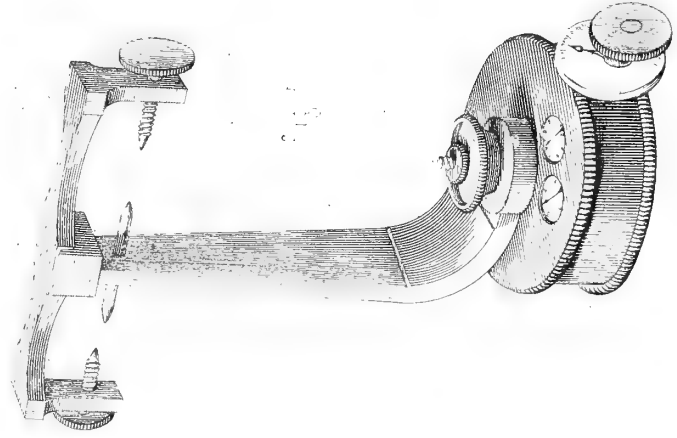
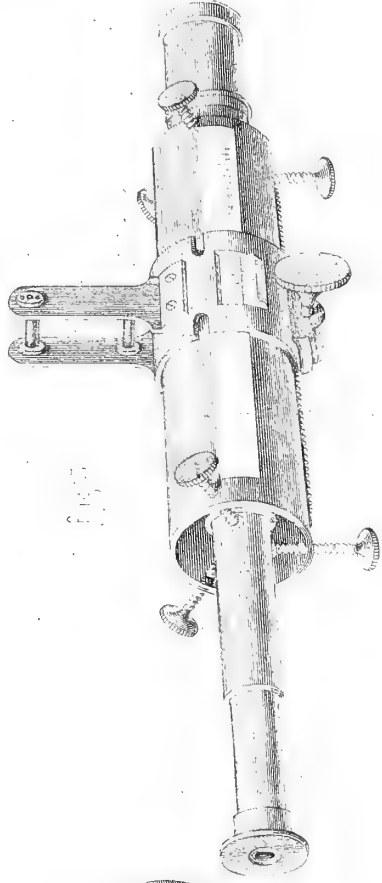
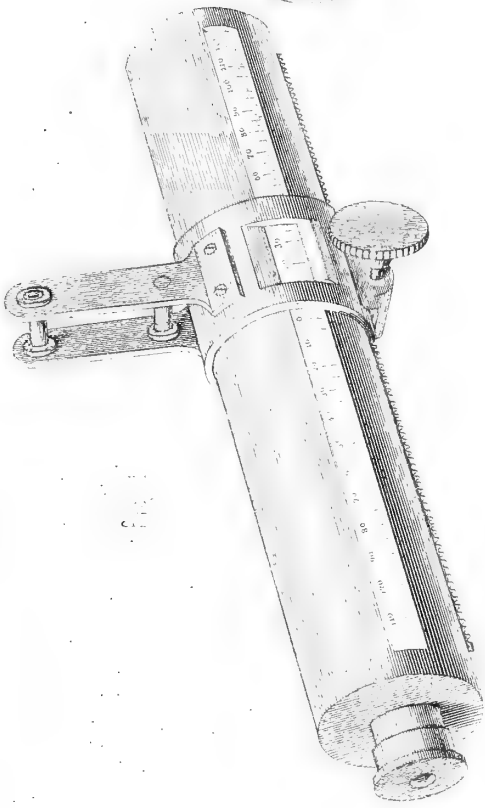



Fig. 4

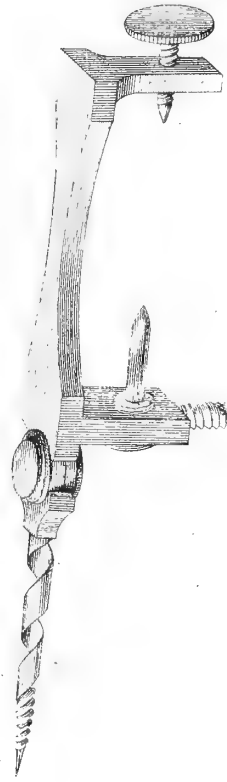
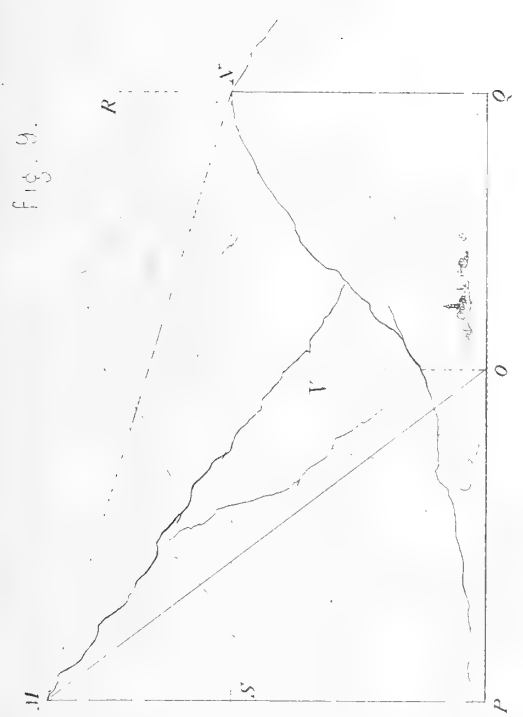
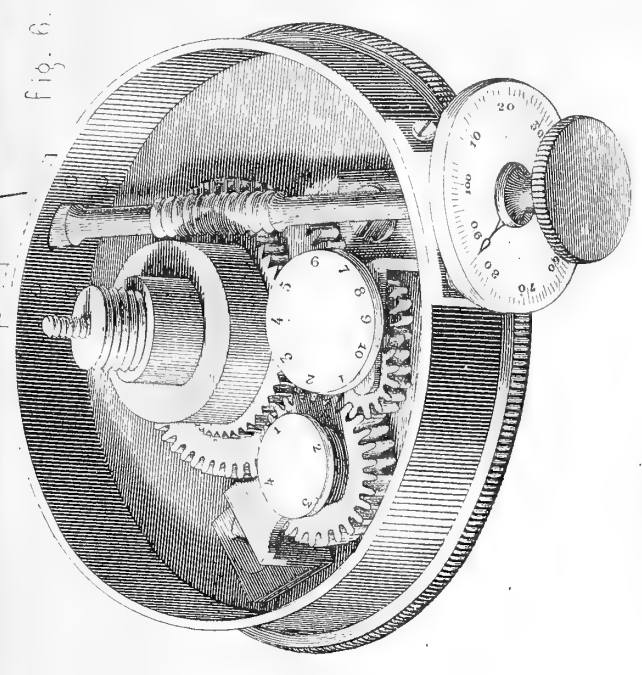
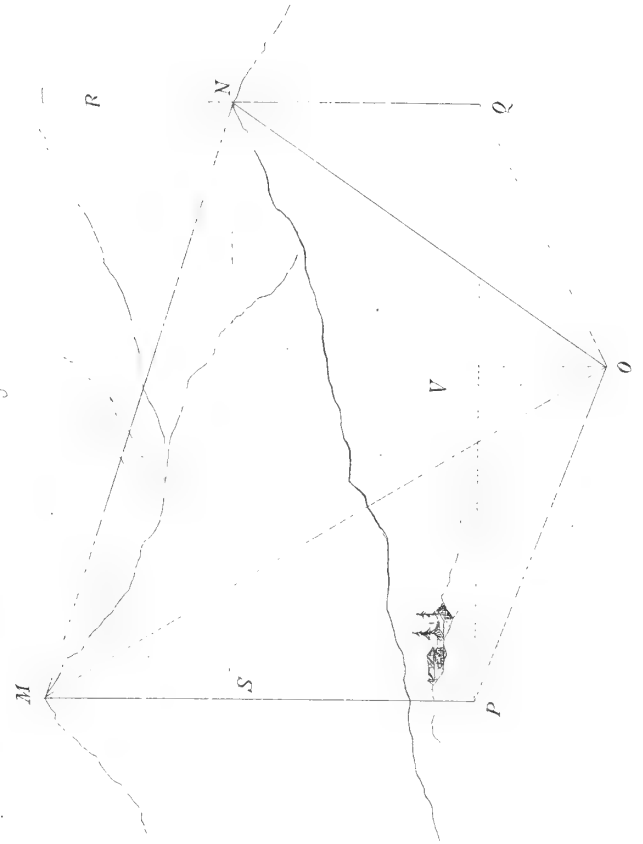
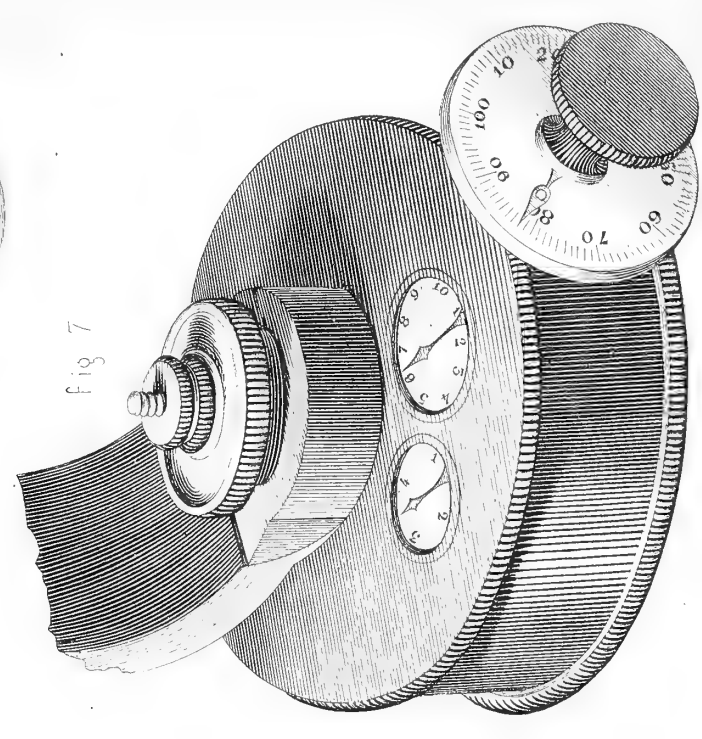



fig. 9.
M
R
S
N
V
P
O
Q
fig. 8
M
R
S
N
V
P
Q
O
fig. 6.
fig 7

Sul sistema usato pel rilevamento della Carta geologica d'Italia.
Nota dell'ingegnere F. GIORDANO

Ispettore delle Miniere

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Ho l'onore di esporre all'Accademia un cenno sul sistema adottato dagli ingegneri del Corpo delle Miniere, sotto la direzione del Comitato geologico, pel lavoro da poco incominciato della Carta geologica d'Italia. La brevità imposta alle letture dalla strettezza del tempo mi tratterrà dallo estendermi come vorrebbe l'importante argomento, onde sarò breve attenendomi ai cenni più essenziali sull'indole del lavoro di cui si tratta.

Nel nostro rilevamento si cerca di collegare debitamente alla parte scientifica che si occupa sovratutto della relativa età delle varie formazioni o terreni, anche la parte pratica ossia industriale ed utilitaria. Ed è appunto sotto questo doppio punto di vista che presentasi fortunatamente in Italia, come in diversi altri paesi, lo studio della Carta geologica. Infatti in un bene inteso studio geologico oltre ai più elevati principî scientifici che si collegano all'origine e sviluppo del nostro globo e degli esseri viventi, devono ritrovarsi tutti gli elementi essenziali della produzione minerale ed agricola, come anche la base su cui assidere solidamente quelle tante opere pubbliche di vario genere, che sono mezzi indispensabili alla vita delle nazioni moderne, ma che pur troppo esigono dispendî fortissimi: grandissimi errori accompagnati da perdita di tempo e di danaro si espone a commettere l'ingegnere e l'amministratore che procede senza la previa cognizione del terreno su di cui deve far lavorare; simile in ciò al navigante che si avanzi senza precauzioni in un mare ignoto privo ancora di carta idrografica. Si è perciò che sovratutto nelle regioni ancora nuove i governi comunque nascenti e di pochi mezzi, fanno precedere alla popolazione colonizzatrice ed ai grandi lavori pubblici un piccolo esercito di topografi e di geologi (surveyors and geologists) spendendo somme di parecchie centinaia di migliaia di lire ogni anno per ottenere questo studio preparatorio del terreno su di cui poi si deve operare.

Da noi l'idea della Carta geologica generale fu in procinto di venire attuata sin dal principio del nuovo Regno, poichè allora un r. Decreto del 1861 ne ordinava la formazione mediante l'opera di ingegneri del r. Corpo delle Miniere e di riputati geologi a quelli aggregati. Ma poco dopo, mentre si era soltanto ai preparativi, subentrate idee di strettissima economia, venne sospeso ogni assegno di danaro e nulla

si fece. Solo molto più tardi, quando già era capitale Firenze, venne ripresa l'idea, e creato perciò un r. Comitato geologico a funzioni gratuite, per occuparsene, il quale però era lasciato quasi sfornito di mezzi. Tuttavia qualche avviamento fu allora dato, ed intanto nel 1870 incominciava la stampa d'un *Bollettino geologico* accompagnato da Memorie in grande formato di cui si hanno già parecchi volumi. Dopochè passò la capitale a Roma venne ivi pure trasferito l'Uffizio geologico, e con nuovo r. Decreto (del 1873) richiamandosi le antiche disposizioni del 1861, venne definitamente affidata l'opera al Corpo degli ingegneri delle Miniere, ossia ad un corpo stabilmente organizzato, come s'era dovuto fare in tanti altri paesi ove era omai necessità il lavorare con forze unite sotto unica direzione. Taccio qui delle nuove difficoltà incorse sia per avere qualche maggior fondo, che infine era soltanto di venticinque mila lire, sia per crearsi del buon personale, lottando in tutto con continue difficoltà amministrative. Ma infine dopo molto tempo perduto si potè, or fa circa un anno, dare principio all'opera in qualche punto.

Sopra una carta generale d'Italia nella scala di $\frac{1}{600,000}$, venne raccolto e condensato con non lieve pena e molte ricerche, quanto esisteva sinora di studî parziali, però più o meno rudimentarî, di diversi privati geologi. Debbo subito avvertire che questa carta, oltre all'essere in scala piccolissima, non può dirsi che un semplice abbozzo, e che inoltre vi sono, specialmente nel sud della penisola ed in Sicilia, molte lacune. Essa non è, ripeto, che un abbozzo come quello del pittore che in un quadro mette giù dapprima soltanto i grandi lineamenti; tuttavia un tale abbozzo potrà essere molto utile, perchè mostra all'intelligente della materia quanto venne già fatto od almeno tentato di fare, e servirà intanto di base per ideare e bene distribuire il grande lavoro di dettaglio al quale venne da ultimo posto mano.

Questo lavoro particolareggiato e definitivo, che costituirà la vera Carta geologica, doveva però, onde riuscire utile, venire elaborato sovra una mappa topografica di grande scala, non inferiore per es. al 50,000, possibilmente al 25,000, come si fa ora in Prussia, e per certi tratti più interessanti anche al 10,000 o circa come si usa in Inghilterra per certe zone del suo territorio industriale. Ma una difficoltà che pure s'incontra in Italia, era appunto la mancanza d'una mappa esatta, in scala uniforme e di sufficiente grandezza. Fortunatamente lo Stato Maggiore nostro, ora Istituto topografico militare, incominciava sin dal 1862 questo grande lavoro della mappa topografica d'Italia, adottando la scala del 50,000 con curve orizzontali di 10 in 10 metri. Ed è questa stessa scala, che dietro diverse considerazioni venne adottata per la Carta geologica, almeno per la pubblicazione della medesima.

La suddetta mappa topografica veniva però dapprima incominciata soltanto nelle provincie meridionali perchè più ne mancavano, e prima ad averla intiera fu la Sicilia che comprende più di 45 fogli con le dimensioni $0,50 \times 0,70$. Poi si passò alle Calabrie e ad altre provincie via via verso nord, e si giunse oggidì sin oltre gli Abbruzzi, con speranza di vederla fra non molti anni estesa a tutto il rimanente della penisola.

Posto che della Sicilia si aveva questa mappa al 50,000, l'Uffizio del Comitato geologico, appena dopo tante strettezze ebbe disponibile qualche maggiore fondo ed alcuni ingegneri operatori, decise di incominciare ivi stesso il rilevamento geologico,

prendendo per primo campo di azione la zona solfifera in cui sono le numerose miniere di solfo, una delle principali ricchezze dell' isola, poichè così si collegava appunto l' interesse ed utile scientifico all' industriale. L' annua produzione infatti ne è da più anni di 200,000 tonnellate, del valore di 25 milioni, procuranti lavoro tra scavo, fusione e trasporti a più di 35,000 lavoranti : ma simile industria presenta pure non poche difficoltà che la geologia può giovare a rimuovere o diminuire. La zona solfifera si estende con varia ricchezza da Bivona e Girgenti ad Adernò e Rammacca, cioè su più di 12 dei fogli della suaccennata carta, ed ha il suo centro in Caltanisetta. Questa città centrale è pure la sede dell' Uffizio minerario, il quale cura la sorveglianza e la statistica di tutte le miniere dell' isola e dirige la Scuola dei capiminatori ivi da più anni stabilita. Ed è agli ingegneri addetti a quest' uffizio, di cui taluni sono specialmente geologi, che venne affidato il lavoro. Nella scorsa campagna vennero già rilevati diversi fogli; essi sono quelli detti di Caltanisetta, Girgenti, Piazza, Palma e Licata. Ma qui debbo subito avvertire come per uno studio di tal fatta che non solo interessa la scienza ma l' industria, come ne darò tosto un' idea, la scala ordinaria del 50,000 non è sufficiente e vi occorre almeno quella doppia, cioè del 25,000. Non avendola noi ora per la Sicilia, si usò il rimedio di procurarsela mediante ingrandimento artificiale col processo foto-litografico. Allora ognuno dei fogli al 50,000 ne dà 4 al 25,000 che sono quelli che si forniscono ai nostri geologi pei loro rilevamenti in campagna. I particolari del rilevamento al 25,000 vengono dipoi riportati sui fogli al 50,000 e se ne ha così con sufficiente precisione la Carta geologica in questa scala del 50,000, quella cioè che si deve poi pubblicare. Cadun foglio di campagna è sottoscritto dagli ingegneri che lo rilevarono, ciò che ne impegna l' onore e la responsabilità. Noto qui i nomi degli ingegneri Baldacci, Mazzetti e Travaglia che lavorano sotto la direzione dell' ingegnere Toso il capo dell' Ufficio minerario, senza però dimenticare che molti studî preliminari devonsi all' ingegnere Mottura pure residente in Sicilia.

A simili carte vanno annesse delle accuratissime raccolte di campioni di roccie e conchiglie fossili, oltre poi ad una estesa descrizione di tutte le formazioni con le sostanze utili che contengono (e che qui sono specialmente il solfo, il salgemma ed il gesso), la quantità e temperatura delle sorgive, la relazione fra la natura dei terreni e li prodotti vegetativi ed agricoli, ed ogni altro particolare fisico che può essere utile.

La scala di colori adottata venne stabilita in modo da distinguere e far spiccare nel miglior modo e senza trascendere in troppe teorie le varie speciali formazioni geologiche, come il mostra la leggenda annessa. Abbiamo, per esempio, colorato in bistro il terreno Eocenico o Terziario inferiore, terreno generalmente sterile di sostanze utili e che serve di base al Terziario medio detto Miocene. Questo i nostri geologi dividono in due piani, cioè l' inferiore distinto con color cenere scuro, contenente argille marnose col salgemma, ed il superiore distinto con color giallo-ranciato, il quale contiene appunto il calcare solfifero, in cui sono aperte tutte le miniere. Questo è sormontato dai gessi (color paglierino), e questi poi dai calcari marnosi detti *trubi* (color roseo). Ogni terreno importante è poi ancora suddiviso in piani minori più particolareggiati. — E così il terreno solfifero venne suddiviso ancora

dai nostri geologi in non meno di 4 piani secondo la loro diversa natura i quali hanno tutti lo stesso color ranciato ma sono distinti con tratteggiatura diversa ([1]). I banchi solfiferi stessi dove affiorano sono indicati da un tratto rosso molto forte. E non è senza molto studio pratico che si giunse a stabilire tutte queste suddivisioni con i colori e segni che devono distinguerli. Le sezioni o profili geologici indicati su di un foglio annesso corrispondono alle linee bianche segnate sulla mappa; tali sezioni mostrano meglio quanto sia stato tormentato e contorto dagli antichi movimenti della crosta terrestre questo terreno solfifero e quindi a quali difficoltà va spesso soggetta la escavazione delle miniere più profonde che nei banchi di esso devono aprirsi. Ora è chiaro che quando tutta la zona solfifera sarà stata così minutamente e con tale geometrica esattezza rilevata, avremo una vera anatomia di questo gran giacimento solfifero, che ci permetterà di calcolare esattamente la totale quantità di solfo ancora esistente nelle viscere della Sicilia e disponibile nei venturi anni al commercio. Sarà questo dirò così un inventario geologico utilissimo, simile a quello ordinato anni sono dal Governo inglese ed eseguito da quell' Ufficio geologico pel suo carbon fossile; studio memorabile la cui pubblicazione riuscì poi fortunatamente a calmare l' apprensione prima eccitata da inesatti apprezzamenti.

Sopra al Miocene viene il Pliocene o Terziario superiore detto anche da noi subappennino, al quale fanno poi ancora seguito i depositi alluviali di varie epoche. Il detto Pliocene è colorato in violaceo (e parte in bleu) per la sua parte inferiore che è di marne azzurrine, ed in verde per la parte superiore, tanto estesa e caratteristica, che è di sabbie gialle alternanti pure con banchi argillosi. Mentre le prime sono assai favorevoli talora a sostenere la vegetazione ed a fornire sorgive, i secondi, come in genere i terreni molto argillosi, sono assai sterili ed inoltre si sfacelano all' azione delle acque. Di simili banchi argillosi e frananti si trovano pur troppo anche in una parte del terreno miocenico, quello che contiene lo solfo, ed anzi ve ne sono di pessima qualità. Cosicchè se questo terreno porta con sè la ricchezza solfifera tiene pure in certe sue zone la rovina. E chiamo senza scrupolo con tal nome quelle terribili frane che tanto ostacolo posero e pongono all' estensione delle ferrovie in Sicilia, e che furono e sono causa di tanti guai i quali trascorsero persino nel campo della nostra interna politica. Le linee di Montedoro, di Vallelunga, delle Imere ed altre cadono più o meno in terreni di tal genere, e se gli anzicennati molteplici ostacoli non avessero tanto ritardato l'Uffizio geologico ed impeditolo di fare prima i fogli geologici di Santa Caterina e di Ciminna ove cadono quelle linee, alcune gravi illusioni e precipitate misure non avrebbero avuto luogo, ed innanzi alla inesorabilità dei fatti fisici ben constatati non avrebbero forse nemmeno avuto campo di sorgere delle appassionate opinioni. Ora si va pur mettendo mano a rilevare esattamente quelle zone così difficili, ed anzi alcuno degli ingegneri nostri deve tosto colà recarsi a rilevarne le difficoltà al semplice lume della scienza geologica pratica.

Mi rincresce non aver ora tempo a toccare, giacchè siamo in Sicilia, di alcuni altri lavori speciali che vi si fanno, come per es. un bell' Etna in rilievo con la

([1]) Essi sono i seguenti: 1° gessi; 2° calcare solfifero; 3° calcare lacustre con noduli silicei; 4° tripoli con resti di pesci e di insetti.

colorazione distinta di tutte le eruzioni avvenute dai tempi più remoti ad oggi, ed altro studio che ci fu richiesto sullo stretto di Messina per vedervi la possibilità o meno di un passaggio economico sottomarino. Il risultato, il dico in due parole, sarebbe negativo essendovi tali difficoltà da sconsigliare, almeno per ora, simile opera.

I descritti esempî di Sicilia spero abbiano già data un' idea di quale positiva utilità pratica possa essere una esatta Carta geologica; ma vi sono altre località in Italia che presentano casi analoghi. Citerò qui solo la catena delle Alpi apuane o carraresi, fra Toscana e Liguria, tanto ricca di marmi che vengono anche smaltiti in tutte le parti del mondo per un valore annuo, in tempi prosperi, di molti milioni. Anche qui però vi sono ora delle difficoltà, ed occorrerebbe uno studio esatto come quello della zona solfifera di Sicilia, un' anatomia di quei monti marmiferi per valutarne le risorse ancora latenti e progettare nuovi ed economici mezzi di escavazione e trasporto. Qui non si aveva però alcuna buona carta: ma fortuna volle che il Ministero della Guerra, debitamente ufficiato dal Comitato geologico, ordinasse testè all' Istituto topografico di rilevare subito quella catena, e ciò che più monta, alla desiderata scala del 25,000; cosicchè avuta tale mappa si potrà quivi intraprendere un lavoro esatto e proficuo alla scienza ed all' industria.

Ora vengo finalmente ad un altro lavoro o saggio, venuto testè di Sardegna, il quale è una carta geologica con la distinzione delle varie roccie e delle miniere di una parte della regione sud-ovest dell'isola dove trovansi le più importanti miniere di piombo argentifero, di zinco, di ferro e di altri metalli nonchè dei banchi di lignite che ivi trovansi nel terreno eocenico. Vi è tra l'altre la ricca miniera piombifera di Monteponi, ancora proprietà del Governo, stata erroneamente affittata nel 1850 ad una società per soli trent'anni, ciò che insieme all'imperfetta conoscenza di certe condizioni geologiche di quella regione fu ed è ancora causa di assai gravi inconvenienti. In questa parte della carta manca la zona delle miniere del nord dove sono quelle di Montevecchio, Gennamari ed altre, e ciò perchè la premura di finire una parte almeno per mandarla all'Esposizione di Parigi fece pel momento ritardare il rimanente: ma la totalità verrà fra non molto compiuta. Questo lavoro che è più tecnico forse che quel di Sicilia, è opera degli ingegneri delle miniere del distretto di Sardegna la cui sede è in Iglesias, ove è pure una scuola mineraria condotta dagli ingegneri medesimi che sono il sig. Testore come capo e Zoppi, Lambert, Deferrari e gli aiutanti Fossen e Lentini. E qui si aveva anche la singolare difficoltà della mancanza assoluta di carta topografica, circostanza comune ancora a tutta la Sardegna; mentre poi lo studio stesso doveva eseguirvisi in scala molto grande, per esempio al 10,000, che fu infatti la scala prescelta. Gli ingegneri dovettero quindi fare anzitutto essi stessi il rilevamento topografico profittando di loro studî e dei piani delle concessioni di miniere forniti loro dalle compagnie. Un foglio abbraccia la parte sin' ora rilevata che è quella tra Iglesias, Flumini ed il mare, un altro due sezioni l' una nord-sud, l'altra est-ovest. Lo scopo di questo lavoro è, come dissi, piuttosto tecnico e nell'interesse dell' avvenire delle miniere, poichè oltre allo studio geologico delle medesime vi è qui una grave questione di idrografia sotterranea riguardante le acque, le quali mentre erano nulle nei livelli superiori, divennero ora

invece copiosissime in profondità e quasi omai insuperabili con le macchine. La citata miniera di Monteponi, per esempio, mentre avrebbe dovuto aprire una profonda galleria di scolo per liberarsene, credette invece far più presto (stretta a ciò in parte dalla prossima scadenza del suo affitto) impiantando grandi pompe mosse dal vapore col dispendio di 2 milioni. Ma ora a malgrado di averne elevata la forza a più di 1,000 cavalli, l'acqua è troppa e non si vince, onde la minaccia di sospensione del lavoro se il Governo non si decide presto ad un nuovo contratto d'alienazione che permetta di intraprendere quella grande galleria di scolo. Ed inconvenienti di tal natura sono a temersi anche per altre vicine miniere, mentre uno studio geologico preliminare di questo genere eseguito in tempo, avrebbe forse potuto indurre e Governo e Società a migliori e più giuste idee. Ecco ora un cenno sul lavoro stesso. La carta distingue anzitutto, come dissi, le formazioni di epoca diversa, che sono la granitica e la siluriana, antichissima sede dei filoni metalliferi, ed i lembi di terziario eocenico con banchi di lignite bene utilizzata alle macchine delle miniere stesse. La formazione siluriana è poi costituita in grandissima parte da due generi di roccie che conveniva distinguere in questa carta, cioè calcari subcristallini in grandi banchi od in ammassi stratiformi o lenticolari (segnati in bigio), e scisti argillosi filladici (segnati in rosso pallido) intercalati a quelle masse calcaree. Gli affioramenti ed i lavori delle varie miniere di piombo, zinco, ferro ed altro vi sono esattamente indicati. Bene esaminando si vede per es. che quasi tutte le miniere metallifere stanno nella parte bigia ossia nei calcari, e talune al loro contatto cogli scisti; e ciò già può dare agli intelligenti un criterio utile sia per spiegare la genesi probabile di quei minerali, sia pel loro rintracciamento nei lavori profondi dell'avvenire.

Quanto alle acque sotterranee, risulta, e sovratutto dalle sezioni annesse, che le medesime trovansi soltanto nelle grandi masse calcaree sempre più o meno fessurate e permeabili, formanti come enormi spugne e vi costituiscono in quasi tutta la regione un vasto lago sotterraneo che si mantiene ad un dato livello di circa 70 metri sul mare. I lembi scistosi intercalati essendo impermeabili, separano talora l'una dall'altra certe parti di simile lago sotterraneo, le quali così vi possono avere talora dei livelli alquanto diversi. Questi dati ci fornisce ora finalmente il lavoro esatto dei nostri ingegneri, ed altri assai ve ne sarebbero da rilevare, cui per brevità debbo tralasciare, concludendo però che simile studio ci fornirà ora dati preziosissimi per la sicurezza e l'economia dell'avvenire di queste miniere e contro i pericoli che le minacciano.

Qui finirò: ma spero che quanto ho finora esposto intorno alla futura nostra Carta geologica abbia dato un'idea del sistema di rilevamento geometricamente esatto, scientifico ed industriale ad un tempo, che venne adottato. Un tale sistema gioverà molto a risolvere certe questioni teoriche intorno alle quali sono ancora così discordi le opinioni dei geologi, perchè metterà in sodo i fatti positivi dalla cui giudiziosa interpretazione deve scaturire la vera soluzione. Una carta così fatta avrà il pregio di adattarsi facilmente a qualunque variazione la scienza fosse col tempo indotta ad accettare nella classificazione e nella cronologia dei terreni, perchè tali variazioni non potranno mai affettare la natura dei terreni stessi, i loro contatti nè l'ordine della loro reciproca posizione. Sarà tutt'al più questione di nomi e di

raggruppamenti diversi, ma la parte geognostica fatta una volta colle suindicate norme non perderà mai del suo valore.

Dovrei aggiungere che tal sistema è praticato eziandio con la massima economia; e quindi qualora il Comitato possa disporre dello stretto occorrente pel suo bilancio annuo, ed abbia fra non molto un locale un po' migliore dell'attuale per le sue collezioni ed un laboratorio chimico pei suoi studî, cose che ancora gli mancano, potrà con una somma annua relativamente ad altre nazioni molto piccola, giungere presto ed economicamente al compimento della intera Carta. E questa Carta col citato corredo di raccolte, di analisi e di dati tecnici sarà, come dimostrammo, quasi l'inventario delle forze produttive del paese, mentre nel tempo stesso gli potrà servire di guida pel miglior modo di svilupparle evitandone lo spreco, e conseguendone (ciò che è tanto essenziale per noi) il massimo effetto utile.

Teorica dei Soffioni boraciferi della Toscana.

Memoria del prof. EMILIO BECHI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 maggio 1878.

Hypotheses non fingo.
NEWTON.

I Soffioni boraciferi della Toscana furono sempre oggetto di studio d'illustri scienziati; imperciocchè la contemplazione di sì alto e importante fenomeno destava vaghezza di conoscerne la causa, e di darne giusta spiegazione. Ma nel volere con troppa fidanza spiegare il fenomeno con speculazioni teoriche, non cimentate alla fede dell'esperienza, vennero a creare un numero d'ipotesi, le quali aveano ingannevole sembianza di vero. Per la qual cosa essendo oramai da molti illustri personaggi, molto sopra questa materia discorso, ed essendo note le ingegnose ipotesi in diversi tempi da essi mandate fuori, non accade che io entri in lunga diceria, e solo ne dirò quel tanto che occorre per dimostrare la fallacia di esse.

Non voglio però che alcuno creda aver io presunzione di farmi censore indiscreto delle altrui dotte fatiche, o dispensatore di disinganni con sottigliezze di disputa; imperciocchè è solo mio intendimento far conoscere una scoperta da me fatta, la quale dà compimento agli studî dell'acido borico, nel tempo stesso che ci fornisce la vera spiegazione dell'origine dei Soffioni boraciferi.

È ben nota l'ingegnosa ipotesi, che messe fuori l'illustre Dumas. Supponeva il celebre scienziato che in una certa profondità della terra si trovasse una massa di solfuro di boro, la quale per il contatto dell'acqua desse origine all'acido borico e al solfuro idrico, che si trova nei Soffioni.

Tale ipotesi veniva accettata dal Payen, il quale non trovando acido borico nei bollenti vapori dei Soffioni, ammetteva pure col Ridolfi, che le pareti dei condotti dei Soffioni fossero rivestite di tale acido, onde l'acqua dei lagoni cadendovi per il proprio peso, e venendo ributtata fuori dai vapori, sciogliesse nello strisciamento una certa quantità di acido borico. Ma svanì tale ipotesi allorchè lo Schmidt trovava nelle acque condensate dei bollenti vapori acido borico, comecchè in piccolissima dose.

Il sig. Bolley immaginò che la formazione dell'acido borico movesse dalla reazione del cloruro di ammonio sul borato di soda: per la qual cosa ammetteva che si trovasse nelle viscere della terra uno strato di borato di soda e di cloruro di

ammonio: il che non era molto probabile, non essendovi alcun fatto che accertasse l'esistenza di tali materie a una certa profondità. Ma

> Veramente più volte appaion cose,
> Che danno a dubitar falsa matera,
> Per le vere cagion che son nascose.

Perciò volli sottoporre tale ipotesi al cimento dell'esperienza: ed avendo fatto un Soffione artificiale, lo mandai con giusto impeto sopra un miscuglio, formato di borace e di sale ammoniaco. Ma nell'acqua, dove passavano i bollenti vapori, oltre all'acido borico, grandissima era la quantità di sali ammoniacali che si scioglievano: le quali materie non si trovano davvero in tali proporzioni, esaminando sottilmente le acque dei Soffioni.

Il Wagner, e quindi io stesso per rendermi ragione dell'ammoniaca che si forma nell'acqua dei lagoni, supponevamo l'esistenza dell'azoturo di boro: ma io era il primo a mettere innanzi l'idea, che l'acqueo vapore provenisse da più profonda regione, e che solo nel suo cammino incontrasse lo strato boracigeno (1).

Tuttavia vedendo che l'ipotesi dell'azoturo di boro non era sostenuta da alcun fatto, io supponeva che lo strato boracigeno fosse di borato di calce, da che il sig. Durval ne trovava di continuo attraversando il terreno con la trivella (2).

Di fatti facendo passare sul borato di calce, vapore acqueo, gasse solfidrico, anidride carbonica, e un po' d'aria atmosferica, io otteneva acido borico, e solfato di ammoniaca: e nel tempo stesso con altra esperienza vedeva come il solfato di ferro, il solfato di soda, e il solfato di magnesia, potevano essere in parte portati via dai bollenti vapori: le quali materie tutte per appunto si trovano nei lagoni di Travale.

Questo fatto avendo levati que'primi velami di falsità, mi faceva scorgere un'apparenza di vero; se non che io non poteva chiamarla verità manifesta, rimanendo sempre una ipotesi l'esistenza del borato di calce, comecchè trovato in pezzetti nel terreno superficiale.

Stavano in questi termini le cose, quando comparve una Memoria assai importante, e di molto merito del sig. Dieulafait, nella quale conferma, che nell'acqua del mare trovasi acido borico; e venendo quindi a parlare dei lagoni della Toscana, ammette il terreno di essi nella regione salifera, e scende a queste conclusioni, le quali riporterò, come a modo e a verso sono state fedelmente tradotte dall'egregio professore D'Achiardi.

1. « La sorgente dell'acido borico in Toscana è situata in una formazione relativamente moderna, la formazione terziaria; la parte di questa formazione attraversata dai Soffioni corrisponde esattamente all'orizzonte salifero di questa divisione. L'acido borico vi esiste bello e formato come borato di magnesia; la sua origine è un caso particolare di un fenomeno del tutto generale, l'evaporazione spontanea degli antichi mari.

2. « I fenomeni vulcanici che in Toscana sono collegati all'uscita dell'acido

(1) Ved. Bechi, *Sui borati che naturalmente s'incontrano nei Soffioni della Toscana.*
(2) Ved. Bechi, *I Soffioni boraciferi di Travale.*

borico, e ai quali si è attribuito esclusivamente fin ora la formazione di questa sostanza, non hanno in vece alcun che di comune assolutamente con essa sotto questo aspetto. L'ufficio dei fenomeni vulcanici è puramente meccanico; si limita a fornire calore. Questo calore scalda e svapora l'acqua impregnante i terreni; l'acqua e il cloruro di magnesio sono decomposti; si forma dell'acido cloridrico che mette in libertà l'acido borico, che viene incessantemente trasportato dal vapore acqueo. L'acido cloridrico a sua volta non ha assolutamente nulla di vulcanico nella sua origine. Lo stesso precisamente è del vapore acqueo; l'acqua dei lagoni non è altro che acqua atmosferica.

3. « In conclusione l'acido borico e le sostanze che l'accompagnano in Toscana e nei giacimenti analoghi sono (ad eccezione dell'acido carbonico) prodotti esclusivamente sedimentarî, il modo di formazione ci è rivelato in tutte le più minute particolarità dallo studio delle acque madri delle saline. Conviene dunque d'ora in poi respingere in modo assoluto ogni idea d'eruzione, d'emissione geyseriana, di reazione violenta esercitantesi sopra sostanze rare o di composizione eccezionale; in una parola tutto ciò che in qualunque siasi modo si colleghi ai fenomeni vulcanici ».

Su la Memoria del sig. Dieulafait scrisse giuste, dotte ed importanti osservazioni il prof. D'Achiardi: di modo che chiaro apparisce che le nuove idee, e i lunghi studî del sig. Dieulafait non approdano a una giusta spiegazione dei Soffioni boraciferi della Toscana.

Intanto la questione sull'origine dell'acido borico rimaneva sempre la stessa; e a me scottava molto il vedere un fenomeno di tanta importanza, che nasce in terra italiana, che porta tanta ricchezza all'Italia, non fosse ancora spiegato da un italiano, e si vagasse sempre nel campo delle ipotesi. E specialmente a me stava a cuore, che in diversi tempi m'ero dato attorno ai Soffioni, ed avevo o scoperti o analizzati tutti i minerali boraciferi.

Ripresi dunque lo studio dei Soffioni, e mi messi all'opera con tutto l'ardore: e quali sieno i risultamenti avuti verrò adesso via via dimostrando.

L'ingegnosa ipotesi fatta dal sig. Dieulafait, dell'origine dell'acido borico, il quale dovrebbe muovere dalla boracite, lasciata dalle acque di antichi mari, mi dette motivo di fare una prima sperienza per vedere specialmente la facilità della scomposizione di essa boracite. Feci così: Presa della carnallite e della boracite di Stassfurt, le messi in un tubo adattato, e scaldate a modo e a verso, vi feci passare vapore acqueo a guisa di Soffione, aggiungendovi ancora l'acido carbonico e il gasse solfidrico. Nell'acqua del vaso, che formava il piccolo lagone, e dove l'acqua gorgogliava per i bollenti vapori del Soffione artificiale, in breve tempo si sciolse grandissima quantità di acido cloridrico, e buona dose di acido borico. Chiaro dunque apparisce la perfetta scomposizione della boracite, e la formazione dell'acido borico, mediante il bollente vapore; il che, a dir vero, non mai pensai di rivocare in dubbio, anche prima dello sperimento. Ma il mio fine era quello, come ho già detto, di vedere la rapidità con la quale si scomponeva la boracite: giacchè rispetto all'acido cloridrico, che in gran quantità già supponevo doversi formare, si poteva credere scomporsi col calcario, che abbondantemente trovasi nel terreno dei Soffioni, onde si originasse la più parte dell'anidride carbonica. Ma lasciando da parte tutte le congetture che si possono fare, e

ristringendomi ai fatti, dirò, che per via di tale sperienza potei conoscere, che se l'acido borico dei Soffioni si originasse dalla boracite, tenendo conto della facilità di sua scomposizione, se ne dovrebbe trovare nei vapori almeno dieci volte più di quello che si trova presentemente.

Ma anche il borato di calce, di cui avevo supposto l'esistenza nelle viscere della terra, lascia assai facilmente sfumar via l'acido borico. Di fatti avendo cimentato la bechilite nello stesso modo della boracite col Soffione artificiale, mi venne via una quantità di acido borico molto maggiore di quello che incontrasi nei Soffioni boraciferi.

Tali osservazioni, che sembrano a prima giunta così semplici, e di sì poco momento, erano per me di gran valore: imperocchè bisognava, a parer mio, in sì delicato studio osservare tutto con tutta diligenza, ed usare tutta la perspicacia per ben discernere il vero dal falso: di modo che feci un gran numero di altre sperienze, che tralascio di raccontare per isfuggire lunghezza, le quali mi confermavano sempre più non doversi attribuire l'origine dell'acido borico al borato di calce, e molto meno al borato di magnesia. Intanto le prove che incominciai sui borosilicati mi davano ragione di credere che meglio corrispondevano a ciò che vedesi nei Soffioni; poichè scomponendosi adagio adagio davano quella giusta dose di acido borico, che per appunto trovasi nei bollenti vapori dei Soffioni, la quale è così piccola da farne dubitare la sua esistenza a chi non li esamina sottilmente.

Confermandomi però sempre nel mio proposito di non voler dar fede a speculazioni teoriche, ma soltanto a quello che mi avessero dato i fatti, mi messi in testa di non lambiccarmi il cervello con nuove ipotesi, e di ricercare la roccia boracigena, la quale doveva trovarsi. E benchè verso le rocce, dove sbucano i Soffioni, aguzzassi le ciglia

Come il vecchio sartor fa nella cruna,

per vedere, se nei burroni scoscesi, e nelle più profonde trapanazioni, apparisse qualche traccia di boracite, o di altro minerale simile, non mi fu possibile trovarlo: onde tengo fermissima opinione che nel terreno di sedimento dei Soffioni non ci sia boracite per deposito di antichi mari, e non vi sia nè pure altro minerale importante, che dia origine all'acido borico.

Le rocce ofiolitiche, molto sparse in tutta l'Italia, formano nel littorale maremmano una serie di gruppi con una certa regolare successione; onde essa serie fu nominata catena ofiolitica del littorale. Tali rocce hanno forma e caratteri eruttivi, e sono ben distinte dalle rocce di sedimento, da cui emergono in grandissime masse a guisa d'isole, formando montagne a foggia di cupole. Non c'è dubbio che non sieno posteriori alla formazione dell'eocene: e le compenetrazioni, gli sconvolgimenti, le perturbazioni, le trasformazioni, o come meglio piace dire i metamorfismi, indotti nei terreni circostanti, ci danno l'idea d'esser venute fuori con fenomeni grandiosi e sotterranei, comecchè eruttate in diverse epoche. La più antica di tali rocce è il serpentino diallagico, di colore verde cupo, nella cui pasta sono qua e là sparse molte laminette scure di diallagio. L'altra roccia di più moderna formazione, differente anche per il colore, soventi volte traversa il serpentino antico, o comparisce in vicinanza di esso: onde la distinzione che se ne fece in serpentini antichi, e in serpentini

moderni. Ricordo a bello studio questa divisione principale, e passo sotto silenzio qualsiasi descrizione intorno le diverse rocce serpentinose, che costituiscono la serie antica e moderna, come quelle che furono studiate, descritte e illustrate, specialmente dai professori Savi e Meneghini.

È noto come i Soffioni si trovino disposti sopra una linea, che corre parallelamente all'asse della catena ofiolitica; e, comecchè appariscano in rocce eoceniche, mioceniche e plioceniche, trovansi sempre in vicinanza delle grandi e potenti masse dei serpentini. Il che dà a credere fermamente avere l'eruzione dei bollenti vapori un'intima attinenza con tali rocce plutoniche, i quali apronsi il cammino dagli strati di sedimento, quando non trovano più facile uscita dalle rocce eruttive (1).

Tornato a studiare i lagoni, e confermandomi ogni giorno più nell'idea della loro attenenza, e della strettissima connessione con le rocce eruttive, pensai di ricercare sottilmente, se da esse rocce prendesse origine l'acido borico, comecchè nessuno avesse mai supposto, non che pensato, all'esistenza del boro tra i componenti del serpentino. Gli è vero che negli anni passati trovai cristallini di datolite nella calcosina di Montecatini (2); ma come possa essere avvenuta tal formazione; come possa per appunto trovarsi la datolite in quella borsa del minerale cuprifero, dirò quanto occorre a suo luogo.

Presi dunque il serpentino, che trovasi all'ottavo piano della miniera di Montecatini, ed esaminatolo accuratamente, trovai che conteneva *boro*. Cimentai allora le rocce del settimo, sesto, quinto, quarto e terzo piano di essa miniera, ed in tutte queste rocce trovai egualmente *boro*. Presi allora il serpentino di antica eruzione, ed in tal roccia pure trovai *boro*: di modo che potei conoscere come vi esisteva più boro in un chilogrammo di serpentino moderno, che in 10,000 chilogrammi di acqua marina. Così che ardisco dire, che soltanto il serpentino della miniera di Montecatini, avuto riguardo alla massa che costituisce il monte di Caporciano, formerebbe da sè solo una richissima miniera di acido borico. Secondo le mie ricerche sembra che l'acido borico nella roccia serpentinosa vi sia in istato di borosilicato di magnesia.

Ma prima di andare più avanti col mio ragionamento, reputo necessario il richiamare alla memoria un fatto da me notato fin dal 1862 (3), cioè l'esistenza della materia organica nei gabbri rossi, e come essa materia contenga una quantità di azoto, di 0,10 millesimi, o in quel torno, il quale nella distillazione della roccia si trasforma in ammoniaca. Oltre a ciò debbo ricordare, che i serpentini sogliono contenere masse e noccioli di solfuri di rame e di ferro: ed aggiungerò ancora che quei serpentini, i quali sembrano affatto affatto sterili, e non vi si vede sostanza metallica, ad occhio nudo, contengono qualche venuzza, o qualche granellino, specialmente di pirite.

Richiamate alla memoria tali cose, che io reputava necessario il ricordare per fermare a suo tempo su di esse l'attenzione, passo adesso a descrivere un'esperienza, che tengo per importantissima.

(1) Ved. Bechi, *Étude sur la formation des Soffioni boracifères, et sur une nouvelle méthode pratiquée en Toscane, pour en extraire l'acide borique.* Bullet. de la Sociét. de l'ind. minéral. Tom. III, p. 330.

(2) Ved. Bechi, loc. cit. *Étude sur la formation des Soffioni* ecc.

(3) Ved. Bechi, *Sulla formazione dell'ammoniaca nell'arrostitura dei minerali,* ecc.

Un grossotto tubo di ferro battuto, che aveva all'estremità le sue giunture a vite, fu riempito con pezzetti della roccia serpentinosa, presa all'ottavo piano della miniera di Montecatini. Su questa roccia non si scorgeva a occhio nudo alcuna grana di minerale di rame, e l'analisi vi trovava soltanto del solfuro di ferro. Il tubo lo messi sopra un fornello a gasse, il quale poteva riscaldarlo a trecento gradi, o in quel torno. Da una parte entrava un getto di vapore con giusta proporzione di acido carbonico; mentre dall'altra usciva il bollente vapore, il quale, per via di un lungo tubo, attraversava l'acqua di una vasca. Il tutto era in giuste proporzioni: di modo che si poteva dire un perfetto lagone in piccolo.

Il bollente vapore usciva dall'acqua, agitandola vivamente, come fanno per appunto i Soffioni; e l'aria tutta all'intorno era compresa dal puzzo di gassi solfurei, misto a un non so che di pizzicante, che ben riconosce all'odore chi dei lagoni ha qualche pratica: onde pareva di esser presso al lago di Monterotondo, tanto era l'aria puzzolente. L'acqua in breve tempo divenne bianchiccia per zolfo sospeso. Dopo 36 ore di tale agitazione, la feci sfumare con dolce calore, e nella residenza salina trovai principalmente acido borico con la sua materia organica, col suo sale ammoniacale, ecc. di modo che pareva che avessi svaporato una tazza di acqua di un Soffione del lago di Monterotondo.

Debbo notare, che seguitando il vapore per diversi giorni, continuò a venir fuori tanto il gasse solfidrico, quanto un pocolino d'acido borico. Intanto credo affatto inutile il raccontare che tale esperienza fu spesseggiata con altre rocce serpentinose e con modi diversi, ma sempre con eguali risultamenti.

Or chi ha senno, vedrà andare in fumo tutte le ingegnose ipotesi immaginate sin qui in su l'origine dell'acido borico, e comparire la sua spiegazione nitida, chiara e splendida.

Essa può riepilogarsi così:

I serpentini della catena ofiolitica della Toscana contengono il boro nei loro elementi. Da una certa profondità di queste rocce erompono bollenti vapori, i quali attraversandole, e in parte compenetrandole, sfumano via l'acido borico.

È noto come i serpentini contengono vene e noccioli di minerali solfurei, e specialmente di solfuro di ferro e di rame: onde il gasse solfureo idrico dei Soffioni è conseguenza manifesta dell'azione del vapore acqueo su i minerali solforati, specialmente di ferro e di rame. Parimente la materia azotata dei serpentini, scomponendosi per il calore dei caldissimi vapori, origina l'azoto, l'idrogeno, il metano e l'ammoniaca; le quali materie tutte in piccola dose trovansi nel miscuglio gassoso: ma essa materia azotata non è cagione del solfuro idrico, e nè pure di azione scomponente dei solfati, come qualche egregio scienziato aveva supposto.

Dirò in fine che rispetto alla maggior quantità di ammoniaca dei Soffioni di Travale, confermo la mia teorica, perchè fondata su i fatti, la quale già descrissi nella Memoria su i lagoni boraciferi di Travale.

I Soffioni erompono dai terreni dell'eocene, del miocene, o del pliocene, perchè tali terreni si trovano superiori ai serpentinosi, o perchè essi Soffioni trovano più facile uscita; ma non mai perchè in tali terreni di sedimento vi trovino l'acido borico bello e formato, o la boracite, o la bechilite; giacchè, se per caso s'incontra qualche

minerale boracifero, apparisce essere stato formato dalla reazione dei Soffioni su le rocce circostanti.

Il fenomeno dei Soffioni è affatto affatto collegato con le rocce eruttive serpentinose, che formano la catena ofiolitica della Toscana, ed in conseguenza si può dire esclusivamente plutoniano: per la qual cosa bisogna da ora in poi respingere ogni idea di prodotti provenienti da sedimenti.

Perchè intanto non resti alcun dubbio che l'acido borico dei lagoni possa originarsi da altra roccia fuori del serpentino, dirò, che avendo cimentato col Soffione artificiale il granito turmalinifero dell'isola del Giglio, e le turmaline dell'isola dell'Elba, non potei avere nell'acqua della vaschetta acido borico in soluzione, comecchè lo sperimento fosse spesseggiato in diversi modi, e per diverso tempo.

Mi resta adesso di parlare di alcuni cristalli di datolite, trovati in una borsa, o geode, come ad alcuni piace dire, della calcosina di Montecatini. Questi cristalli furono da me analizzati, e vennero descritti dal prof. Meneghini in una lettera al prof. Dana.

Primo di tutto dirò, che la calcopirite di Montecatini contiene un po'di materia azotata, come il serpentino, ed anche qualche traccia di boro. Il che mostra una origine idroplutonica, come il serpentino che la impasta. È noto come essa calcopirite sia il principale minerale dei serpentini, e si trovi a noccioli, qualche volta di straordinarie dimensioni, involti nella pasta del filone, o ganga, la quale quasi sempre aderisce a guisa di pellicola al minerale. Spesse volte la calcopirite forma il nocciolo alla erubescite, alla calcosina ed al rame nativo: di modo che non è raro il caso di trovare nella medesima massa il passaggio a tutte queste specie di minerali, che si succedono a foggia di zone, e dove il rame nativo forma la parte esterna. Tale formazione è stata meravigliosamente bene descritta dai professori Meneghini e D'Achiardi: e attribuendo il rame nativo, la calcosina e l'erubescite a un processo di disolfurazione, il prof. Meneghini saviamente aggiunge, che la colorazione in rosso del gabbro, e la formazione di ossidi ferrici cristallini, sono effetti della scomparsa del ferro dalla calcopirite; comecchè non si sappia, se tale trasformazione fosse contemporanea, o posteriore alla comparsa del minerale nella giacitura presente. Io credo che sia contemporanea, da che la disolfurazione muove dalla stessa azione idrica, che ha portato fuori il minerale. Alcuni noccioli, o masse di calcopirite più libere, rimasero più direttamente investite dal vapore, il quale operò la disolfurazione incominciando dalla parte esterna [1]: quindi il borosilicato di magnesia incontrando la calcite, diede luogo alla formazione del borosilicato di calce. Per confermazione di questo vero messi dei pezzetti di calcopirite nel solito tubo, e avendovi fatto passare per diverso tempo il vapore con un po'd'acido carbonico, ricavai un minerale di calcosina, chiazzata di rame metallico, la quale passava all'erubescite, mentre nell'interno v'era ancora la calcopirite. Di fatti la parte superiore era composta così: 64,75 di rame, 16,46 di zolfo, e 18,79 di ossido ferrico: mentre nello strato subito sottoposto, la più parte del ferro non era in istato di ossido, ma unito allo zolfo;

[1] I noccioli di calcopirite, investiti dal solo calore in mezzo a un ganga fusa, possono concentrare nell'interno l'erubescite: il che ho veduto avvenire artificialmente.

di modo che, non facendo conto dell'ossido ferrico , il rimanente conteneva gli elementi che costituiscono la calcosina e l'erubescite.

Sicchè per raccorre il tutto in poche parole, dico, che la scoperta del boro nei serpentini; la virtù che hanno i vapori acquei di portarlo via sotto forma di acido borico, quando investono tali rocce; la materia azotata contenuta nelle rocce eruttive, la quale si scompone per i bollenti vapori; la formazione del solfuro idrico, mediante il vapore sopra i solfuri metallici, specialmente su quelli che in universale incontransi nei serpentini; mi sembra che bastino a rovesciare tutte le ipotesi fatte sull'origine dell'acido borico, e delle materie che lo accompagnano, e compiano gli studî intorno ai Soffioni. Intanto nuove indagini su le rocce ofiolitiche potranno dare maggior contezza della nuova teorica dei Soffioni, e

Forse che ancor con più solerti studî
Poi ridurrò questo lavor perfetto.

INDICE DEL VOLUME II° SERIE 3ª.

DISPENSA PRIMA

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.